गणित

कक्षा 8 के लिए पाठ्यपुस्तक

लेखक

आशा रानी सिंगल महेन्द्र शंकर
राम अवतार सुंदर लाल

संपादक

आशा रानी सिंगल
महेन्द्र शंकर
राम अवतार

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण

मार्च 2004 : फाल्गुन 1925

PD 175T RA

ISBN 81-7450-267-X

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नई दिल्ली 110 016

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बैंगलूर 560 085

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप
पनिहटी
कोलकाता 700 114

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781021

प्रकाशन सहयोग

संपादन : रेखा अग्रवाल

उत्पादन : विकास ब. मेश्राम

रु 30.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटर मार्क 70 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित

प्रकाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा न्यू प्रिंट इंडिया, 8/4 बी, इंडस्ट्रियल एरिया, साहिबाबाद (यू.पी.) द्वारा मुद्रित।

प्राक्कथन

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन.पी.ई.) 1986 (1992 में संशोधित) में सामान्य शिक्षा के एक अभिन्न अंग के रूप में गणित के पठन-पाठन की आवश्यकता पर स्पष्ट रूप से बल दिया है। चूंकि पाठ्यचर्या नवीनीकरण एक सतत् प्रक्रिया है, इसलिए प्रौद्योगिकी उन्मुख समाज में रहने के लिए विद्यार्थियों की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न परिवर्तन होते रहे हैं। राष्ट्रव्यापी चर्चा एवं परामर्श के पश्चात्, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) ने नवंबर 2000 में 'विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा' (एन.सी.एफ.एस.ई-2000) का प्रकाशन किया। इसमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986 में उपलब्ध मूल सिद्धांतों और निर्देशों पर पुनः बल दिया गया और विद्यालयी स्तर पर गणित से संबंधित अन्य मुद्दों को विस्तारपूर्वक बताया गया।

एन.सी.एफ.सी.ई. 2000 में, जो मूल रूप से एन.पी.ई. 1986 के अनुरूप है, दिए गए सामान्य उद्देश्यों की पूर्ति हेतु परिषद् ने उच्च प्राथमिक स्तर के लिए आवश्यक मार्गनिर्देश सहित गणित का पाठ्यक्रम विकसित किया। इस पाठ्यक्रम पर आधारित कक्षाओं VI और VII के लिए गणित की पाठ्यपुस्तकें क्रमशः वर्ष 2002 एवं 2003 में विकसित की गई थीं। कक्षा VIII की प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक इस शृंखला की अंतिम पुस्तक है। पूर्व पाठ्यपुस्तकों की भांति, इस पाठ्यपुस्तक में भी गणित को विद्यार्थियों के आस-पास के परिवेश से संबंधित क्रियाकलापों और प्रेरक उदाहरणों द्वारा प्रस्तुत करने का प्रयत्न किया गया है।

विद्यार्थियों को ज्ञान प्रदान करने, उनमें दक्षताएँ विकसित करने तथा उनमें तर्कसंगतता की धारणा उभारने के लिए, पाठ्यपुस्तक में सम्मिलित विषयवस्तु और सुझाए गए क्रियाकलापों को संयोजित किया गया है। पाठ्यसामग्री और सुझाए गए क्रियाकलापों को हमारे देश की व्यापक विद्यालयी पद्धतियों की विभिन्न आवश्यकताओं, पृष्ठभूमि और पर्यावरण के अनुकूल बनाने का एक सार्थक प्रयास किया गया है। विषयवस्तु को सरल एवं रोचक भाषा में प्रस्तुत करने का विशेष ध्यान रखा गया है।

पाठ्यपुस्तक का प्रथम प्रारूप विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा विकसित किया गया है जिन्हें अध्यापन और अनुसंधान का व्यापक अनुभव प्राप्त था। तत्पश्चात् एक समीक्षा कार्यशाला में इस प्रारूप की विषयवस्तु एवं उसके प्रस्तुतीकरण की विधि को पढ़ाने वाले शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय-विशेषज्ञों द्वारा गहन रूप से समीक्षात्मक विवेचना की गई। समीक्षा कार्यशाला में प्राप्त

टिप्पणियों और सुझावों पर लेखकों ने विचार किया और इस प्रारूप को उपयुक्त रूप से संशोधित कर अंतिम पांडुलिपि तैयार की गई। लेखक दल ने गणित की पूर्व पाठ्यपुस्तकों के प्रयोक्ताओं से प्राप्त सुझावों एवं पुनर्निवेशन का भी उपयोग किया। प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में, जहाँ उपयुक्त एवं अनुकूल समझा गया, लेखक दल ने एन.सी.ई.आर.टी द्वारा पूर्व प्रकाशित पाठ्यपुस्तकों की कुछ सामग्री का भी प्रयोग किया है।

इतने अल्प समय में इस पुस्तक को विकसित करने के लिए मैं लेखक दल के सदस्यों, इसके अध्यक्ष, संपादकों, समीक्षकों तथा इनसे संबंधित संस्थाओं को धन्यवाद देता हूँ। पुस्तक में और अधिक सुधार हेतु एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक के प्रयोक्ताओं के सुझावों का स्वागत करेगी।

जगमोहन सिंह राजपूत
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
अक्तूबर, 2003

प्रस्तावना

औपचारिक शिक्षा के प्रारंभ से ही गणित विद्यालयी शिक्षा का एक अभिन्न अंग रहा है और इसने न केवल सभ्यता की उन्नति में बल्कि भौतिक विज्ञान और अन्य विषयों के विकास में भी प्रबल भूमिका निभाई है। चूँकि पाठ्यचर्या नवीनीकरण एक सतत् प्रक्रिया है, इसलिए समाज की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न प्रकार के परिवर्तन हुए हैं। उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित पाठ्यचर्या में सुधार कर उसे समयानुकूल बनाने का वर्तमान प्रयास प्रयोक्ता समूहों से पुनर्निवेशन, ज्ञान की नवीन विचारधारा के आविर्भाव और राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) द्वारा विस्तृत चर्चा के उपरांत नवंबर 2000 में प्रकाशित *विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा* (*एन.सी.एफ.ई.* 2000) में दिए गए पाठ्यचर्या संबंधी विभिन्न सरोकारों पर आधारित एक प्रयास है। इससे पहले शिक्षक-प्रशिक्षकों, विभिन्न परीक्षा बोर्डों से नामित व्यक्तियों, शिक्षा निदेशालयों और विभिन्न राज्यों/संघ राज्य क्षेत्रों की राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषदों (एस.सी.ई.आर.टी.), के प्रतिनिधियों, सामान्य जन एवं विद्यालयों, विश्वविद्यालयों, महाविद्यालयों और परिषद् के संकाय सदस्यों द्वारा 'पाठ्यचर्या रूपरेखा पर परिचर्चा दस्तावेज प्रारूप' तैयार किया गया।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा से उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के संबंध में उभर कर आए कुछ सामान्य पाठ्यचर्या सरोकार इस प्रकार हैं :

- पाठ्यचर्या को सामाजिक परिवेश और (व्यक्ति विशेष के जन्म से संबंध) पूर्वाग्रहों को निष्प्रभावित करने तथा सार्वजनिक भाव एवं समानता की जागरूकता का सृजन करने योग्य होना चाहिए।
- बालिका शिक्षा।
- पर्यावरण संरक्षण।
- स्वदेशीय ज्ञान और प्राचीन काल से अब तक विज्ञान और गणित में भारत के योगदान का समुचित समावेश।
- अप्रचलित और अनावश्यक विषयवस्तु को हटाकर पाठ्यचर्या के बोझ में कमी तथा माध्यमिक स्तर पर गणित के शिक्षण के लिए आवश्यक ज्ञान एवं पृष्ठभूमि प्रदान करना।

उपरोक्त सरोकारों को ध्यान में रखते हुए, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने गणित की पाठ्यपुस्तकों को विकसित करने के लिए लेखक दलों का गठन किया। उच्च प्राथमिक स्तर का लेखक दल कक्षाओं, छठीं और सातवीं के लिए गणित की पाठ्यपुस्तकें पहले ही विकसित कर चुका है। कक्षा आठवीं के लिए गणित की वर्तमान पाठ्यपुस्तक इसी श्रृंखला की अगली पुस्तक है।

इस पुस्तक को तैयार करने में बहुत अधिक प्रयत्न किए गए हैं। सर्वप्रथम विभिन्न लेखकों द्वारा तैयार की गई प्रारूप सामग्री पर लेखक दल के सदस्यों ने परस्पर चर्चा की और इस सामग्री को उस पर प्राप्त टिप्पणियों एवं सुझावों के आधार पर संशोधित किया गया। इन संशोधित चर्चाओं में विद्यालयों में पढ़ाने वाले शिक्षकों की भी सहायता ली गई। सामग्री को फिर एक समीक्षा कार्यशाला में शिक्षकों एवं विशेषज्ञों के एक समूह के सम्मुख रखा गया। इस समीक्षा कार्यशाला के प्रतिभागियों द्वारा दी गई टिप्पणियों एवं सुझावों के आधार पर पांडुलिपि को अंतिम रूप प्रदान किया गया।

इस पाठ्यपुस्तक की प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित हैं :

- जहां तक संभव हो सका है, विद्यार्थियों को प्रत्येक विषय का परिचय उनके आस-पास के परिवेश से संबंधित प्रेरक उदाहरणों के माध्यम से कराया गया है।
- पाठ्यपुस्तक में अवधारणाओं का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है तथा अधिक संख्या में चित्र, हल किए गए उदाहरण और अभ्यास सम्मिलित किए गए हैं। ऐसा सोच-समझकर किया गया है ताकि विद्यार्थी में अवधारणाओं को बेहतर ढंग से समझकर प्रश्नों को बेहतर ढंग से हल करने की दक्षता में वृद्धि की जा सके।
- गणितीय तथ्यों की पुन: खोज करने और आरेखण एवं मापन के लिए उपयुक्त दक्षता के विकास हेतु अनेक क्रियाकलाप सुझाए गए हैं।
- राष्ट्रीय एकता, पर्यावरण संरक्षण, सामाजिक अवरोधों की समाप्ति, छोटे परिवार के मानदंडों का अनुपालन करने, लिंग भेदभाव मिटाने की आवश्यकता पर जागरूकता विकसित करने के लिए कुछ शाब्दिक समस्याओं को सम्मिलित किया गया है।
- विद्यार्थियों के मस्तिष्क में इन शाब्दिक समस्याओं के प्रमुख संदेश पहुँचने चाहिए तथा शिक्षण के समय अध्यापकों को इन तथ्यों के प्रति सचेत रहना चाहिए।
- पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर के अनुरूप शब्दावली और पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है।
- प्रत्येक अध्याय के अंत में, महत्त्वपूर्ण संकल्पनाओं एवं परिणामों की एक सूची शीर्षक 'याद रखने योग्य बातें' के रूप में दी गई है।
- प्रत्येक एकक के अंत में ऐतिहासिक संदर्भों विशेषकर भारतीय योगदानों का शीर्षक 'अतीत के झरोखे से' के रूप में उल्लेख किया गया है।

मैं निदेशक, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् का धन्यवाद करती हूँ जिन्होंने पाठ्यचर्या नवीनीकरण की इस परियोजना का शुभारंभ किया और गणित शिक्षा में सुधार हेतु इस राष्ट्रीय प्रयास में हमें सम्मिलित होने का अवसर प्रदान किया जिससे हम गणित शिक्षा के सुधार के प्रति अपना व्यावसायिक ऋण चुका सकें। मैं अध्यक्ष, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग को भी उनके गतिशील नेतृत्व, इस कार्य में भरपूर सहयोग देने तथा अन्य सुविधाएँ उपलब्ध कराने के लिए धन्यवाद देती हूँ। लेखक दल के अन्य सदस्य और समीक्षा कार्यशाला के सभी प्रतिभागी भी धन्यवाद के पात्र हैं। कुछ चित्रों को बनवाने में सहायता प्रदान करने के लिए मैं सी.आई.ई.टी. को भी धन्यवाद देती हूँ।

इस लंबी प्रस्तावना को समाप्त करते हुए मैं बार-बार और अधिकतर की जाने वाली आलोचनाओं का उल्लेख करना चाहूँगी कि किसी भी विषय में कोई भी पुस्तक अंतिम नहीं हो सकती। हमने अपनी ओर से उपलब्ध सीमित समय में अच्छी से अच्छी सामग्री प्रदान करने का भरसक प्रयास किया है, फिर भी हम स्वीकार करते हैं कि इसमें सुधार हो सकता है। इसमें सुधार हेतु सुझाव/टिप्पणियों का स्वागत है। मुझे आशा है कि पाठक इस पुस्तक को पढ़ते समय उतना ही आनंद लेंगे जितना हमें इसके लिखते समय प्राप्त हुआ है।

आशा रानी सिंगल

अध्यक्ष

लेखक दल

गांधी जी का जंतर

तुम्हें एक जंतर देता हूँ। जब भी तुम्हें संदेह हो या तुम्हारा अहम् तुम पर हावी होने लगे, तो यह कसौटी आज़माओ :

जो सबसे गरीब और कमज़ोर आदमी तुमने देखा हो, उसकी शक्ल याद करो और अपने दिल से पूछो कि जो कदम उठाने का तुम विचार कर रहे हो, वह उस आदमी के लिए कितना उपयोगी होगा। क्या उससे उसे कुछ लाभ पहुँचेगा? क्या उससे वह अपने ही जीवन और भाग्य पर कुछ काबू रख सकेगा? यानी क्या उससे उन करोड़ों लोगों को स्वराज्य मिल सकेगा, जिनके पेट भूखे हैं और आत्मा अतृप्त है?

तब तुम देखोगे कि तुम्हारा संदेह मिट रहा है और अहम् समाप्त होता जा रहा है।

मो. क. गांधी

हिंदी रूपांतर की समीक्षा कार्यगोष्ठी के सदस्य

आशा रानी सिंगल
प्रोफेसर गणित (सेवानिवृत्त)
चौधरी चरण सिंह विश्वविद्यालय, मेरठ
उत्तर प्रदेश

अजय कुमार सिंह
टी.जी.टी. (गणित)
रामजस सीनियर माध्यमिक विद्यालय
चाँदनी चौक, दिल्ली

अशोक कुमार गुप्ता
टी.जी.टी. (गणित)
सर्वोदय विद्यालय
जी.पी. ब्लाक, पीतमपुरा, दिल्ली

ज्योति झाम्ब
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय को-एड माध्यमिक विद्यालय
सैनिक विहार, दिल्ली

महेन्द्र शंकर
लेक्चरर (एस.जी.) गणित,
एन.सी.ई.आर.टी. (सेवानिवृत्त)
नई दिल्ली

एम. के. अग्रवाल
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय बाल सीनियर माध्यमिक विद्यालय
रेलवे कालोनी, तुगलकाबाद, नई दिल्ली

पी.के. तिवारी
सहायक आयुक्त (सेवानिवृत्त)
के.वी.एस., नई दिल्ली

प्रमोद लता जैन
लेक्चरर (सेवानिवृत्त)
आर.जी. कन्या इंटर कॉलेज
मेरठ, उत्तर प्रदेश

आर.पी. गिहारे
लेक्चरर (गणित)
ब्लाक संसाधन समन्वयक
जनपद शिक्षा केंद्र
आर.जी.एस.एम., चिचोली
बेतुल, मध्य प्रदेश

आर.के. पांडे
टी.जी.टी. (गणित)
डेमोंस्ट्रेशन स्कूल, आर.आई.ई. भोपाल
मध्य प्रदेश

रूचि सलारिया
टी.जी.टी. (गणित)
केंद्रीय विद्यालय नं. 4, दिल्ली कैंट

सरिता रेवरी
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय बालिका सीनियर माध्यमिक विद्यालय
नं. 1, रूप नगर, दिल्ली

सरताज उद्दीन सिद्दिकी
टी.जी.टी. (गणित)
सर्वोदय कन्या विद्यालय
जीनत महल, जाफराबाद
दिल्ली

सविता गर्ग
टी.जी.टी. (गणित)
सर्वोदय कन्या विद्यालय
बी–3 पश्चिम विहार, दिल्ली

सुंदर लाल
प्रोफेसर एवं अध्यक्ष, गणित विभाग
इंस्टीट्यूट ऑफ बेसिक साईसेस
बी.आर. अंबेडकर विश्वविद्यालय
आगरा, उत्तर प्रदेश

उर्मिल वधवा
टी.जी.टी. (गणित) (सेवानिवृत्त)
राजकीय बालिका सीनियर माध्यमिक विद्यालय
नं. 2, ए–ब्लाक, जनकपुरी, नई दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी संकाय
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग

हुकुम सिंह
प्रोफेसर

वी.पी. सिंह
रीडर

प्रवीण कुमार चौरसिया
लेक्चरर

राम अवतार (**समन्वयक**)
रीडर

हिंदी रूपांतर

आशा रानी सिंगल   महेन्द्र शंकर

सुंदर लाल

हिंदी रूपांतर के संपादक

आशा रानी सिंगल   महेन्द्र शंकर

राम अवतार

विषय सूची

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह -

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे,

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे,

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे,

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे,

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों,

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे,

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे,

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे,

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे, और

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊंचाइयों को छू सके।

अध्याय

वर्ग एवं वर्गमूल

1.1 भूमिका

पिछली कक्षा में, हम उन संख्याओं का अध्ययन कर चुके हैं जो परिमेय संख्याओं के पूर्णांकीय घातांक लेने पर प्राप्त होती हैं। जब किसी संख्या का घातांक 2 होता है, तो प्राप्त होने वाली संख्या *वर्ग* (*square*) या *वर्ग संख्या* कहलाती है तथा मूल संख्या वर्ग संख्या का *वर्गमूल* (*square root*) कहलाती है। इस अध्याय में, हम वर्ग संख्याओं तथा उनके वर्गमूलों का अध्ययन करेंगे। पहले हम वर्ग संख्याओं के कुछ प्रतिरूपों का वर्णन करेंगे तथा फिर दो या तीन अंकों वाली संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने की कुछ सरल विधियों का वर्णन करेंगे। इसके पश्चात्, हम अभाज्य गुणनखंडन की विधि द्वारा पूर्ण वर्ग संख्याओं (अर्थात् पूर्णांकों के वर्गों) का वर्गमूल ज्ञात करना सीखेंगे। हम *विभाजन विधि* द्वारा पूर्ण वर्ग संख्याओं, परिमेय वर्ग संख्याओं तथा दशमलव वर्ग संख्याओं के वर्गमूल निकालना भी सीखेंगे। यदि संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है, तो उसका वर्गमूल पूर्णांक के रूप में ज्ञात नहीं किया जा सकता। किंतु इस संख्या के लिए हम कोई ऐसी भिन्न या दशमलव संख्या ज्ञात करने का प्रयास करते हैं जिसका वर्ग दी गई संख्या के सन्निकट हो। ऐसी भिन्न या दशमलव संख्या को हम *सन्निकट वर्गमूल* कहते हैं। सन्निकट वर्गमूल के लिए, हम विभाजन विधि का प्रयोग करते हैं।

1.2 संख्या का वर्ग एवं वर्ग संख्याएँ

यदि m व n ऐसी प्राकृत संख्याएँ हैं कि $n = m^2$ है, तो n संख्या m का *वर्ग* है तथा n एक *वर्ग संख्या* है। उदाहरणार्थ, $4 \ (= 2 \times 2 = 2^2)$, 2 का वर्ग है और इस प्रकार 4 एक वर्ग संख्या है। सारणी 1.1 में, संख्या 1 से 20 तक के वर्ग दिए गए हैं। इस प्रकार, यह 400 तक की सभी वर्ग संख्याओं की सारणी है। पूर्णांकों के वर्ग को *पूर्ण वर्ग* (*perfect square*) या *पूर्ण घात 2* या (*पूर्ण दूसरी घात*) भी कहते हैं।

सारणी 1.1 : 1 से 20 तक के वर्ग

संख्या	*वर्ग*	*संख्या*	*वर्ग*
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

हम देखते हैं कि प्रत्येक प्राकृत संख्या पूर्ण वर्ग हो, यह आवश्यक नहीं है। 100 तक मात्र 10 संख्याएँ ही पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं (देखिए सारणी 1.1)। 10000 तक मात्र 100 संख्याएँ ही पूर्ण वर्ग हैं। 3, 50, 1700, जैसी संख्याएँ पूर्ण वर्ग या वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।

वर्ग संख्याओं का अध्ययन करते समय दो महत्त्वपूर्ण प्रश्न उपस्थित होते हैं:

1. किसी दी हुई संख्या के बारे में यह ज्ञात करना कि *संख्या पूर्ण वर्ग है अथवा नहीं।*
2. किसी पूर्ण वर्ग संख्या के लिए *वह संख्या ज्ञात करना जिसका पूर्ण वर्ग दी गई संख्या है।*

इन प्रश्नों के संतोषजनक उत्तर विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी के अनेक क्षेत्रों में बहुत महत्त्व रखते हैं। इन प्रश्नों से संबंधित कुछ मूल तथ्यों को भली-भाँति समझने के लिए, हम वर्ग संख्याओं तथा ऐसी संख्याओं, जो वर्ग संख्याएँ नहीं हैं, के कुछ गुणों का अध्ययन करेंगे।

1.3 वर्ग संख्याओं के कुछ गुण व प्रतिरूप

I. *किसी भी वर्ग संख्या का अंत 2, 3, 7 या 8 के अंक में नहीं होता।* सारणी 1.1 पर दृष्टि डालने से ज्ञात होता है कि सभी वर्ग संख्याओं का इकाई का अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 है। यह गुण 1 से 20 तक की संख्याओं का ही कोई विशेष गुण नहीं है। किसी

भी संख्या के वर्ग के अंत में इन्हीं में से कोई अंक होगा। एक से अधिक अंकों वाली एक संख्या n लें तथा इसका वर्ग करें। अब n का इकाई का अंक लें, इसका वर्ग करें तथा इस वर्ग का इकाई का अंक लें। यह इकाई का अंक, n^2 के इकाई के अंक के बराबर होगा। इस प्रकार, किसी भी प्राकृत संख्या के वर्ग का अंत अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 में ही होगा। इसका अर्थ हुआ कि 2, 3, 7 या 8 के अंक में अंत होने वाली कोई भी संख्या वर्ग संख्या नहीं होगी। फलस्वरूप 52, 793, 15857, 888888 में से कोई भी संख्या वर्ग संख्या नहीं है। क्या इसका यह अर्थ निकाला जा सकता है कि 0, 1, 4, 5, 6 या 9 में अंत होने वाली सभी संख्याएँ वर्ग संख्याएँ होंगी? संख्याओं 10, 11, 14, 15, 19, 26 आदि के बारे में आप क्या कहेंगे?

टिप्पणी : 'अंक a में अंत होने वाली संख्या' का अर्थ हम यह लगाएँगे कि संख्या का इकाई का अंक a है।

II. *किसी संख्या के इकाई के अंक से संख्या के वर्ग के इकाई का अंक ज्ञात किया जा सकता है।* यदि संख्या के इकाई का अंक 1 अथवा 9 है, तो इसके वर्ग के इकाई का अंक 1 होगा। 2 अथवा 8 के अंक में अंत होने वाली संख्या के वर्ग के इकाई का अंक 4 होगा। 3 अथवा 7 के इकाई-अंक वाली संख्याओं के वर्ग 9 पर समाप्त होंगे। इसी प्रकार, यदि संख्या का इकाई-अंक 4 अथवा 6 है, तो संख्या के वर्ग का इकाई-अंक 6 होगा। 5 अथवा शून्य पर समाप्त होने वाली संख्याओं का वर्ग करने पर प्राप्त होने वाली संख्याएँ क्रमशः 5 व शून्य पर ही समाप्त होंगी।

III. *पूर्ण वर्ग के अंत में शून्यों की संख्या सदैव सम ही होती है।* यदि किसी संख्या के अंत में एक शून्य है, (जैसे 50), तो इसके वर्ग (2500) के अंत में दो शून्य होंगे। वस्तुतः संख्या के अंत में जितने शून्य होते हैं उसके वर्ग के अंत में उसके दुगुने शून्य होते हैं। उदाहरणार्थ, $300^2 = 90000$। इस प्रकार, *यदि किसी संख्या के अंत में शून्यों की संख्या विषम है, तो वह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं होगी।*

IV. *सम (विषम) संख्या का वर्ग सम (विषम) होगा।* इस तथ्य की जाँच, 20 तक की संख्याओं के लिए, सारणी 1.1 से की जा सकती है। वस्तुतः, यह नियम सभी संख्याओं पर लागू होता है। यह बात उपर्युक्त गुण II से भी प्राप्त की जा सकती है (क्योंकि सम संख्याओं के इकाई-अंक 0, 2, 4, 6 व 8 होते हैं, तथा विषम संख्याएँ 1, 3, 5, 7 या 9 के अंक पर समाप्त होती हैं)।

V. *किसी भी वर्ग संख्या को 3 से भाग देने पर शेषफल 0 या 1 ही प्राप्त होता है।* इस तथ्य की जाँच सारणी 1.1 में दी गई वर्ग संख्याओं को 3 से विभाजित कर की जा सकती है। तथापि यह तथ्य अन्य सभी वर्ग संख्याओं के लिए भी सत्य है। सारणी 1.2 में, कुछ अन्य अभाज्य संख्याओं द्वारा वर्ग संख्याओं को विभाजित करने पर प्राप्त संभावित शेषफलों को दिया गया है।

सारणी 1.2

भाजक	*संभावित शेषफल*
3	0, 1
5	0, 1, 4
7	0, 1, 2, 4
11	0, 1, 3, 4, 5, 9
13	0, 1, 3, 4, 9, 10, 12

VI. सारणी 1.2 में दी गई संभावित शेषफलों की सूची से उन संख्याओं का पता लगाना संभव है जो पूर्ण वर्ग *नहीं* है। उदाहरण के लिए, यदि किसी संख्या को 3 से विभाजित करने पर शेषफल 2 है, तो वह संख्या पूर्ण वर्ग *नहीं* होगी।

VII. *यदि संख्या n पूर्ण वर्ग है, तो $2n$ पूर्ण वर्ग कदापि नहीं हो सकती।* दूसरे शब्दों में, यदि किसी प्राकृत सख्या q के लिए $n = q^2$ है, तो किसी भी प्राकृत संख्या p के लिए $2q^2 = p^2$ नहीं हो सकता। इस तथ्य की जाँच 200 तक की प्राकृत संख्याओं के लिए सारणी 1.1 से की जा सकती है। परंतु, यह कथन व्यापक रूप से सत्य है। वास्तव में यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि *यदि n एक पूर्ण वर्ग संख्या है और t एक अभाज्य संख्या है, तो tn कभी भी पूर्ण वर्ग नहीं हो सकती।*

VIII. अंक 1 से बनने वाली संख्याओं जैसे 1, 11, 111, ... आदि के वर्ग एक रोचक प्रतिरूप प्रस्तुत करते हैं। यथा :

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$. = .$$
$$. = .$$

$$. = .$$

$$111111111^2 = 12345678987654321$$

IX. वर्ग संख्याओं से संबंधित एक अन्य रोचक प्रतिरूप है :

$$1^2 = 1$$

$$11^2 = 121 \text{ व } 1+2+1 = 2^2$$

$$111^2 = 12321 \text{ व } 1+2+3+2+1 = 3^2$$

$$. = .$$

$$. = .$$

$$. = .$$

$$111111111^2 = 12345678987654321 \text{ व } 1+2+\ldots+2+1 = 9^2$$

X. एक अन्य रोचक प्रतिरूप निम्न प्रकार है :

$$121 \times (1+2+1) = 484 = 22^2$$

$$12321 \times (1+2+3+2+1) = 110889 = 333^2$$

अर्थात् $11^2 \times$ (11^2 में अंकों का योगफल) $= 22^2$

$111^2 \times$ (111^2 में अंकों का योगफल) $= 333^2$

.

.

.

$111111111^2 \times$ (111111111^2 में अंकों का योगफल) $= 999999999^2$

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं हैं। कारण बताइए :

(i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222

2. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई के अंक क्या होंगे?

(i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853

(v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880

(ix) 12796 (x) 55555

3. निम्नलिखित संख्याओं के पूर्ण वर्ग न होने का कारण बताइए :

(i) 64000 (ii) 89722 (iii) 222000 (iv) 505050

4. निम्नलिखित संख्याओं में से किन-किन का वर्ग एक विषम संख्या है?

(i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004

5. दिखाइए कि निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हैं :

(i) 7927 (ii) 1058 (iii) 33453 (iv) 22222

(*संकेत :* गुण V का प्रयोग करें)

6. निम्नलिखित प्रतिरूपों का अवलोकन कर रिक्त स्थान भरिए :

$11^2 = 1\,2\,1$

$101^2 = 1\,0\,2\,0\,1$

$1001^2 = 1\,0\,0\,2\,0\,0\,1$

$100001^2 = 1 \ldots\ldots 2 \ldots\ldots 1$

$10000001^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7. निम्नलिखित प्रतिरूपों को देखकर, रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

$11^2 = 1\,2\,1$

$101^2 = 1\,0\,2\,0\,1$

$10101^2 = 1\,0\,2\,0\,3\,0\,2\,0\,1$

$1010101^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots^2 = 1\,0\,2\,0\,3\,0\,4\,0\,5\,0\,4\,0\,3\,0\,2\,0\,1$

8. दिए गए प्रतिरूप के आधार पर अज्ञात संख्याएँ ज्ञात कीजिए :

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + __^2 = 21^2$

$5^2 + __^2 + 30^2 = 31^2$

$6^2 + 7^2 + __^2 = __^2$

9. (पुस्तक में दिए गए) उचित प्रतिरूपों की सहायता से रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) $\frac{333^2}{12321}$ = ... (ii) $\frac{666666^2}{12345654321}$ = ...

10. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए :

(i) वर्ग संख्या में अंकों की संख्या सम होती है।

(ii) अभाज्य संख्या का वर्ग अभाज्य ही होता है।

(iii) दो वर्ग संख्याओं का योगफल एक वर्ग संख्या होता है।

(iv) दो वर्ग संख्याओं का अंतर एक वर्ग संख्या होता है।

(v) दो वर्ग संख्याओं का गुणनफल एक वर्ग संख्या होता है।

(vi) कोई भी वर्ग संख्या ऋणात्मक नहीं होती।

(vii) 50 व 60 के बीच कोई वर्ग संख्या नहीं है।

(viii) 200 तक मात्र 14 संख्याएँ ही वर्ग संख्याएँ हैं।

1.4 वर्ग करने की कुछ वैकल्पिक विधियाँ

किसी पूर्णांक का वर्ग करना एक साधारण प्रक्रिया है। पूर्णांक को स्वयं से सीधा-सीधा गुणा करना होता है। बड़ी संख्याओं के लिए गुणा करना कभी-कभी कठिन कार्य हो जाता है और इसमें समय भी अधिक लग सकता है। इस अनुच्छेद में, हम दो अथवा तीन अंकों की संख्याओं का वर्ग निकालने की कुछ वैकल्पिक विधियों की चर्चा करेंगे। दो अंकों का वर्ग प्राप्त करने की पहली विधि दो संख्याओं को गुणा करने की एक प्राचीन भारतीय विधि पर आधारित है। इसे हम *स्तंभ विधि (Column method)* कहेंगे। दो अंकों की संख्या के वर्ग का यह नियम सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ पर आधारित है।

किसी दो-अंकीय संख्या ab (जहाँ a दहाई-अंक व b इकाई-अंक है) का वर्ग करने के लिए, हम तीन स्तंभ बनाते हैं तथा इनमें संख्याओं a^2, $2a \times b$ तथा b^2 को निम्न प्रकार लिखते हैं (स्पष्टीकरण के लिए हम $ab = 86$ लेते हैं) :

स्तंभ I	*स्तंभ* II	*स्तंभ* III
a^2 $(8^2 = 64)$	$2a \times b$ $(2 \times 8 \times 6 = 96)$	b^2 $(6^2 = 36)$

इसके पश्चात्, हम निम्न चरणों में प्रक्रिया पूरी करते हैं :

I	II	III

चरण 1 : स्तंभ III में b^2 के इकाई-अंक को रेखांकित करें और दहाई-अंक यदि कोई है, तो स्तंभ II में उसे $2a \times b$ में जोड़ें।

a^2	$2a \times b$	b^2
64	96	3<u>6</u>
	+3	
	99	

चरण 2 : स्तंभ II में इकाई अंक को रेखांकित करें तथा दहाई-अंक को स्तंभ I में a^2 में जोड़ें।

a^2	$2a \times b$	b^2
64	96	3<u>6</u>
+9	+3	
73	9<u>9</u>	

चरण 3 : स्तंभ I की संख्या को रेखांकित करें।
रेखांकित अंकों से प्राप्त संख्या ही ab का वर्ग है।

a^2	$2a \times b$	b^2
64	96	3<u>6</u>
+9	+3	
<u>73</u>	9<u>9</u>	

$86^2 = 7396$

उदाहरण 1 : (i) 65 व (ii) 37 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल : (i) 65×65

36	60	2<u>5</u>
+6	+2	
<u>42</u>	6<u>2</u>	

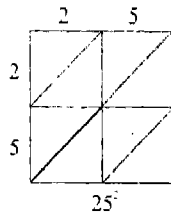
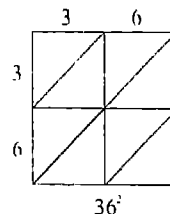
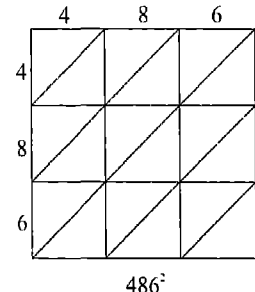
$\therefore \quad 65^2 = 4225$

(ii) 37×37

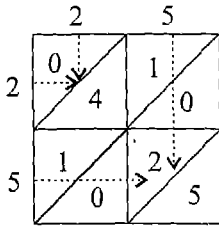
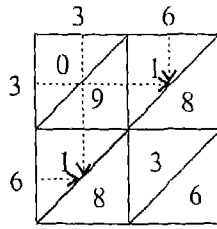
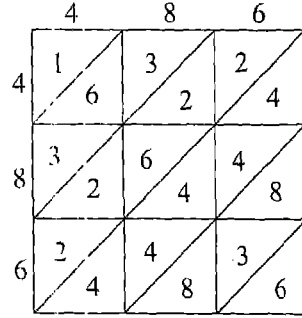
9	42	4<u>9</u>
+4	+4	
<u>13</u>	4<u>6</u>	

$\therefore \quad 37^2 = 1369$

संख्याओं के अंक बढ़ने पर, उपर्युक्त विधि कुछ कठिन हो जाती है। इस स्थिति में, हम *विकर्ण विधि* (*Diagonal method*) का प्रयोग करते हैं। यह भी दो संख्याओं के गुणा करने की एक प्राचीन भारतीय विधि है। किंतु हम यहाँ इस विधि को संख्याओं 25, 36 व 486 के वर्ग ज्ञात करते हुए स्पष्ट करेंगे।

इसमें पहले हम एक वर्ग बनाते हैं और (अंकों की संख्या के अनुसार) इसे उपवर्गों में विभाजित करते हैं। इसके पश्चात् आकृति के अनुसार उपवर्गों के कुछ

आकृति 1.1 **(i)**

आकृति 1.2 **(i)**

आकृति 1.3 **(i)**

विकर्ण खींचते हैं तथा वर्ग की जाने वाली संख्या के अंकों को लिखते हैं।

अब हम पंक्ति व स्तंभ के अंकों को परस्पर गुणा करते हैं तथा गुणनफल को संबद्ध उपवर्ग में रखते हैं [आकृति 1.1 (ii), 1.2 (ii) तथा 1.3 (ii)]। यदि प्राप्त संख्या में एक ही अंक है, तो इसे विकर्ण के नीचे लिखते हैं। यदि गुणा करने पर द्विअंकीय संख्या प्राप्त होती है, तो दहाई-अंक विकर्ण के ऊपर तथा इकाई-अंक विकर्ण के नीचे लिखते हैं।

***आकृति 1.1* (ii)** ***आकृति 1.2* (ii)** ***आकृति 1.3* (ii)**

अब सबसे निचले विकर्ण के नीचे से अंकों को जोड़ना आरंभ करते हैं। योग करते समय इकाई-अंक को रेखांकित करते हैं तथा दहाई का अंक, यदि कोई हो तो, विकर्ण के ऊपर वाले योगफल में जोड़ देते हैं। यह प्रक्रिया सभी विकर्णों के लिए दोहराते हैं और फिर सबसे ऊपरी विकर्ण के ऊपर की संख्या को भी रेखांकित करते हैं। इस प्रक्रिया में रिक्त स्थानों में शून्य मान लेते हैं। इस प्रकार, रेखांकित अंकों से प्राप्त संख्या ही अभीष्ट वर्ग है [आकृति 1.1 (iii), 1.2 (iii) तथा 1.3 (iii)]।

***आकृति 1.1* (iii)** ***आकृति 1.2* (iii)**

$486^2 = 236196$

आकृति 1.3 **(iii)**

टिप्पणी : वर्ग ज्ञात करने की यह विकर्ण विधि सभी संख्याओं के वर्ग ज्ञात करने के लिए सुलभ है; संख्या में अंक कितने भी हों।

प्रश्नावली 1.2

1. स्तंभ विधि द्वारा निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए। प्रचलित विधि द्वारा वर्ग प्राप्त कर परिणाम का सत्यापन कीजिए :

(i) 25 (ii) 37 (iii) 54 (iv) 96 (v) 71

2. विकर्ण विधि द्वारा निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए :

(i) 89 (ii) 276 (iii) 349 (iv) 293 (v) 161

3. निम्न संख्याओं के वर्ग ज्ञात करें :

(i) 127 (ii) 235 (iii) 852 (iv) 251 (v) 501

4. संख्याओं

(i) 35 (ii) 75 (iii) 95 (iv) 105 (v) 205

के वर्ग निम्नलिखित प्रतिरूप के उपयोग द्वारा प्राप्त कीजिए :

$25^2 = 2 \times (2 + 1)$ सौ $+ 25 = 625$

$45^2 = 4 \times (4+1)$ सौ $+ 25 = 2025$

$115^2 = 11 \times (11+1)$ सौ $+ 25 = 13225$

5. प्रतिरूपों

$52^2 = (5^2 + 2)$ सौ $+ 2^2 = 2704$

$57^2 = (5^2 + 7)$ सौ $+ 7^2 = 3249$

की सहायता से निम्न के वर्ग ज्ञात कीजिए :

(i) 51 (ii) 54 (iii) 56 (iv) 58 (v) 59

6. निम्नलिखित प्रतिरूपों को देखिए :

$511^2 = (250 + 11)$ हजार $+ 11^2 = 261121$

$590^2 = (250 + 90)$ हजार $+ 90^2 = 348100$

इनकी सहायता से निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए :

(i) 509 (ii) 515 (iii) 525 (iv) 580 (v) 534

7. सर्वसमिका

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

का प्रयोग करते हुए निम्न के वर्ग ज्ञात कीजिए :

(i) 509 (ii) 211 (iii) 625

8. सर्वसमिका

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए :

(i) 491 (ii) 189 (iii) 575

1.5 वर्गमूल

यदि $n = m^2$ है, तो हम कहते हैं कि *m संख्या n का एक वर्गमूल* है। इस प्रकार, 4 का वर्गमूल 2 है, चूँकि $4 = 2^2$ है। इसी प्रकार, 25 का वर्गमूल 5 है, चूँकि $25 = 5^2$ है। इसी प्रकार 49 का वर्गमूल 7 तथा 121 का वर्गमूल 11 है, आदि। इस प्रकार, हम देखतें हैं कि यदि n एक पूर्ण वर्ग संख्या है, तो इसका वर्गमूल धनात्मक पूर्णांक है। यदि n पूर्ण वर्ग नहीं है, तो ऐसा कोई पूर्णांक m नहीं है जिसके लिए n का वर्गमूल m हो। अर्थात् n का पूर्णांक वर्गमूल नहीं है। इस अनुच्छेद में वर्ग से हमारा आशय पूर्ण वर्ग से तथा वर्गमूल से आशय पूर्णांक

वर्गमूल से है।

अनुच्छेद 1.3 में चर्चित वर्ग संख्याओं के गुणों के आधार पर, हमें वर्गमूलों के विषय में निम्नलिखित तथ्य प्राप्त होते हैं:

I. *इकाई अंक 2, 3, 7 या 8 वाली संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं हैं। अत: इन संख्याओं के वर्गमूल नहीं होते।*

II. *यदि किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है, तो उसका इकाई-अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 होना चाहिए।*

उपर्युक्त गुण II द्वारा वर्ग संख्याओं के इकाई अंकों तथा इनके वर्गमूलों के इकाई अंकों में संबंध आगे दी हुई सारणी के अनुसार हैं :

वर्ग संख्या का इकाई-अंक	0	1	4	5	6	9
वर्गमूल का इकाई-अंक	0	1 या 9	2 या 8	5	4 या 6	3 या 7

III. *यदि किसी संख्या के अंत में आने वाले शून्यों की संख्या विषम है, तो उस संख्या का वर्गमूल ज्ञात नहीं किया जा सकता। यदि किसी वर्ग संख्या के बाद में लगे शून्यों की संख्या सम है, तो इस प्रकार प्राप्त संख्या का वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है।* वर्गमूल के अंत में शून्यों की संख्या उस संख्या के अंत में शून्यों की संख्या की आधी होगी।

IV. *सम वर्ग संख्या का वर्गमूल सम तथा विषम वर्ग संख्या का वर्गमूल विषम होता है।*

V. ध्यान दीजिए कि जिस प्रकार $2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16$ आदि हैं, उसी प्रकार $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4, (-3^2) = (-3) \times (-3) = 9, (-4)^2 = 16$ आदि होते हैं। इससे स्पष्ट है कि किसी भी धनात्मक या ऋणात्मक संख्या का वर्ग सदैव धनात्मक होता है। दूसरे शब्दों में कहें, तो ऋणात्मक संख्याएँ वर्ग संख्याएँ नहीं होतीं *और इस प्रकार परिमेय संख्या-निकाय में इनका वर्गमूल नहीं होता।* (कुछ संख्या निकायों में ऋणात्मक संख्याओं के भी वर्गमूल ज्ञात किए जा सकते हैं।)

जैसा कि हमने ऊपर देखा, $2^2 = (-2)^2 = 4$। इस प्रकार 2 तथा −2 दोनों ही 4 के वर्गमूल हैं। इसी प्रकार, अन्य वर्ग संख्याओं के भी दो वर्गमूल होते हैं- एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक। परंतु वर्तमान स्तर पर हम केवल धनात्मक वर्गमूल पर ही विचार करेंगे। संकेत रूप

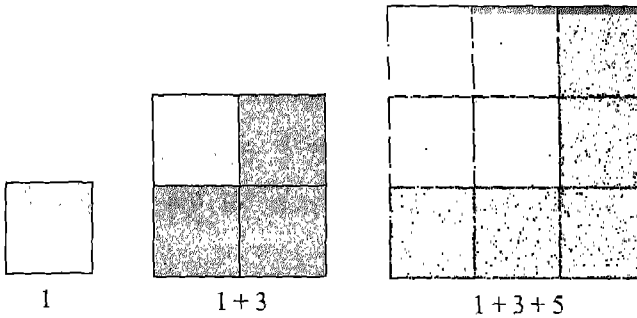
में 4 के धनात्मक वर्गमूल को हम $\sqrt[2]{4}$ या $\sqrt{4}$ से दर्शाते हैं। संकेत '$\sqrt{\ }$' धनात्मक वर्गमूल के लिए प्रयुक्त होता है। इस प्रकार $\sqrt{4} = 2$ है। $\sqrt{4} = -2$ लिखना अशुद्ध है।

अब हम वर्गमूल ज्ञात करने की कुछ विधियों का वर्णन करेंगे।

हम देखते हैं कि

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$ (पहली दो विषम संख्याओं का योगफल $= 2^2$)

$1 + 3 + 5 = 3^2$ (पहली तीन विषम संख्याओं का योगफल $= 3^2$)

आकृति 1.4

व्यापक रूप में,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

अर्थात् पहली n विषम संख्याओं का योगफल n^2 होता है। इस परिणाम को हम वर्ग संख्याओं का वर्गमूल निकालने के लिए निम्न प्रकार प्रयोग कर सकते हैं :

माने लें कि हमें संख्या n का वर्गमूल ज्ञात करना है। n से हम विषम संख्याओं 1, 3, 5, ... को उत्तरोत्तर एक-एक करके घटाते हैं। यदि n एक पूर्ण वर्ग संख्या है, तो इस प्रक्रिया में हमें कहीं शून्य अवश्य प्राप्त होगा। जितनी बार घटाने के पश्चात् शून्य प्राप्त होता है, वह संख्या ही n का वर्गमूल होती है। उदाहरण के लिए, 49 ($= 7^2$) लें। अब,

(i) $49 - 1 = 48$, (ii) $48 - 3 = 45$, (iii) $45 - 5 = 40$, (iv) $40 - 7 = 33$,

(v) $33 - 9 = 24$, (vi) $24 - 11 = 13$, (vii) $13 - 13 = 0$

यहाँ घटाने की प्रक्रिया 7 बार की गई है। अतः, $\sqrt{49} = 7$ है।

वर्गमूल ज्ञात करने की यह सरलतम विधि है तथा छोटी संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए सुविधाजनक है। लेकिन, बड़ी संख्याओं के लिए यह एक धीमी तथा लंबी प्रक्रिया है। इनके वर्गमूल निकालने के लिए हमारे पास अधिक प्रभावी विधियाँ विद्यमान हैं।

1.6 वर्गमूल ज्ञात करने की अभाज्य गुणनखंडन विधि

निम्नलिखित गुणनखंडनों पर विचार करें :

$6 = 2 \times 3$	$6^2 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$8^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^2 = (2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3) = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

हम देखते हैं कि,

(i) यदि p संख्या n का एक अभाज्य गुणनखंड है, तो $p \times p$ संख्या n^2 का एक गुणनखंड है।

(ii) यदि p एक अभाज्य संख्या है और $p \times p, n^2$ का एक गुणनखंड है, तो p, n का एक गुणनखंड है।

(iii) n^2 के अभाज्य गुणनखंडों के ऐसे युग्म बनाए जा सकते हैं जिनमें प्रत्येक युग्म के दोंनों गुणनखंड समान हों।

इस प्रकार किसी वर्ग संख्या n का वर्गमूल प्राप्त करने की प्रक्रिया निम्न चरणों में की जा सकती है :

(i) n का अभाज्य गुणनखंड लिखिए। गुणनखंडों के युग्म इस प्रकार बनाइए कि प्रत्येक युग्म में अभाज्य गुणनखंड समान हों।

(ii) प्रत्येक युग्म से एक अभाज्य गुणनखंड का चयन कर इन सभी अभाज्य गुणनखंडों को गुणा कीजिए।

(iii) ऊपर (ii) में प्राप्त गुणनफल ही n का वर्गमूल है।

उदाहरण 2 : 8100 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $8100 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{5 \times 5}$

$\therefore \sqrt{8100} = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

2	8100
2	4050
3	2025
3	675
3	225
3	75
5	25
	5

उदाहरण 3 : क्या 2352 एक पूर्ण वर्ग संख्या है? यदि नहीं, तो वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 2352 को गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाए। नई संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
	7

हल : $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

यहाँ हम देखते हैं कि अभाज्य संख्या 3 युग्म रूप में उपस्थित नहीं है। अतः, 2352 पूर्ण वर्ग नहीं है। यदि इस संख्या को हम 3 से गुणा करें, तो

$2352 \times 3 = 7056 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$

यहाँ प्रत्येक अभाज्य संख्या युग्म रूप में उपस्थित है।

अतः, $2352 \times 3 = 7056$ एक पूर्ण वर्ग संख्या है। इस प्रकार, अभीष्ट लघुतम संख्या 3 है। साथ ही, अभीष्ट वर्गमूल है :

$\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

उदाहरण 4 : वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 9408 को विभाजित करने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो। भागफल का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

हल : $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

यदि हम 9408 को 3 से विभाजित करें, तो

$9408 \div 3 = 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$, जो एक पूर्ण वर्ग है। अतः, अभीष्ट संख्या 3 है तथा अभीष्ट वर्गमूल है :

$\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं हैं?

   (i) 81 (ii) 92 (iii) 121 (iv) 132

2. जाँच की जिए कि क्या निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण दूसरी घात हैं?

   (i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441

3. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूलों के संभावित इकाई-अंक लिखिए। किन संख्याओं के वर्गमूल विषम हैं?

   (i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025

4. उत्तरोत्तर व्यवकलन (घटाने) द्वारा 121 व 169 के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

5. अभाज्य गुणनखंडन द्वारा निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए:

   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096

6. निम्नलिखित सख्याओं के अभाज्य गुणनखंड लिखिए और फिर इनके वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) 7744 (ii) 9604 (iii) 5929 (iv) 7056

7. निम्नलिखित सख्याओं की पूर्ण दूसरी घात के लिए जाँच कीजिए। यदि उत्तर हाँ में है, तो उनके वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) 1936 (ii) 8281

8. निम्नलिखित सख्याओं में से प्रत्येक के लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे गुणा करने पर एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए :

   (i) 180 (ii) 1458 (iii) 1200 (iv) 1008 (v) 2028

9. निम्नलिखित में से प्रत्येक संख्या के लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे विभाजित करने पर एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

   (i) 180 (ii) 3645 (iii) 2800 (iv) 45056

10. एक विद्यालय की कक्षा 8 के विद्यार्थियों ने प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष के लिए 2401 रु एकत्रित किए। यदि प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा दान दिए गए रुपयों की संख्या कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या के बराबर हो, तो कक्षा में कुल कितने विद्यार्थी हैं?

11. एक शारीरिक व्यायाम शिक्षक 6000 विद्यार्थियों में से अधिकतम विद्यार्थियों को मैदान में इस प्रकार व्यवस्थित करना चाहते हैं कि पंक्तियों व स्तंभों की संख्या समान रहे। यदि इस प्रकार व्यवस्थित करने के उपरांत 71 विद्यार्थी शेष बच जाते हैं, तो पंक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

1.7 वर्गमूल ज्ञात करने की विभाजन विधि

वर्गमूल ज्ञात करने की अभाज्य गुणनखंड विधि तभी तक प्रभावी होती है जब तक संख्या के अभाज्य गुणनखंड छोटे होते हैं बड़े गुणनखंडों की दशा में यह प्रक्रिया कठिन तथा लंबी हो जाती है। इस कठिनाई से बचने के लिए, हम एक वैकल्पिक विधि, जिसे *विभाजन विधि* कहते हैं, का प्रयोग करते हैं। इसके लिए यह जानना आवश्यक होता है कि दी गई पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल में कितने अंक होंगे।

हम जानते हैं कि

$1^2 = 1, 9^2 = 81$ तथा $10^2 = 100$

इस प्रकार, एकअंकीय संख्या का वर्ग अधिकतम दो अंकों की संख्या है। चूँकि तीन अंकों की लघुतम संख्या 100 है और इसका वर्गमूल 10, दो अंकों की संख्या है, अतः एक अथवा दो अंकों की (पूर्ण वर्ग) संख्याओं का वर्गमूल एकअंकीय संख्या होता है।

इसी प्रकार, $10^2 = 100, 99^2 = 9801$ तथा $100^2 = 10000$ से स्पष्ट है कि यदि वर्ग संख्या में तीन अथवा चार अंक हैं, तो इसके वर्गमूल में दो अंक होंगे। पाँच अथवा छः अंकों की वर्ग संख्या का वर्गमूल तीनअंकीय होगा, आदि।

किसी वर्ग संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या जानने की एक सरल विधि यह है कि इकाई-अंक से प्रारंभ कर संख्या के अंकों के युग्म बनाते हैं और प्रत्येक युग्म के ऊपर एक दंड (bar) बनाते हैं। यदि संख्या n के अंकों की संख्या विषम है, तो अंतिम बचे एक अंक पर भी दंड लगाते हैं। इन दंडों की संख्या ही n के वर्गमूल में अंकों की संख्या होती है। उदाहरण के लिए, यदि $n = 256$ है, तो $\sqrt{n}$ में दो अंक होंगे, क्योंकि यहाँ दो दंड $(\overline{2}\ \overline{56})$ हैं। इसी प्रकार, 783225 के वर्गमूल में तीन अंक होंगे, क्योंकि यहाँ तीन दंड हैं $(\overline{78}\ \overline{32}\ \overline{25})$।

विभाजन विधि को हम एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे। मान लें कि यहाँ वर्ग संख्या 531441 है।

चरण 1 : इकाई के अंक से आरंभ कर अंकों के प्रत्येक युग्म पर एक दंड लगाते हैं।

$\overline{53}\,\overline{14}\,\overline{41}$

चरण 2 : वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात करें जिसका वर्ग सबसे बाईं ओर के दंड के नीचे लिखी संख्या से छोटा या उसके बराबर हो। ($7^2 < 53 < 8^2$)। इस संख्या को भाजक तथा सबसे बाईं ओर के दंड

$$\begin{array}{r|l} & \mathbf{7} \\ \hline 7 & \overline{\mathbf{53}}\,\overline{14}\,\overline{41} \\ & \mathbf{49} \\ \hline & \mathbf{4} \end{array}$$

के नीचे वाली संख्या को भाज्य मानकर शेषफल प्राप्त करें (ध्यान दें कि इस चरण में भाजक तथा भागफल समान हैं)।

```
    | 7
 7  | 53 14 41
    | 49
    | 4 14
```

चरण 3 : शेषफल के दाईं ओर अगले दंड के नीचे वाली संख्या उतारते हैं। इस प्रकार प्राप्त संख्या नया भाज्य है।

चरण 4 : भागफल को दुगुना करें तथा इसके दाईं ओर, एक रिक्त स्थान नए संभावित भाजक के अगले संभावित अंक के लिए छोड़ते हुए लिखें।

```
     | 7
  7  | 53 14 41
     | 49
14 – | 4 14
```

चरण 5 : इस रिक्त स्थान को भरने के लिए बड़े-से-बड़े अंक की खोज इस प्रकार करें कि यह अंक भागफल का अगला अंक बन सके।

$(142 \times 2 = 284 < 414,\ 143 \times 3 = 429 > 414)$

अब विभाजन की क्रिया कर शेषफल प्राप्त करें।

```
    | 72
  7 | 53 14 41
    | 49
142 | 414
    | 284
    | 130
```

चरण 6 : अगले दंड के नीचे वाली संख्या को नए शेषफल के दाईं ओर उतारें।

```
    | 72
  7 | 53 14 41
    | 49
142 | 414
    | 284
    | 13041
```

चरण 7 : चरण 4, 5 व 6 को तब तक दोहराएँ जब तक सभी दंडों पर क्रिया पूरी न हो जाए। अंतिम भागफल ही वर्गमूल है।

अत: $\sqrt{531441} = 729$

```
     | 729
   7 | 53 14 41
     | 49
 142 | 414
     | 284
1449 | 13041
     | 13041
     | 0
```

टिप्पणी : चरण 5 में संख्या 14 के बाद अंक 2 ज्ञात करने के लिए हम $41 \div 14$ पर विचार करते हैं। इसी प्रकार, चरण 7 में 144 के बाद 9 के लिए हम $1304 \div 144$ या $130 \div 14$ पर विचार करते हैं। यहाँ वर्गमूल का इकाई अंक 9 है। इसे ज्ञात करने के लिए हम वर्ग संख्या के इकाई अंक पर भी विचार कर सकते हैं। यहाँ वर्ग संख्या 531441 है और इसका इकाई अंक 1 है। अत: वर्गमूल का इकाई अंक केवल 1 या 9 ही हो सकता है। चूँकि 1 को आसानी से जाँच कर छोड़ा जा सकता है, अत: अभीष्ट अंक 9 ही हो सकता है।

उदाहरण 5 : संख्या 363609 का वर्गमूल निकालिए।

हल :

```
     | 603
-----|--------
   6 | 36 36 09
     | 36
-----|--------
 120 | 0 36
     | 0 00
-----|--------
1203 |   3609
     |   3609
     |--------
     |      0
```

$\therefore \quad \sqrt{363609} = 603$

टिप्पणी : यहाँ हम $03 \div 12$ पर विचार कर 12 के बाद शून्य प्राप्त करते हैं। 120 के बाद हम 3 पर विचार करते हैं, क्योंकि वर्ग संख्या का इकाई अंक 9 है। (वैसे हम $360 \div 120$ से भी 3 प्राप्त कर सकते हैं)।

यद्यपि यह विधि बड़ी संख्याओं के लिए अधिक उपयुक्त है, परंतु इस विधि से छोटी, तीन या चार अंकों की संख्याओं के वर्गमूल भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 529 (ii) 1296

हल : (i)

```
   | 23
---|-----
 2 | 5 29
   | 4
---|-----
43 | 129
   | 129
   |-----
   |   0
```

$\therefore \quad \sqrt{529} = 23$

(ii)

```
   | 36
---|-----
 3 | 12 96
   | 9
---|-----
66 | 396
   | 396
   |-----
   |   0
```

$\therefore \quad \sqrt{1296} = 36$

उदाहरण 7 : वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 893304 में से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो जाए।

हल:

```
     | 945
-----|---------
   9 | 89 33 04
     | 81
-----|---------
 184 |  833
     |  736
-----|---------
1885 |   9704
     |   9425
     |---------
     |    279
```

अत: यदि 893304 में से 279 घटा दिया जाए, तो प्राप्त संख्या एक पूर्ण वर्ग होगी तथा इसका वर्गमूल 945 होगा।

उदाहरण 8 : वह लघुतम संख्या ज्ञात करें जिसे 893304 में जोड़ने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो जाए।

हल : उपर्युक्त उदाहरण की भाँति हम देखते हैं कि $893304 > 945^2$। अगली पूर्ण वर्ग संख्या 946^2 अर्थात् 894916 है। अत:, जोड़े जाने वाली लघुतम संख्या है: 894916 – 893304 अर्थात् 1612।

चार अंकों तक की वर्ग संख्याओं का वर्गमूल बिना विभाजन द्वारा निम्नलिखित तीन चरणों में ज्ञात किया जा सकता है।

चरण 1 : वह बड़े-से-बड़ा अंक ज्ञात करें जिसका वर्ग सबसे बाईं ओर के दंड के नीचे वाली संख्या के बराबर या उससे छोटा है। यह वर्गमूल का दहाई अंक है।

चरण 2 : अनुच्छेद 1.5 में दी गई सारणी की सहायता से वर्गमूल के संभावित इकाई अंक का अनुमान करें। इकाई अंक 1 या 9 है।

चरण 3 : संभावित अंकों से वर्गमूल बनाकर तथा वर्ग कर सही अंक प्राप्त करें।

स्पष्टीकरण :

$\sqrt{\overline{98}\ \overline{01}} = ?$

$\because \quad 9^2 = 81$

यह सबसे बड़ा वर्ग ≤ 98

$\therefore \quad \sqrt{\overline{98}\ \overline{01}} = 9\square$

तथा इकाई अंक 1 अथवा 9 है।

$91^2 = 8281 \neq 9801$

$\therefore \quad \sqrt{9801} = 99$

उदारहण 9 : वर्गमूल ज्ञात करें :

(i) 256 (ii) 6561

हल : (i) दंड लगाने पर हमें प्राप्त होता है: $\bar{2}\,\overline{56}$। अत: दहाई अंक 1 है। वर्गमूल का संभावित इकाई अंक 4 अथवा 6 है। अत: वर्गमूल 14 अथवा 16 है।

अब $14^2 = 196 \neq 256$

अत: $\sqrt{256} = 16$

(ii) $\sqrt{6561} = 81$ या 89

चूँकि 6561, 8100 ($= 90^2$) की अपेक्षा 6400 ($= 80^2$) के अधिक निकट है, अत: $\sqrt{6561}$, 90 की अपेक्षा 80 के अधिक निकट है।

$\therefore \quad \sqrt{6561} = 81$

प्रश्नावली 1.4

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूलों में अंकों की संख्याएँ बताइए :

   (i) 64 (ii) 144 (iii) 4489 (iv) 27225 (v) 390625

2. किसी संख्या के इकाई अंक पर एक बिंदु लगाएँ। अब एक-एक अंक छोड़कर बिंदु लगाते जाएँ। इस प्रकार प्राप्त बिंदुओं की संख्या ही संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या होती है। इस विधि द्वारा निम्न संख्याओं के वर्गमूलों में अंकों की संख्याएँ बताइए :

   (i) 1234321 (ii) 21224449 (iii) 3915380329

3. विभाजन विधि द्वारा निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) 44100 (ii) 27225 (iii) 54756 (iv) 49284 (v) 99856

4. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल विभाजन विधि से प्राप्त कीजिए :

   (i) 390625 (ii) 119025 (iii) 193600

5. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल उनके इकाई व दहाई के अंक ज्ञात कर प्राप्त करें :

   (i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481 (iv) 529

6. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल निकालिए :

   (i) 1444 (ii) 1849 (iii) 5776 (iv) 7921

7. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक के लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे संख्या में से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो जाए :

   (i) 2361 (ii) 4931 (iii) 18265 (iv) 390700

8. प्रश्न 7 की प्रत्येक संख्या के लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे संख्या में जोड़ने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो जाए।

1.8 परिमेय संख्या का वर्गमूल

पूर्ण वर्ग 25 व 36 पर विचार करें।

$\sqrt{25 \times 36} = \sqrt{5^2 \times 6^2}$

$= \sqrt{(5 \times 6)^2}$, चूँकि हम जानते हैं कि पूर्णांकों a व b के लिए $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$

$= 5 \times 6$

$= \sqrt{25} \times \sqrt{36}$

वस्तुतः पूर्ण वर्ग संख्याओं के लिए निम्न नियम लागू होता है :

नियम 1 : दो पूर्ण वर्ग संख्याओं m व n के लिए,

$$\sqrt{m \times n} = \sqrt{m} \times \sqrt{n}$$

बड़ी संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने के लिए यह नियम बहुत सहायक है।

उदाहरण 10 : संख्या 38416 का वर्गमूल निकालिए।

हल : $38416 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 2^4 \times 7^4$

$\therefore \sqrt{38416} = \sqrt{2^4 \times 7^4}$

$= \sqrt{2^4} \times \sqrt{7^4}$ (नियम 1 के द्वारा)

$= 2^2 \times 7^2$

$= 196$

उदाहरण 11 : $\sqrt{\frac{25}{36}}$ और $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$ ज्ञात करें। क्या ये बराबर हैं?

हल : $\sqrt{\frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{5^2}{6^2}}$

$= \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2}$, चूँकि $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, b \neq 0$

$= \frac{5}{6}$

साथ ही, $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$

अतः, $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$

उपर्युक्त उदाहरण वास्तव में अग्रलिखित नियम का दृष्टांत है :

नियम 2 : यदि m व n पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं (तथा $n \neq 0$) है, तो

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

उदाहरण 12 : $\frac{225}{3136}$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

हल : $\sqrt{225} = \sqrt{3 \times 3 \times 5 \times 5}$

$= 3 \times 5 = 15$ और

$\sqrt{3136} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 7$

$= 56$

$\therefore \quad \sqrt{\frac{225}{3136}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{3136}}$ (नियम 2 द्वारा)

$= \frac{15}{56}$

उदाहरण 13 : निम्नलिखित का वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $4\frac{29}{49}$ (ii) 0.0196

हल : (i) $\sqrt{4\frac{29}{49}} = \sqrt{\frac{225}{49}}$

$= \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{49}}$ (नियम 2 द्वारा)

$$= \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$$

(ii) $\sqrt{0.0196} = \sqrt{\frac{196}{10000}}$

$$= \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{10000}} \quad \text{(नियम 2 द्वारा)}$$

$$= \frac{\sqrt{2 \times 2 \times 7 \times 7}}{\sqrt{100 \times 100}}$$

$$= \frac{2 \times 7}{100} = 0.14$$

उदाहरण 14 : संख्या $21\frac{2797}{3364}$ का वर्गमूल निकालिए।

हल : $\sqrt{21\frac{2797}{3364}} = \sqrt{\frac{73441}{3364}} = \frac{\sqrt{73441}}{\sqrt{3364}}$ (नियम 2 द्वारा)

अब $\sqrt{73441} = 271$ तथा

$\sqrt{3364} = 58$

अतः $\sqrt{21\frac{2797}{3364}} = \frac{271}{58}$

$= 4\frac{39}{58}$

	271
2	$\overline{7}\ \overline{34}\ \overline{41}$
	4
47	334
	329
541	541
	541
	0

	58
5	$\overline{33}\ \overline{64}$
	25
108	864
	864
	0

उदाहरण 15 : 37.0881 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल : हम 37.0881 को परिमेय संख्या के रूप में परिवर्तित कर गुणनखंडन अथवा विभाजन विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

इस प्रकार, $\sqrt{37.0881} = \sqrt{\frac{370881}{10000}}$

लेकिन $\sqrt{370881} = 609$

तथा $\sqrt{10000} = 100$

	609
6	$\overline{37}\ \overline{08}\ \overline{81}$
	36
120	108
	0
1209	10881
	10881
	0

अतः, $\sqrt{37.0881} = \frac{609}{100}$

$= 6.09$

1.9 एक (पूर्ण वर्ग) दशमलव संख्या का वर्गमूल

किसी दशमलव संख्या को परिमेय संख्या के रूप में बदले बिना भी हम इसका वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं। यह प्रक्रिया इस प्रकार की जाती है :

1. दशमलव संख्या के पूर्णांकीय भाग में सामान्य रीति से दंड खींचिए।
2. दशमलव भाग में प्रथम दशमलव स्थान से आरंभ कर अंकों के प्रत्येक युग्म पर दंड लगाइए।
3. अब सामान्य विभाजन विधि से वर्गमूल निकालना आरंभ कीजिए।
4. जैसे ही पूर्णांकीय भाग समाप्त हो, भागफल में दशमलव बिंदु स्थापित कर दीजिए।
5. शून्य शेषफल प्राप्त होते ही प्रक्रिया रोक दीजिए। इस स्थिति में, भागफल ही संख्या का वर्गमूल है।

उदाहरण 16 : 37.0881 का वर्गमूल विभाजन विधि से ज्ञात करें।

हल :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6.09 \\ \hline
6 & \overline{37}.\,\overline{08}\,\overline{81} \\
 & 36 \\ \hline
120 & 108 \\
 & 0 \\ \hline
1209 & 10881 \\
 & 10881 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore \quad \sqrt{37.0881} = 6.09$

उदाहरण 17 : 0.000529 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.023 \\ \hline
2 & \bar{0}.\,\overline{00}\,\overline{05}\,\overline{29} \\
 & 04 \\ \hline
43 & 129 \\
 & 129 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore \qquad \sqrt{0.000529} = 0.023$

टिप्पणी : इस उदाहरण में पूर्णांकीय भाग शून्य है। अत: वर्गमूल का पूर्णांकीय भाग भी शून्य ही होगा। दशमलव बिंदु के बाद पहला युग्म 00 है। अत: वर्गमूल में भी दशमलव बिंदु के बाद पहला अंक शून्य ही होगा। शेष प्रक्रिया सामान्य है।

1.10 विभाजन विधि द्वारा वर्गमूल का सन्निकट मान

हम जानते हैं कि ऐसे दो पूर्णांकों p व q का चयन असंभव है जिनके लिए $p^2 = 2q^2$ या $2 = \frac{p^2}{q^2}$ हो। दूसरे शब्दों में, ऐसी कोई परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ नहीं होती जिसके लिए $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ हो। अर्थात् $\sqrt{2}$ की सटीक परिकलन कर पाना असंभव है। ऐसी स्थिति में जहाँ किसी व्यंजक का सटीक मान ज्ञात करना संभव नहीं होता, हम उसका सन्निकट मान प्राप्त करते हैं। वर्तमान स्थिति में हम कोई ऐसी परिमेय या दशमलव संख्या प्राप्त करने का प्रयास करेंगे जो $\sqrt{2}$ का कोई सन्निकट मान दे।

चूँकि $\qquad 1^2 < 2 < 2^2$

अत:, $\qquad 1 < \sqrt{2} < 2$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि $\sqrt{2}$ का एक परिमेय सन्निकट मान 1 है। अधिक सन्निकट मान प्राप्त करने के लिए, हम 1 तथा 2 के म ध्य स्थित संख्याओं 1.1, 1.2 .....1.9, के वर्गों का परिकलन कर, वर्गों की 2 से तुलना करते हैं।

$$1.1^2 = 1.21 < 2$$
$$1.2^2 = 1.44 < 2$$
$$1.3^2 = 1.69 < 2$$
$$1.4^2 = 1.96 < 2$$
$$1.5^2 = 2.25 > 2$$

अत:, $\qquad (1.4)^2 < 2 < (1.5)^2$

अर्थात्, $\qquad 1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

इस प्रकार, दशमलव संख्या 1.4 को $\sqrt{2}$ का सन्निकट मान लिया जा सकता है। यह मान 1 की अपेक्षा अधिक सन्निकट है। और अधिक सन्निकट मानों के लिए संख्याओं 1.41, 1.42,

..., 1.49, के वर्गों का परिकलन कर तथा 2 से इन वर्गों की तुलना कर हम देख सकते हैं कि

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

इसी प्रक्रिया को आगे बढ़ाकर हम देखते हैं कि

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$

यहाँ हम यह भी देखते हैं कि दशमलव के एक स्थान तक $1.4 = \sqrt{2}$, दशमलव के दो स्थान तक $1.41 = \sqrt{2}$, आदि। यह प्रक्रिया जहाँ तक चाहें वहाँ तक बढ़ाई जा सकती है और इस प्रकार $\sqrt{2}$ का मान दशमलव के किसी भी वांछित स्थान तक ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रकार के मान प्राप्त करने की एक सुविधाजनक विधि विभाजन की है। इसमें हम वर्गमूल निकालने से पूर्व दशमलव भाग के दाईं ओर आवश्यक शून्य जोड़ लेते हैं। इस विधि को हम उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 18 : दशमलव के दो स्थानों तक $\sqrt{2}$ का शुद्ध मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{2}$ का मान दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध निकालने के लिए, हम तीन दशमलव स्थानों वाली ऐसी संख्या ज्ञात करते हैं जो $\sqrt{2}$ का सन्निकट मान दे। इसके लिए हम दशमलव बिंदु के दाईं ओर शून्यों के तीन युग्म, अर्थात् छः शून्य लगाते हैं।

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1.414 \\ \hline 1 & \overline{2}.\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{00} \\ & 1 \\ \hline 24 & 100 \\ & \;\;96 \\ \hline 281 & \;\;\;400 \\ & \;\;\;281 \\ \hline 2824 & \;\;\;11900 \\ & \;\;\;11296 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;604 \end{array}$$

अतः $\sqrt{2}$ = 1.414, दशमलव के तीन स्थानों तक

= 1.41 दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध

इस प्रकार 2 का वांछित वर्गमूल 1.41 है।

उदाहरण 19 : 2.9 का वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम $\sqrt{2.9}$ का सन्निकट मान तीन दशमलव स्थानों तक ज्ञात करते हैं। इसके लिए दशमलव बिंदु से आगे तीन युग्म बनाने के लिए 9 के बाद पाँच शून्य जोड़ते हैं।

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1.702 \\ \hline 1 & \overline{2}.\overline{90}\,\overline{00}\,\overline{00} \\ & 1 \\ \hline 27 & 190 \\ & 189 \\ \hline 3402 & \;\;\;10000 \\ & \;\;\;\;\;6804 \\ \hline & \;\;\;\;\;3196 \end{array}$$

इस प्रकार, $\sqrt{2.9}$ = 1.702, दशमलव के तीन स्थानों तक

= 1.70, दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध

इस प्रकार, वांछित वर्गमूल 1.70 है।

उदाहरण 20 : $11\frac{2}{3}$ का वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए।

हल : $11\frac{2}{3} = 11.666666...$

$= 11.666667$, दशमलव के 6 स्थानों तक शुद्ध

$\therefore \quad \sqrt{11\frac{2}{3}} = \sqrt{11.666667}$

हम निम्न प्रकार वर्गमूल प्राप्त करते हैं :

```
     | 3.415
-----|-----------------
   3 | 11. 66 66 67
     |  9
     |----
  64 |  266
     |  256
     |------
 681 |   1066
     |    681
     |-------
6825 |    38567
     |    34125
     |    -----
     |     4442
```

$\therefore \quad \sqrt{11\frac{2}{3}} = 3.415$, दशमलव के 3 स्थानों तक

$= 3.42$, दशमलव के 2 स्थानों तक शुद्ध

टिप्पणी : $\sqrt{11\frac{2}{3}}$ अर्थात् $\sqrt{\frac{35}{3}}$ का मान हम हर को करणीमुक्त कर भी प्राप्त कर सकते हैं।

$$\sqrt{\frac{35}{3}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{105}}{3}$$

विभाजन विधि द्वारा,

$\sqrt{105} = 10.246$, दशमलव के 3 स्थानों तक

$\therefore \quad \sqrt{\frac{35}{3}} = \frac{\sqrt{105}}{3} = \frac{10.246}{3}$, दशमलव के 3 स्थानों तक

$= 3.415$, दशमलव के 3 स्थानों तक

$= 3.42$, दशमलव के 2 स्थानों तक शुद्ध

प्रश्नावली 1.5

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{361}{625}$ (ii) $\frac{2116}{15129}$

2. वर्गमूल ज्ञात करें:

(i) $\frac{16641}{4489}$ (ii) $\frac{110889}{308025}$

3. निम्नलिखित मिश्रित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $21\frac{51}{169}$ (ii) $10\frac{151}{225}$

4. वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $23\frac{394}{729}$ (ii) $56\frac{569}{1225}$

5. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 7.29 (ii) 16.81 (iii) 9.3025 (iv) 84.8241

6. वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 0.008281 (ii) 0.053361

7. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए :

(i) 1.7 (ii) 23.1 (iii) 5 (iv) 20 (v) 0.1

8. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए :

(i) 0.016 (ii) 0.9 (iii) 7 (iv) $\frac{7}{8}$ (v) $2\frac{1}{12}$

9. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए :

(i) 0.00064 (ii) $\frac{5}{12}$ (iii) 2.006 (iv) 1.1

10. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए :

(i) $\sqrt{0.9} = 0.3$

(ii) यदि a एक प्राकृत संख्या है, तो $\sqrt{a}$ एक परिमेय संख्या है।

(iii) यदि a ऋणात्मक है, तो a^2 भी ऋणात्मक है।

(iv) यदि p व q पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं, तो $\sqrt{\frac{p}{q}}$ एक परिमेय संख्या है।

(v) किसी अभाज्य संख्या का वर्गमूल सन्निकट ही प्राप्त किया जा सकता है, शुद्ध नहीं।

याद रखने योग्य बातें

1. संख्या n एक पूर्ण वर्ग है, यदि किसी पूर्णांक m के लिए $n = m^2$ है।
2. एक पूर्ण वर्ग संख्या कभी भी ऋणात्मक नहीं होती।
3. एक पूर्ण वर्ग संख्या का अंत अंकों 2, 3, 7 या 8 में नहीं होता।
4. किसी पूर्ण वर्ग के अंत में शून्यों की संख्या सदैव सम होती है।
5. सम (विषम) संख्या का वर्ग सम (विषम) संख्या ही होती है।
6. पूर्ण वर्ग संख्या को 3 से भाग देने पर शेषफल 0 (शून्य) अथवा 1 ही बचता है।
7. ऐसी कोई भी दो प्राकृत संख्याएँ p और q नहीं होतीं जिनके लिए $p^2 = 2q^2$ हो।
8. संख्या m, n का वर्गमूल होती है, यदि $n = m \times m = m^2$ हो। n के धनात्मक वर्गमूल को $\sqrt{n}$ लिखते हैं।
9. यदि p व q दो पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं तथा $q \neq 0$ है, तो

   (i) $\sqrt{p \times q} = \sqrt{p} \times \sqrt{q}$ (ii) $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$
10. एक पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल उस वर्ग संख्या के अभाज्य गुणनखंडन द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।
11. एक पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल विभाजन विधि द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है।
12. विभाजन के लिए युग्म बनाने की प्रक्रिया दशमलव बिंदु से प्रारंभ होती है। पूर्णांकीय भाग के लिए युग्म दाईं ओर से बाईं ओर तथा दशमलव भाग के लिए बाईं ओर से दाईं ओर बनाए जाते हैं।
13. यदि कोई धनात्मक संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है, तो इसके वर्गमूल का सन्निकट मान विभाजन विधि द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।
14. यदि p व q पूर्ण वर्ग नहीं है, तो $\sqrt{\frac{p}{q}}$ का मान ज्ञात करने के लिए $\frac{p}{q}$ को दशमलव संख्या के रूप में रखकर विभाजन विधि अपनाते हैं।
15. $\sqrt{\frac{p}{q}}$ का मान हर को करणीमुक्त बनाकर भी ज्ञात किया जा सकता है।
16. यदि n एक पूर्ण वर्ग नहीं है, तो $\sqrt{n}$ परिमेय संख्या नहीं हो सकती।

अध्याय

घन एवं घनमूल

2.1 भूमिका

जिस प्रकार अध्याय 1 में हमने वर्ग तथा वर्गमूल के बारे में अध्ययन किया, उसी प्रकार इस अध्याय में हम घन तथा घनमूल के बारे में अध्ययन करेंगे। पहले हम पूर्ण घन संख्याओं के कुछ गुणों की चर्चा करेंगे। फिर हम पूर्ण घन संख्याओं के प्रतिरूपों के बारे में चर्चा करेंगे जिससे हमें छोटी पूर्ण घन संख्याओं का घनमूल ज्ञात करने में सहायता मिलेगी। संख्याओं के इकाई के अंकों तथा उनके घनों के इकाई के अंकों के मध्य जो संबंध होता है उसके आधार पर हम एक पूर्ण घन के घनमूल ज्ञात करने की एक विधि पर चर्चा करेंगे। यह विधि छः अंकों तक की पूर्ण घन संख्याओं का घनमूल ज्ञात करने के लिए उपयुक्त है। इस विधि का लाभ यह है कि इसमें बहुत कम और सरल परिकलन होते हैं। इसके पश्चात् हम अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा घनमूल ज्ञात करना सीखेंगे। वर्गमूल के समान ही विभाजन द्वारा घनमूल ज्ञात करने की विधि भी होती है, परंतु हम यहाँ उसकी चर्चा नहीं करेंगे। यह विधि थोड़ी कठिन तथा इस पुस्तक के विषय क्षेत्र से बाहर है।

2.2 संख्या का घन व पूर्ण घन संख्याएँ

हम जानते हैं कि यदि x एक शून्येतर संख्या है तो $x \times x \times x$ को, जिसे x^3 के रूप में लिखते हैं, *x का घन (cube)* या केवल *x घन* कहलाता है। इस प्रकार, 8 $(= 2 \times 2 \times 2)$, 2 का घन या 2 घन है तथा 27 $(= 3 \times 3 \times 3)$, 3 का घन या 3 घन है। सारणी 2.1 में एक अंकीय प्राकृत संख्याओं के घन दिए गए हैं।

सारणी 2.1 : *अंक 1 से 9 तक के घन*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729

1, 8, 27, ..., 729 में से प्रत्येक संख्या किसी न किसी पूर्णांक का घन है। इस प्रकार की संख्याएँ पूर्ण घन (perfect cubes) या पूर्ण तीसरी घात (perfect third powers) कहलाती हैं।

यदि किसी पूर्णांक m के लिए $n = m \times m \times m$ है, तो संख्या n एक पूर्ण घन होती है।

पूर्ण घन संख्याएँ बहुत तीव्रता से बढ़ती हैं। जैसे-जैसे m का मान 1 से 9 तक बढ़ता है, वैसे-वैसे पूर्ण घन संख्या m^3 का मान 1 से 729 तक बढ़ता है। घन संख्याओं का फैलाव बहुत अधिक है। संख्या 100 तक मात्र चार संख्याएँ ही पूर्ण घन हैं। इसी प्रकार, 1000 तक मात्र दस संख्याएँ ही पूर्ण घन हैं (क्या आप इसकी जाँच करना चाहते हैं? नोट करें : $10^3 = 1000$)।

किसी दी हुई संख्या के बारे में हम किस प्रकार ज्ञात करें कि वह पूर्ण घन है अथवा नहीं? अभाज्य संख्या p संख्या m को विभाजित करती है, तो $p \times p \times p$ संख्या $m \times m \times m$ अर्थात् m^3 को विभाजित करेगी। *अतः यदि एक अभाज्य संख्या p किसी पूर्ण घन संख्या को विभाजित करती है, तो p^3 भी उस पूर्ण घन संख्या को विभाजित करेगा।* दूसरे शब्दों में, किसी भी पूर्ण घन संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में प्रत्येक अभाज्य संख्या तीन बार अथवा तीन के किसी गुणज बार आती है। उदाहरणार्थ,

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \ (= 2^6)$$

$$27000 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \ (= 2^3 \times 3^3 \times 5^3)$$

इस प्रकार, किसी संख्या के पूर्ण घन होने या न होने की जाँच करने के लिए, हम उसका अभाज्य गुणनखंडन करते हैं तथा समान अभाज्य गुणनखंडों वाले त्रिकों (तीन-तीन के समूह) में समूहित करते हैं। इस समूहन के पश्चात् यदि कोई गुणनखंड शेष नहीं बचता, तो वह संख्या एक पूर्ण घन होती है। परंतु यदि एक या एक समान दो गुणनखंड शेष बचते हैं, तो वह संख्या पूर्ण घन नहीं होती।

उदाहरण 1 : जाँच कीजिए कि क्या (i) 392 तथा (ii) 106480 पूर्ण घन हैं।

हल : (i) $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

यहाँ अभाज्य गुणनखंड 7 त्रिक रूप में समूहित नहीं हैं। अतः, 392 एक पूर्ण घन नहीं है।

(ii) $106480 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 2 \times 5 \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

यहाँ 2 व 5 ऐसे अभाज्य गुणनखंड हैं जो त्रिक रूप में समूहित नहीं हैं। अतः, 106480 एक पूर्ण घन नहीं है।

उदाहरण 2 : जाँच कीजिए कि क्या 53240 एक पूर्ण घन है। यदि नहीं, तो वह छोटी से छोटी (लघुतम) संख्या ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को गुणा करने पर गुणनफ़ल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए। वह लघुतम संख्या भी ज्ञात कीजिए जिससे इस संख्या को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

हल : $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

यहाँ अभाज्य गुणनखंड 5 त्रिक रूप में उपस्थित नहीं है। अत: 53240 एक पूर्ण घन नहीं है। इस संख्या के गुणनखंडन में, 5 एक बार आता है। अत: इस संख्या को 5×5 से गुणा करने पर 5 भी त्रिक रूप में समूहित हो जाता है। अत: $5 \times 5 = 25$ वह लघुतम संख्या है जिससे 53240 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन संख्या प्राप्त होती है।

इसी प्रकार, यदि 53240 को 5 से विभाजित कर दिया जाए, तो प्राप्त भागफल का अभाज्य गुणनखंडन त्रिक में समूहित हो जाता है। वस्तुत: $53240 \div 5 = 10648$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 11 \times 11 \times 11$ अत: इस स्थिति में अभीष्ट लघुतम संख्या 5 है।

टिप्पणी 1 : सारणी 2.1 के अवलोकन से हमें ज्ञात होता है कि इकाई के अंकों 1, 4, 5, 6 व 9 वाली संख्याओं की संगत घन संख्याओं के इकाई के अंक क्रमश: 1, 4, 5, 6 व 9 ही हैं। अंक 2 व 8 एक ऐसा युग्म बनाते हैं जिसमें अंक 2 का घन अंक 8 पर समाप्त होता है तथा अंक 8 का घन अंक 2 पर समाप्त होता है। अंक 3 व 7 भी इसी प्रकार का युग्म बनाते हैं जिसमें एक अंक का घन दूसरे अंक में समाप्त होता है ($3^3 = 2\underline{7}$, $7^3 = 34\underline{3}$)। हम यह भी जानते हैं कि $10^3 = 1000$। अतः, यदि किसी संख्या के अंत में एक शून्य है, तो उस संख्या के घन के अंत में तीन शून्य होंगे। इन प्रेक्षणों से हमें किसी पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करने में सहायता मिलेगी।

2. किसी ऋणात्मक संख्या का घन एक ऋणात्मक संख्या होता है। उदाहरणार्थ,

$$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1 = -1^3$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8 = -2^3$$

$$(-5)^3 = -125 = -5^3, \ (-m)^3 = -m^3$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि ऋणात्मक संख्याएँ पूर्ण घन हो सकती हैं। यह तथ्य पूर्ण वर्ग से भिन्न है। हम जानते हैं कि पूर्ण वर्ग *कभी भी ऋणात्मक नहीं* हो सकते।

2.3 दो-अंकीय संख्या का घन निकालना (एक वैकल्पिक विधि)

किसी संख्या का घन संख्या को तीन बार गुणा कर प्राप्त किया जा सकता है। x^3 का मान ज्ञात करने के लिए पहले हम x^2 ज्ञात करते हैं और फिर $x^2 \times x$। यहाँ हम x^3 ज्ञात करने की एक वैकल्पिक विधि पर चर्चा करेंगे, जहाँ x एक दो-अंकीय संख्या है।

माना $x = ab$ एक दो अंकों वाली संख्या है, जिसमें a दहाई का अंक तथा b इकाई का अंक है। x^2 ज्ञात करने की विधि के समान यहाँ भी हम स्तंभ बनाएँगे। $(ab)^2$ के लिए हमने तीन स्तंभ $a^2 | 2a \times b | b^2$ बनाए थे। $(ab)^3$ के लिए हम चार स्तंभ बनाएँगे। ये चार स्तंभ सर्वसमिका (जिसे हम अध्याय 6 में पढ़ेंगे)

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

में प्रयुक्त चार पदों $a^3, 3a^2b, 3ab^2$ व b^3 के संगत होते हैं। शेष विधि वही है जो वर्ग के लिए प्रयुक्त होती है, अर्थात् योग करने के बाद स्तंभों में इकाई के अंक को रखते हैं तथा दहाई व अन्य अंकों को बाईं ओर के अगले स्तंभ में जोड़ देते हैं। उदाहरणों की सहायता से, हम इस विधि को स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 3 : वैकल्पिक विधि द्वारा 42^3 ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 4$ तथा $b = 2$ है। अत:, चार स्तंभ है :

a^3	$3a^2 \times b$	$3a \times b^2$	b^3
4^3	$3 \times 4^2 \times 2$	$3 \times 4 \times 2^2$	2^3
$= 64$	$= 96$	$= 48$	$= 8$
$+ 10$	$+ 4$		
74	100		
74	0	8	8

$\therefore \quad 42^3 = 74088$

उदाहरण 4 : वैकल्पिक विधि से 87^3 ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 8$ तथा $b = 7$ है। इस स्थिति में, जब a व b के मान छोटे न हों, तो $3a^2 \times b$ व $3a \times b^2$ के परिकलन तुरंत नहीं हो पाएँगे। इस स्थिति में, हम कार्य पद्धति का निम्न प्रकार सरलीकरण कर सकते हैं :

a^2	a^2	b^2	b^2
a	$3b$	$3a$	b
a^3	$3a^2 \times b$	$3a \times b^2$	b^3

, अर्थात्

64	64	49	49
×8	×21	×24	×7
512	1344	1176	343
+146	+121	+ 34	
658	1465	1210	
658	5	0	3

∴ $87^3 = 658503$

उदाहरण 5 : वैकल्पिक विधि से निम्न संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए :

(i) 27 (ii) 45 (iii) 81

हल :(i) 27^3 के लिए, हम प्राप्त करते हैं :

4	4	49	49
2	21	6	7
8	84	294	343
+11	+32	+ 34	
19	116	328	
19	6	8	3

∴ $27^3 = 19683$

(ii) 45^3 के लिए, हम प्राप्त करते हैं :

16	16	25	25
4	15	12	5
64	240	300	125
+27	+ 31	+ 12	
91	271	312	
91	1	2	5

∴ $45^3 = 91125$

(iii) 81^3 के लिए, हम प्राप्त करते हैं :

64	64	1	1
8	3	24	1
512	192	24	1
+19	+2		
531	194		
531	4	4	1

$\therefore \qquad 81^3 = 531441$

प्रश्नावली 2.1

1. निम्न संख्याओं में से प्रत्येक के घन का इकाई का अंक लिखिए :

   31, 109, 388, 833, 4276, 5922, 77774, 44447, 125125125

2. निम्न संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए :

   (i) 35 (ii) 56 (iii) 72 (iv) 402 (v) 650 (vi) 819

3. वैकल्पिक विधि द्वारा निम्न संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए :

   (i) 35 (ii) 56 (iii) 72

4. निम्न संख्याओं में कौन सी संख्याएँ पूर्ण घन नहीं हैं?

   (i) 64 (ii) 216 (iii) 243 (iv) 1728

5. उपर्युक्त प्रश्न 4 में, जो संख्या पूर्ण घन नहीं है उसके लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

6. उपर्युक्त प्रश्न 4 में, जो संख्या पूर्ण घन नहीं है उसके लिए वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे विभाजित करने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

7. संख्या n के तीन भिन्न मानों के लिए निम्न कथनों को सत्यापित करें :

   (i) यदि n एक सम संख्या है, तो n^3 भी एक सम संख्या है।

   (ii) यदि n एक विषम संख्या है, तो n^3 भी एक विषम संख्या है।

(iii) यदि n को 3 से विभाजित करने पर 1 शेष बचता है, तो n^3 को 3 से विभाजित करने पर भी 1 ही शेष बचता है।

(iv) यदि प्राकृत संख्या n का स्वरूप $3p + 2$ के प्रकार का है, तो n^3 भी इसी स्वरूप की संख्या है।

8. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखें :

(i) 392 एक पूर्ण घन संख्या है।

(ii) 8640 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।

(iii) किसी पूर्ण घन संख्या के अंत में मात्र दो शून्य नहीं हो सकते।

(iv) ऐसी कोई पूर्ण घन संख्या नहीं होती जिसका इकाई का अंक 4 है।

(v) किसी पूर्णांक a के लिए, a^3 सदैव a^2 से बड़ा होता है।

(vi) यदि पूर्णांकों a व b के लिए, $a^2 > b^2$ हो, तो $a^3 > b^3$ भी सत्य होगा।

(vii) यदि a, संख्या b को विभाजित करती है, तो a^3 भी संख्या b^3 को विभाजित करेगी।

(viii) यदि a^2 का इकाई का अंक 9 हो, तो a^3 का इकाई का अंक 7 होता है।

(ix) यदि a^2 का अंतिम अंक 5 है, तो a^3 के अंत में 25 होगा।

(x) यदि a^2 के अंत में शून्यों की संख्या सम है, तो a^3 के अंत में शून्यों की संख्या विषम होगी।

2.4 घनमूल

यदि n एक पूर्ण घन है, तो किसी पूर्णांक m के लिए, $n = m^3$ होता है। यह पूर्णांक m पूर्ण घन n का *घनमूल (cube root)* कहलाता है। इस प्रकार, संख्या m, संख्या n का घनमूल है, यदि $m^3 = n$ हो। उदाहरणार्थ,

2 संख्या 8 का घनमूल है, क्योंकि $2^3 = 8$ है।

5 संख्या 125 का घनमूल है, क्योंकि $5^3 = 125$ है।

11 संख्या 1331 का घनमूल है, क्योंकि $11^3 = 1331$ है।

यदि m, संख्या n का घनमूल है, तो हम लिखेंगे $m = \sqrt[3]{n}$ ।

इस प्रकार $2 = \sqrt[3]{8}, 5 = \sqrt[3]{125}$ तथा $11 = \sqrt[3]{1331}$

सारणी 2.2 में, 1000 तक की पूर्ण घन संख्याएँ तथा सारणी 2.3 में, इन संख्याओं के घनमूल दिए गए हैं।

सारणी 2.2

m	m^3
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000

सारणी 2.3

n	$\sqrt[3]{n}$
1	1
8	2
27	3
64	4
125	5
216	6
343	7
512	8
729	9
1000	10

टिप्पणी: घनमूल प्रदर्शित करने के लिए, हम चिह्न '$\sqrt[3]{\ }$' का प्रयोग उसी प्रकार करते हैं जिस प्रकार वर्गमूल के लिए चिह्न '$\sqrt[2]{\ }$' का प्रयोग करते हैं। वर्गमूल के लिए 2 का लोप कर चिह्न '$\sqrt{\ }$' का प्रयोग मात्र सुविधा के लिए किया जाता है। सही अर्थों में हमें '$\sqrt[2]{\ }$' ही लिखना चाहिए। घनमूल लिखने के लिए हम सदैव '$\sqrt[3]{\ }$' का ही प्रयोग करेंगे तथा कभी भी 3 का लोप नहीं करेंगे।

अब हम घनमूल निकालने की कुछ विधियों का वर्णन करेंगे।

2.5 प्रतिरूप द्वारा घनमूल ज्ञात करना

प्राकृत संख्याओं के वर्गों के समान पूर्ण घन संख्याओं के भी कुछ रुचिकर प्रतिरूप होते हैं:

$1^3 = 1 \quad \therefore \quad 1^3 - 0^3 = 1 \quad = 1 + 0 \times 6 = 1 + 1 \times 0 \times 3$

$2^3 = 8 \quad \therefore \quad 2^3 - 1^3 = 7 \quad = 1 + 1 \times 6 = 1 + 2 \times 1 \times 3$

$3^3 = 27 \quad \therefore \quad 3^3 - 2^3 = 19 = 1 + 1 \times 6 + 2 \times 6 = 1 + 3 \times 2 \times 3$

$4^3 = 64 \quad \therefore \quad 4^3 - 3^3 = 37 = 1 + 1 \times 6 + 2 \times 6 + 3 \times 6 = 1 + 4 \times 3 \times 3$

.

.

.

$9^3 = 729 \quad \therefore \quad 9^3 - 8^3 = 217 = 1 + 1 \times 6 + 2 \times 6 + \ldots + 8 \times 6$

$= 1 + 9 \times 8 \times 3$

साथ ही, $1 = 1^3$

$1 + 7 = 2^3$

$1 + 7 + 19 = 3^3$

$1 + 7 + 19 + 37 = 4^3$

.

.

.

$1 + 7 + 19 + \ldots + 217 = 9^3$

ध्यान दीजिए कि 2^3 संख्या क्रम 1, 7, 19, 37, ... में से पहली दो संख्याओं का योग है। इसी प्रकार, $3^3, 4^3, \ldots, 9^3$ इसी संख्या क्रम के क्रमशः पहली तीन, चार, ..., नौ संख्याओं के योग हैं। ये संख्याएँ $1 + n \times (n-1) \times 3$ में $n = 1, 2, 3, \ldots$ रख कर प्राप्त की जा सकती है।

इस प्रकार, किसी पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए, हम उस संख्या में से $1\ (= 1 + 1 \times 0 \times 3), 7\ (= 1 + 2 \times 1 \times 3), 19\ (= 1 + 3 \times 2 \times 3), 37\ (= 1 + 4 \times 3 \times 3)$, आदि क्रमवार घटाते हैं। जितनी बार घटाने पर शून्य प्राप्त हो जाता है वही उस पूर्ण घन संख्या का घनमूल होता है। उदाहरणार्थ,

$$216 - 1 = 215,\ 215 - 7 = 208,\ 208 - 19 = 189,$$

$$189 - 37 = 152,\ 152 - 61 = 91,\ 91 - 91 = 0$$

यहाँ शून्य प्राप्त होने तक छः बार घटाया गया है। अतः, $\sqrt[3]{216} = 6$ है।

छोटी संख्याओं का घनमूल ज्ञात करने के लिए, इस विधि का प्रयोग किया जा सकता है। इस विधि द्वारा वह लघुतम संख्या भी ज्ञात की जा सकती है जिसे किसी पूर्ण घनेतर संख्या में जोड़ने अथवा घटाने से एक पूर्ण घन संख्या प्राप्त हो जाए।

उदाहरण 6 : क्या 400 एक पूर्ण घन संख्या है? यदि नहीं, तो वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 400 में से घटाने पर एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

हल : $400 - 1 = 399$, $399 - 7 = 392$, $392 - 19 = 373$, $373 - 37 = 336$,
$336 - 61 = 275$, $275 - 91 = 184$, $184 - 127 = 57$

घटाने के लिए अनुक्रम में अगली संख्या 169 है जो 57 से बड़ी है। इस प्रकार घटाने की इस प्रक्रिया में शून्य प्राप्त नहीं होता। अतः 400 पूर्ण घन नहीं है। यदि 400 में से 57 घटा दिया जाए, तो सात बार घटाने पर शून्य प्राप्त होगा। इस प्रकार, $400 - 57 = 7^3$। अतः, अभीष्ट संख्या 57 (तथा 343 परिणामी पूर्ण घन) है।

इसी प्रकार, यदि 400 में 112 जोड़ दिया जाए, तो प्राप्त योग 512 एक पूर्ण घन है। (क्यों?)

2.6 इकाई के अंक द्वारा घनमूल ज्ञात करना

अब हम एक विधि बताएँगे जिसके द्वारा छः अंकों तक की किसी भी पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात किया जा सकता है। सारणी 2.2 के अवलोकन से हमें ज्ञात होता है कि 0, 1, 4, 5, 6 व 9 पर समाप्त होने वाली संख्याओं के घन भी क्रमशः 0, 1, 4, 5, 6 व 9 पर समाप्त होते हैं। परंतु 2 पर समाप्त होने वाली संख्या का घन 8 पर तथा 8 पर समाप्त होने वाली संख्या का घन 2 पर समाप्त होता है। इसी प्रकार, 3 या 7 पर समाप्त होने वाली संख्याओं का अंत क्रमशः 7 या 3 पर होता है। अतः किसी पूर्ण घन संख्या के इकाई के अंक से घनमूल संख्या का इकाई का अंक ज्ञात किया जा सकता है।

एक 6 अंकों तक की कोई पूर्ण घन संख्या लें। इस संख्या के घनमूल में अधिकतम दो अंक होंगे, क्योंकि 7 अंकों की लघुतम संख्या 1000000 का घनमूल 100 है, जो कि तीन अंकों की लघुतम संख्या है। हम घनमूल के दोनों अंक निम्न चरणों में प्राप्त करते हैं:

चरण 1 : पूर्ण घन संख्या के इकाई के अंक को देखकर घनमूल संख्या का इकाई का अंक प्राप्त करें जैसा कि ऊपर बताया जा चुका है।

चरण 2 : संख्या के दाईं ओर के तीन (अर्थात्, इकाई, दहाई व सैकड़ा) अंकों को काट दें। यदि कोई संख्या शेष नहीं बचती है, तो चरण 1 में प्राप्त अंक ही अभीष्ट घनमूल है।

चरण 3 : चरण 2 के पश्चात् बची संख्या पर विचार करें। वह अधिकतम एक-अंकीय संख्या ज्ञात कीजिए जिसका घन बची हुई संख्या के बराबर या उससे छोटा हो। यह अंक घनमूल के दहाई का अंक है।

उदाहरण 7 : निम्न के घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 512 (ii) 2197 (iii) 117649 (iv) 636056

हल: (i) 512: यहाँ इकाई का अंक 2 है। अतः, इस संख्या के घनमूल के इकाई का अंक 8 होगा। चूँकि इस संख्या के इकाई, दहाई व सैकड़े के अंकों को काट देने पर कुछ शेष नहीं बचता, अतः, अभीष्ट घनमूल 8 है।

(ii) 2197 : यहाँ इकाई का अंक 7 है। अतः, घनमूल का इकाई का अंक 3 है। दाईं ओर से तीन अंक काट देने पर, संख्या 2 शेष बचती है। वह संख्या जिसका घन 2 से छोटा है, 1 है। अतः, घनमूल का दहाई का अंक 1 है। इस प्रकार, अभीष्ट घनमूल 13 है।

(iii) 117649 : यहाँ इकाई का अंक 9 है। अतः, घनमूल का इकाई का अंक भी 9 है। दाईं ओर से तीन अंक काटने पर, संख्या 117 बचती है। चूँकि $4^3 = 64 < 117$ है तथा $5^3 = 125 > 117$ है, अतः घनमूल का दहाई का अंक 4 है। इस प्रकार, अभीष्ट घनमूल 49 है।

(iv) 636056 : यहाँ घनमूल का इकाई का अंक 6 है। (क्यों?) साथ ही, $8^3 < 636$ व $9^3 > 636$ अतः, घनमूल का दहाई का अंक 8 है।

$\therefore \quad \sqrt[3]{636056} = 86$

2.7 अभाज्य गुणनखंडन द्वारा घनमूल

हम जानते हैं कि पूर्ण घन संख्या के गुणनखंडन में प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड तीन बार या तीन का कोई गुणज बार उपस्थित होता है। अतः, किसी संख्या n का घनमूल $\sqrt[3]{n}$ निम्न विधि से ज्ञात किया जा सकता है:

1. संख्या n के अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए।
2. समान गुणनखंडों को त्रिकों में समूहित कीजिए।
3. यदि कुछ अभाज्य गुणनखंड असमूहित रहते हैं, तो संख्या n पूर्ण घन नहीं है। अतः $\sqrt[3]{n}$ प्राप्त नहीं किया जा सकता। इस प्रकार, यह प्रक्रिया यहीं रुक जाती है।

4. यदि कोई भी गुणनखंड असमूहित नहीं बचता, तो प्रत्येक त्रिक समूह से एक गुणनखंड लेकर सबको गुणा करते हैं।

   यह गुणनफल ही n का वांछित घनमूल है।

उदाहरण 8 : घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 91125 (ii) 531441 (iii) 551368

हल : (i) $91125 = \underline{5 \times 5 \times 5} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

$\therefore \quad \sqrt[3]{91125} = 5 \times 3 \times 3 = 45$

5	91125
5	18225
5	3645
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
	3

(ii) $531441 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

$\therefore \quad \sqrt[3]{531441} = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 81$

3	531441
3	177147
3	59049
3	19683
3	6561
3	2187
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
	3

(iii) $551368 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{41 \times 41 \times 41}$

$\therefore \quad \sqrt[3]{551368} = 2 \times 41$

$= 82$

2	551368
2	275684
2	137842
41	68921
41	1681
	41

2.8 ऋणात्मक संख्याओं का घनमूल

दो पूर्ण घन संख्याओं 27 ($= 3^3$) व 343 ($= 7^3$) पर विचार करें। हम जानते हैं कि $27 \times 343 = 9261$ भी एक पूर्ण घन संख्या है, क्योंकि पूर्णांकों a व b के लिए संबंध '

$$a^3 \times b^3 = (a \times b)^3$$

सत्य होता है। 9261 का घनमूल ज्ञात करने पर, हम देखते हैं कि

$$\sqrt[3]{9261} = 21 = 3 \times 7 = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{343}$$

अर्थात् $\sqrt[3]{27 \times 343} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{343}$

इस संबंध में 27 या 343 की कोई विशेष बात नहीं है। वस्तुत: यदि x व y दो पूर्ण घन संख्याएँ हैं, तो संबंध

$$\sqrt[3]{x \times y} = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}$$

सदैव सत्य होता है। अर्थात्

दो पूर्ण घन संख्याओं के गुणनफल का घनमूल उन संख्याओं के घनमूलों के गुणनफल के बराबर होता है।

उपरोक्त नियम का प्रयोग कर हम ऋणात्मक पूर्णांकों का घनमूल ज्ञात करते हैं। किसी भी धनात्मक पूर्णांक m के लिए

$$-m = -1 \times m$$

$\therefore$ $\sqrt[3]{-m} = \sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{m}$

परंतु, $\sqrt[3]{-1} = -1$, क्योंकि $(-1)^3 = -1$ है।

$\therefore$ $\sqrt[3]{-m} = -\sqrt[3]{m}$

उदाहरण 9 : घनमूल ज्ञात कीजिए : (i) -125 (ii) -343 (iii) -2197

हल : (i) $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -5$ $(\because 5^3 = 125)$

(ii) $\sqrt[3]{-343} = -\sqrt[3]{343} = -7$ $(\because 7^3 = 343)$

(iii) $\sqrt[3]{-2197} = -\sqrt[3]{2197} = -13$ $(\because 13^3 = 2197)$

2.9 परिमेय संख्याओं का घनमूल

दो पूर्ण घन संख्याओं के गुणनफल के घनमूल के समान ही पूर्ण घन संख्याओं के भागफल के घनमूल के लिए भी हमें निम्न परिणाम प्राप्त हैं :

यदि x तथा $y\ (\neq 0)$ दो पूर्ण घन संख्याएँ हैं, तो $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$ होता है। अर्थात्

दो पूर्ण घन संख्याओं के भागफल का घनमूल उन संख्याओं के घनमूलों के भागफल के बराबर होता है।

ध्यान दीजिए कि $\sqrt[3]{x}$ तथा $\sqrt[3]{y}$ पूर्णांक हैं तथा $\sqrt[3]{y} \neq 0$ है। अतः, $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$ एक परिमेय संख्या है। इस प्रकार, उस परिमेय संख्या का घनमूल, जिसके अंश व हर दोनों पूर्ण घन हैं, एक परिमेय संख्या है। इस परिमेय संख्या का अंश दी हुई संख्या के अंश का घनमूल तथा हर दी हुई संख्या के हर का घनमूल होता है।

उदाहरण 10 : घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{343}{125}$ (ii) $\frac{-27}{512}$ (iii) $\frac{-2197}{1331}$

हल : (i) $\sqrt[3]{\frac{343}{125}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{7 \times 7 \times 7}}{\sqrt[3]{5 \times 5 \times 5}} = \frac{7}{5}$

(ii) $\sqrt[3]{\frac{-27}{512}} = \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{-\sqrt[3]{3 \times 3 \times 3}}{\sqrt[3]{8 \times 8 \times 8}} = \frac{-3}{8} = -\frac{3}{8}$

(iii) $\sqrt[3]{\frac{-2197}{1331}} = \frac{-\sqrt[3]{2197}}{\sqrt[3]{1331}} = \frac{-\sqrt[3]{13 \times 13 \times 13}}{\sqrt[3]{11 \times 11 \times 11}} = \frac{-13}{11} = -\frac{13}{11}$

प्रश्नावली 2.2

1. अनुक्रम 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, 331, 397, ... के पदों को क्रमित रूप से घटा कर निम्नलिखित संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :

   (i) 64 (ii) 512 (iii) 1728

2. प्रश्न 1 की विधि द्वारा निम्न संख्याओं के पूर्ण घन होने की जाँच कीजिए :

   (i) 130 (ii) 345 (iii) 792 (iv) 1331

3. प्रश्न 2 में दी गई उन संख्याओं के लिए, जो पूर्ण घन नहीं है, वे लघुतम संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिन्हें उनमें से घटाने पर प्राप्त संख्याएँ पूर्ण घन हो जाएँ। संगत घनमूल भी ज्ञात कीजिए।

4. निम्न संख्याओं के घनमूलों के इकाई के अंक ज्ञात कीजिए :

(i) 226981 (ii) 13824 (iii) 571787 (iv) 175616

5. प्रश्न 4 में दी गई संख्याओं के घनमूलों के दहाई के अंक ज्ञात कीजिए।

6. इकाई व दहाई के अंकों को ज्ञात कर, निम्न संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 389017 (ii) 91125 (iii) 110592 (iv) 46656

7. अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा निम्न संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 250047 (ii) 438976 (iii) 592704 (iv) 614125

8. घनमूल ज्ञात कीजिए:

(i) –226981 (ii) – 13824 (iii) – 571787 (iv) – 175616

9. निम्न तथ्यों के आधार पर 2460375, 20346417, 210644875, 57066625 संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $2460375 = 3375 \times 729$

(ii) $20346417 = 9261 \times 2197$

(iii) $210644875 = 42875 \times 4913$

(iv) $57066625 = 166375 \times 343$

[*संकेत : $a^3 b^3 = (ab)^3$*]

10 घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{729}{2197}$ (ii) $\frac{3375}{4913}$ (iii) $\frac{9261}{42875}$ (iv) $\frac{343}{166375}$

11. जाँच कीजिए कि क्या निम्न संख्याओं में से प्रत्येक का घनमूल ज्ञात किया जा सकता है। यदि नहीं, तो वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे गुणा करने पर गुणनफल का घनमूल ज्ञात किया जा सके।

(i) 3087 (ii) 33275 (iii) 120393

12. वह लघुतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे प्रश्न 11 की संख्याओं को भाग देने पर भागफल का घनमूल ज्ञात किया जा सके।

याद रखने योग्य बातें

1. संख्या n एक पूर्ण घन होती है, यदि किसी पूर्णांक m के लिए, $n = m^3$ हो।

2. यदि n एक पूर्ण घन संख्या है तथा $n = m^3$ है, तो m को n का घनमूल कहते हैं। n के घनमूल को $\sqrt[3]{n}$ से प्रदर्शित करते हैं।

3. किसी पूर्ण घन के घनमूल के इकाई का अंक उस पूर्ण घन के इकाई के अंक को देखकर निर्धारित किया जा सकता है।

4. अभाज्य गुणनखंडन द्वारा किसी भी पूर्ण घन का घनमूल ज्ञात किया जा सकता है।

5. दो पूर्ण घनों के गुणनफल का घनमूल उन पूर्ण घनों के घनमूलों के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात्

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{b}$$

जहाँ a व b पूर्ण घन संख्याएँ हैं।

6. दो पूर्ण घन संख्याओं के भागफल का घनमूल उन पूर्ण घन संख्याओं के घनमूलों के भागफल के बराबर होता है, अर्थात्

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, \ b \neq 0$$

जहाँ a व b पूर्ण घन संख्याएँ हैं।

7. एक ऋणात्मक पूर्ण घन संख्या का घनमूल ऋणात्मक होता है।

अध्याय

3

परिमेय घातांक एवं करणियाँ

3.1 भूमिका

याद कीजिए कि यदि x एक परिमेय संख्या, तथा m एक धनात्मक पूर्णांक है, तो

$$x^m = x \times x \times \ldots \times x, \; m \text{ बार}$$

इसी प्रकार, यदि x कोई शून्येतर परिमेय संख्या है तथा k एक ऋणात्मक पूर्णांकीय घातांक है, जहाँ $k = -m$ (m एक धनात्मक पूर्णांक) है, तो

$$x^k = x^{-m} = x^{-1} \times x^{-1} \times \ldots \times x^{-1}, \; m \text{ बार}$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \ldots \times \frac{1}{x}, \; m \text{ बार}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^m = \frac{1}{x^m}$$

हम यह भी जानते हैं कि यदि $x \neq 0$ एक परिमेय संख्या है तथा m व n पूर्णांक हैं, तो

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

$$x^m \div x^n = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{m \times n}$$

साथ ही, $x^m y^m = (xy)^m$ (जहाँ x, y शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं)

परंतु क्या हम किसी परिमेय संख्या x के लिए $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{5}{4}}, x^{\frac{-9}{13}}$ जैसे व्यंजकों का अर्थ जानते हैं, जहाँ घातांक भी परिमेय संख्याएँ हैं? इस अध्याय में, हम x^m का अर्थ जानेंगे, जहाँ x एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा m एक परिमेय घातांक है। हम पूर्णांकीय घातांकों के स्थान पर परिमेय घातांकों के लिए भी ऊपर जैसे संबंध प्राप्त करेंगे।

3.2 धनात्मक परिमेय घातांक

हम जानते हैं कि $3^3 = 27$ है। इस संबंध को हम $27^{\frac{1}{3}} = 3$ की भाँति भी व्यक्त करते हैं। इसी प्रकार, संबंध $2^5 = 32$ को $32^{\frac{1}{5}} = 2$ भी लिखा जा सकता है। व्यापक रूप में, यदि x व y दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं और किसी धनात्मक पूर्णांक m के लिए $x^m = y$ हो, तो हम इसे $y^{\frac{1}{m}} = x$ भी लिख सकते हैं। $y^{\frac{1}{m}}$ को हम $\sqrt[m]{y}$ भी लिख सकते हैं और $\sqrt[m]{y}$ को हम y *का mवाँ मूल* (*m^{th} root*) कहते हैं। इस प्रकार,

4 का दूसरा मूल = $\sqrt[2]{4} = 2$

27 का तीसरा मूल = $\sqrt[3]{27} = 3$

625 का चौथा मूल = $\sqrt[4]{625} = 5$ आदि।

इस अर्थ में हम x^m को किसी भी धनात्मक परिमेय घातांक m के लिए परिभाषित कर सकते हैं।

यदि x एक धनात्मक परिमेय संख्या है, तथा $m = \frac{p}{q}$ एक धनात्मक परिमेय घातांक है, तो $x^{\frac{p}{q}}$ को हम x^p के q वें मूल के रूप में परिभाषित करते हैं।

अर्थात् $\quad x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$

उदाहरण के लिए,

$$8^{\frac{5}{3}} = \left(8^5\right)^{\frac{1}{3}} = (32768)^{\frac{1}{3}} = 32$$

साथ ही, $\quad \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 2^5 = 32$

अतः, $\quad \left(8^5\right)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5.$

यहाँ 8, 3 या 5 कोई विशेष अंक नहीं हैं। यह संबंध व्यापक रूप से सत्य है।

यदि x एक धनात्मक परिमेय संख्या है, तो किसी भी धनात्मक परिमेय घातांक $\frac{p}{q}$ के लिए,

$$\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

इस प्रकार, हम $x^{\frac{p}{q}}$ को निम्नलिखित दो समतुल्य रूपों में परिभाषित कर सकते हैं।

(A): $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, इसे x^p का q वाँ मूल या x की *घात p का q वाँ मूल* पढ़ा जाता है।

(B): $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$, इसे x *के q वें मूल की घात* p पढ़ा जाता है।

उदाहरण 1 : ज्ञात कीजिए : (i) $8^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}}$

हल : (i) $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^2\right)^{\frac{1}{3}}$, रूप (A) के प्रयोग द्वारा

$= (64)^{\frac{1}{3}}$

$= 4$, क्योंकि $4^3 = 64$

या

$8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$, रूप (B) के प्रयोग द्वारा

$= (2)^2$, क्योंकि $2^3 = 8$

$= 4$

(ii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[\left(\frac{32}{243}\right)^4\right]^{\frac{1}{5}}$, रूप (A) के प्रयोग द्वारा

$= \left[\left(\frac{2^5}{3^5}\right)^4\right]^{\frac{1}{5}}$, चूँकि $32 = 2^5$, $243 = 3^5$

$= \left[\frac{\left(2^5\right)^4}{\left(3^5\right)^4}\right]^{\frac{1}{5}}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ के प्रयोग द्वारा

$$= \left(\frac{2^{20}}{3^{20}}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad (x^m)^n = x^{mn} \text{ के प्रयोग द्वारा}$$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right]^{\frac{1}{5}}, \quad \frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m \text{ के प्रयोग द्वारा}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4, \text{ चूँकि } \left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

$$= \frac{16}{81}$$

या

$$\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^4, \text{ रूप (B) के प्रयोग द्वारा}$$

$$= \left(\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^{\frac{1}{5}}\right)^4$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4, \quad \left(x^m\right)^{\frac{1}{m}} = x, \; x > 0 \text{ के प्रयोग द्वारा}$$

$$= \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

टिप्पणी : उपर्युक्त उदाहरण में, हमने (A) व (B) दोनों रूपों का प्रयोग किया है। आपके विचार से परिकलन के लिए कौन सा रूप अधिक सुविधाजनक है?

उदाहरण 2 : मान ज्ञात कीजिए : (i) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}}$ (ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}$

हल : (i) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} = \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^3 \times \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^5$, रूप (B) का प्रयोग करने पर

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5, \text{ चूँकि } \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^8$, क्योंकि पूर्णांकों m व n के लिए, $x^m \times x^n = x^{m+n}$

$= \frac{2^8}{3^8} = \frac{256}{6561}$

(ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^2$, क्योंकि $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2$

$= \frac{16^2}{81^2} = \frac{256}{6561}$

टिप्पणी : उपर्युक्त उदाहरण में, हमने देखा कि

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}$$

यह संबंध, घातांकों के नियम $x^m \times x^n = x^{m+n}$ का पालन करता है।

उदाहरण 3 : मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$ (ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$

हल : (i) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^5 \div \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^3$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^2$, क्योंकि पूर्णांकों m व n के लिए, $x^m \div x^n = x^{m-n}$

$= \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

(ii) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$, चूँकि $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$= \frac{4}{9}$, चूँकि $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$

टिप्पणी : उपर्युक्त उदाहरण में, हमने देखा कि

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$$

यह संबंध घातांकों के नियम $x^m \div x^n = x^{m-n}$ का पालन करता है।

3.3 ऋणात्मक परिमेय घातांक

आप कक्षा VII में पढ़ चुके हैं कि यदि m एक धनात्मक पूर्णांक तथा x एक शून्येतर परिमेय संख्या है, तो

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$$

अर्थात् x^{-m}, x^m *का व्युत्क्रम है या* x *के व्युत्क्रम की* m *वीं घात है।*

हम इस नियम को परिमेय घातांकों के लिए भी स्वीकार करेंगे। इस प्रकार, यदि $\frac{p}{q}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है, तो किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या x के लिए

$$x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}}$$

अर्थात् $x^{-\frac{p}{q}}$, $x^{\frac{p}{q}}$ *का व्युत्क्रम है या* x *के व्युत्क्रम की घात* $\frac{p}{q}$ *है।*

इस प्रकार, यदि $x = \frac{r}{s}\ (r, s > 0)$ है, तब $\left(\frac{r}{s}\right)^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{p}{q}}$, क्योंकि $\frac{r}{s}$ का व्युत्क्रम $\frac{s}{r}$ है।

उदाहरण 4 : मान ज्ञात कीजिए : (i) $8^{-\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{-\frac{4}{5}}$

हल : (i) $8^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$= \left[\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \text{ क्योंकि } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{4}$$

(ii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[\left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^4$

$= \left[\left(\frac{3^5}{2^5}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^4 = \left[\left(\left(\frac{3}{2}\right)^5\right)^{\frac{1}{5}}\right]^4$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$

उदाहरण 5 : मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}}$ (ii) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{3}\right)}$

हल : (i) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}}$

$= \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{4}{3}} = \left[\left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \times \left[\left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^4 = \left[\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \times \left[\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^4$

$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^6 = \frac{15625}{729}$

(ii) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{3}\right)} = \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-6}{3}}$

$= \left(\frac{27}{125}\right)^{-2}$

$= \left(\frac{125}{27}\right)^2 = \frac{15625}{729}$

टिप्पणी : उपर्युक्त उदाहरण से, हम देखते हैं कि

$$\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}} = \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{3}\right)}$$

यह संबंध घातांकों के नियम $x^m \times x^m = x^{m+n}$ का पालन करता है।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या ये मान समान हैं :

(i) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \div \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}}$ (ii) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} - \left(\frac{-4}{3}\right)}$

हल : (i) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \div \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}} = \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \div \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$

$$= \left[\left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \div \left[\left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^4$$

$$= \left[\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \div \left[\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^4$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 \div \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^{2-4}$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

(ii) $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right)} = \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3} + \frac{4}{3}}$

$$= \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{3^3}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2$$

$$= \left[\left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

हाँ, ये दोनों मान समान हैं।

टिप्पणी : उपरोक्त उदाहरण से हमें ज्ञात होता है कि

$$\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} \div \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)}$$

जो कि घातांकों के नियम $x^m \div x^n = x^{m-n}$ का पालन करता है।

3.4 घातांकों के नियम

हम जानते हैं कि यदि x एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m व n दो पूर्णांक घातांक हैं, तब

$$x^m \times x^n = x^{m+n} \quad (1)$$

$$x^m \div x^n = x^{m-n} \quad (2)$$

$$\left(x^m\right)^n = x^{m \times n} \quad (3)$$

साथ ही, यदि x और y दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं, तब

$$x^m \times y^m = (x \times y)^m \quad (4)$$

उपर्युक्त सभी संबंध परिमेय घातांकों m व n तथा धनात्मक परिमेय संख्याओं x व y के लिए भी सत्य हैं। उदाहरण 2 व 5 निम्नलिखित नियम को स्पष्ट करते हैं :

नियम (1) : यदि $x > 0$ एक परिमेय संख्या है तथा m व n परिमेय घातांक हैं, तब, इसी प्रकार, उदाहरण 3 व 6 अग्रलिखित नियम को स्पष्ट करते हैं :

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

नियम (2) : परिमेय संख्या $x > 0$ तथा परिमेय घातांकों m व n के लिए,

$$x^m \div x^n = x^{m-n}$$

उपर्युक्त दोनों नियम तब भी सत्य हैं, जब दोनों में से एक घातांक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक हो।

अब हम पहले बताए गए संबंध (3) का परिमेय घातांकों के लिए सत्यापन करेंगे। इसके लिए आगे दिए गए उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 7 : (i) $\left[\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{3}{5}}$ तथा (ii) $\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{5}{2} \times \frac{3}{5}}$ का मान ज्ञात कीजिए और दिखाइए कि दोनों मान बराबर हैं।

हल : (i) $\left[\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{3}{5}} = \left[\left\{\left(\frac{5^2}{3^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^5\right]^{\frac{3}{5}}$

$$= \left[\left\{\left(\left(\frac{5}{3}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^5\right]^{\frac{3}{5}}$$

$$= \left[\left(\frac{5}{3}\right)^5\right]^{\frac{3}{5}} = \left[\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^5\right\}^{\frac{1}{5}}\right]^3$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27}$$

(ii) $\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{5}{2}\times\frac{3}{5}} = \left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$= \left[\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^3$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3}$$

$$= \frac{125}{27}$$

हाँ, दोनों मान बराबर हैं।

उदाहरण 8 : सत्यापित कीजिए : $\left[(729)^{\frac{-5}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} = (729)^{-\frac{5}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$

हल : $\left[(729)^{\frac{-5}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{5}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\left\{\left(\frac{1}{9^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^5\right]^{-\frac{1}{2}}$

$$= \left[\left(\frac{1}{9}\right)^5\right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9^5}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9^5}{1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(3^2\right)^5\right]^{\frac{1}{2}} = \left(3^{10}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3^5 = 243$$

साथ ही, $(729)^{\frac{-5}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = (729)^{\frac{5}{6}} = \left(3^6\right)^{\frac{5}{6}}$

$$= \left[\left(3^6\right)^{\frac{1}{6}}\right]^5 = 3^5 = 243$$

अतः, $\left[(729)^{\frac{-5}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}} = (729)^{\frac{-5}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$

उपर्युक्त दोनों उदाहरणों से निम्नलिखित नियम का सत्यापन होता है :

नियम (3) : यदि $x > 0$ एक परिमेय संख्या है तथा m व n दो परिमेय घातांक हैं, तो

$$\left(x^m\right)^n = x^{m\times n}$$

अब हम पहले बताए गए संबंध (4) का परिमेय घातांकों के लिए सत्यापन करेंगे।

$$\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{2^3}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \times \left[\left(\frac{4^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2$$

$$= \left[\left(\left(\frac{2}{5}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \times \left[\left(\left(\frac{4}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{15}\right)^2$$

$$= \frac{64}{225},$$

तथा $\left(\frac{8}{125} \times \frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{8 \times 64}{125 \times 27}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left[\left(\frac{8^3}{5^3 \times 3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2$

$$= \left[\left(\left(\frac{8}{5 \times 3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left(\frac{8}{15}\right)^2$$

$$= \frac{64}{225}$$

इसी प्रकार,

$$(27)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\frac{64}{729}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{729}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\left(\frac{9}{4}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

तथा $\left(27 \times \frac{64}{729}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

इस प्रकार, हमने निम्नलिखित नियम को सत्यापित किया है:

नियम (4) : यदि $x > 0$ व $y > 0$ दो परिमेय संख्याएँ हैं तथा m एक परिमेय घातांक है, तो $x^m \times y^m = (x \times y)^m$

हम अब आगे यह मानकर चलेंगे कि अनुच्छेद 3.4 में दिए गए नियम (1) से (4) सभी धनात्मक परिमेय आधारों तथा सभी परिमेय घतांकों के लिए सत्य हैं।

उदाहरण 9 : मान ज्ञात कीजिए : (i) $(0.125)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $(0.000729)^{\frac{-3}{4}} \times (0.09)^{\frac{-3}{4}}$

हल : (i) $(0.125)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$= \left(\frac{5^3}{10^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{5}{10}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{5}{10}\right)^{3\times\frac{2}{3}}, \text{ नियम (3) के प्रयोग द्वारा}$$

$$= \left(\frac{5}{10}\right)^{2} = \frac{5^2}{10^2}$$

$$= \frac{25}{100} = 0.25$$

(ii) $$(0.000729)^{\frac{-3}{4}} \times (0.09)^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{729}{1000000}\right)^{\frac{-3}{4}} \times \left(\frac{9}{100}\right)^{\frac{-3}{4}}$$

$$= \left(\frac{1000000}{729}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{100}{9}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$= \left(\frac{10^6}{9^3}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{10^2}{9}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$= \left(\frac{10^6 \times 10^2}{9^3 \times 9}\right)^{\frac{3}{4}}, \text{ नियम (4) के प्रयोग द्वारा}$$

$$= \left(\frac{10^8}{9^4}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{10^{8\times\frac{3}{4}}}{9^{4\times\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{10^6}{9^3} = \frac{1000000}{729}$$

उदाहरण 10 : मान ज्ञात कीजिए : (i) $(13^2 - 5^2)^{\frac{3}{2}}$ (ii) $(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)^{-\frac{3}{2}}$

हल: (i) $$(13^2 - 5^2)^{\frac{3}{2}} = \left[(13+5) \times (13-5)\right]^{\frac{3}{2}}, \quad [x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)]$$

$$= (18 \times 8)^{\frac{3}{2}} = (3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= (3^2 \times 2^4)^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} \times (2^4)^{\frac{3}{2}}$$ [नियम (4)]

$$= 3^{2\times\frac{3}{2}} \times 2^{4\times\frac{3}{2}} \qquad \text{[नियम (3)]}$$

$$= 3^3 \times 2^6 = 1728$$

(ii) $\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3\right)^{-\frac{3}{2}} = (1 + 8 + 27 + 64)^{-\frac{3}{2}}$

$$= (100)^{-\frac{3}{2}} = \left(10^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 10^{2\times\left(\frac{-3}{2}\right)} \qquad \text{[नियम (3)]}$$

$$= 10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

3.5 करणियाँ एवं करणीगत राशियाँ

हम जानते हैं कि यदि $y > 0$ है, तो $y^{\frac{1}{q}} = x$ को हम $x = \sqrt[q]{y}$ द्वारा भी व्यक्त करते हैं। इस प्रकार, $y^{\frac{1}{q}}$ तथा $\sqrt[q]{y}$ समान अर्थों वाले दो चिह्नांकन हैं। रूप $y^{\frac{1}{q}}$ *घातांकी रूप* (*Exponential form*) कहलाता है तथा $\sqrt[q]{y}$ *करणी रूप* (*Radical form*) कहलाता है। चिह्न '$\sqrt{\ }$' *करणी चिह्न* (*Radical sign*) कहलाता है तथा $\sqrt[q]{y}$ को एक *करणी* (*Radical*) कहते हैं। संख्या q को *करणी का घातांक* (*index of radical*) तथा y को *करणीगत राशि* (*radicand*) कहते हैं। इस बात पर ध्यान दें कि करणी का घातांक एक धनात्मक पूर्णांक ही होता है। यदि q कोई ऋणात्मक पूर्णांक हो, जैसे कि $32^{-\frac{1}{5}}$ में, तो हम इसे $\sqrt[-5]{32}$ के रूप में नहीं लिखते हैं। $32^{-\frac{1}{5}}$ को हम $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$ अर्थात् $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ लिखते हैं। यहाँ करणीगत राशि $\frac{1}{32}$ तथा करणी का घातांक 5 है।

उदाहरण 11 : व्यक्त करें :

(i) $\sqrt[5]{1234}$ को घातांकी रूप में

(ii) $\left(\frac{567}{890}\right)^{-\frac{1}{8}}$ को करणी रूप में

हल : (i) वांछित घातांकी रूप है : $(1234)^{\frac{1}{5}}$

(ii) $\left(\frac{567}{890}\right)^{\frac{-1}{8}} = \left(\frac{890}{567}\right)^{\frac{1}{8}}$

अतः वांछित करणी रूप है: $\sqrt[8]{\frac{890}{567}}$

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $(16)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $(243)^{\frac{1}{5}}$ (iii) $(15625)^{\frac{1}{6}}$

2. मान ज्ञात कीजिए : (i) $(32768)^{\frac{1}{15}}$ (ii) $(279936)^{\frac{1}{7}}$

3. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ (ii) $\left(\frac{343}{1331}\right)^{\frac{1}{3}}$

4. मान निकालिए : (i) $\left(\frac{390625}{6561}\right)^{\frac{1}{8}}$ (ii) $\left(\frac{117649}{1771561}\right)^{\frac{1}{6}}$

5. निम्न को घातांकी रूप में लिखिए :

   (i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt[3]{7}$ (iii) $\sqrt[9]{1100}$ (iv) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ (v) $\sqrt[8]{\frac{61}{1123}}$

6. निम्नलिखित को करणी रूप में लिखिए। प्रत्येक के लिए करणीगत राशि व करणी का घातांक बताइए।

   (i) $16^{\frac{1}{2}}$ (ii) $125^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\left(\frac{6}{17}\right)^{\frac{1}{9}}$ (iv) $\left(\frac{23}{11}\right)^{-\frac{1}{11}}$ (v) $\left(\frac{328}{61}\right)^{-\frac{1}{17}}$

7. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान x^p के qवें मूल के रूप में अर्थात् सूत्र $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए :

   (i) $8^{\frac{5}{3}}$ (ii) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$ (iii) $\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{7}{2}}$ (iv) $\left(\frac{256}{6561}\right)^{\frac{3}{8}}$

8. प्रश्न 7 के व्यंजकों का मान x के q वें मूल की घात p के रूप मे, अर्थात् सूत्र $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ का प्रयोग कर, ज्ञात करें।

9. मान ज्ञात कीजिए : (i) $343^{-\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{625}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$

10. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\left(\frac{25}{81}\right)^{-\frac{3}{2}}$ (ii) $\left(\frac{256}{6561}\right)^{-\frac{5}{8}}$

11. निम्नलिखित को सरल कीजिए :

(i) $23^{\frac{1}{2}} \times 23^{\frac{3}{2}}$ (ii) $11^{-\frac{4}{3}} \times 11^{-\frac{5}{3}}$

(iii) $3 \times 9^{\frac{3}{2}} \times 9^{-\frac{1}{2}}$ (iv) $27^{\frac{2}{3}} \times 27^{\frac{1}{3}} \times 27^{-\frac{4}{3}}$

12. सरल कीजिए :

(i) $15^{\frac{3}{2}} \div \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{4}{3}} \div \left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{5}{3}}$

(iii) $3 \times 9^{\frac{1}{2}} \div 9^{\frac{3}{2}}$ (iv) $27^{\frac{2}{3}} \div 27^{\frac{1}{3}} \times 27^{-\frac{4}{3}}$

13. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(0.04)^{\frac{3}{2}}$ (ii) $(0.008)^{\frac{2}{3}}$ (iii) $(6.25)^{\frac{3}{2}}$ (iv) $(0.000064)^{\frac{5}{6}}$

14. निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i) $(3^2+4^2)^{-\frac{1}{2}}$ (ii) $(5^2+12^2)^{\frac{3}{2}}$

(iii) $(17^2-8^2)^{\frac{1}{2}}$ (iv) $(1^3+2^3+3^3)^{-\frac{5}{2}}$

15. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए :

(i) यदि x एक पूर्ण वर्ग है, तो $\sqrt{x}$ एक परिमेय संख्या है।

(ii) यदि x एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है, तो $\sqrt[3]{x^3} = x$ सत्य नहीं है।

(iii) प्रत्येक पूर्णांक x के लिए, $x^{\frac{3}{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

(iv) $\sqrt[p]{x^q}$ का घातांकी रूप $x^{\frac{p}{q}}$ है।

(v) $\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$ का करणी रूप $\sqrt[pq]{x}$ है।

(vi) सभी परिमेय संख्याओं $x > 0$ के लिए $(x^{-3})^{-4} = x^{12}$ सत्य है।

(vii) करणी का घातांक कभी ऋणात्मक नहीं होता।

याद रखने योग्य बातें

1. यदि m एक धनात्मक पूर्णांक है तथा x व y ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं कि $x^m = y$, तो $y^{\frac{1}{m}} = x$ होता है।

2. $y^{\frac{1}{m}}$, y का m वाँ मूल कहलाता है तथा इसे $\sqrt[m]{y}$ के रूप में लिखते हैं।

3. यदि $x = \frac{r}{s}$ एक शून्येतर परिमेय संख्या है, तो $\left(\frac{r}{s}\right)^{-m} = \left(\frac{s}{r}\right)^{m}$ है।

4. एक परिमेय घातांक $\frac{p}{q}$ के लिए,

   $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, x^p का qवाँ मूल,

   अथवा $x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$, x के q वें मूल का घात p होता है।

5. यदि $x = \frac{r}{s}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है, तो

   $$x^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{r}{s}\right)^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{p}{q}}$$

6. यदि x एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा m व n कोई परिमेय घातांक हैं, तो

   (i) $x^m \times x^n = x^{m+n}$

   (ii) $x^m \div x^n = x^{m-n}$

   (iii) $(x^m)^n = x^{m \times n}$

7. यदि x व y धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं तथा m कोई भी परिमेय घातांक है, तो

   $x^m \times y^m = (x \times y)^m$ होगा।

8. यदि $x = \sqrt[q]{y} = y^{\frac{1}{q}}$ है, तो $y^{\frac{1}{q}}$, x का घातांकी रूप है तथा $\sqrt[q]{y}$, x का करणी रूप है। यहाँ q करणी का घातांक तथा y करणीगत राशि है।

अतीत के झरोखे से

यह एक सर्वमान्य तथ्य है कि विश्व की सभी प्राचीन सभ्यताओं में किसी-न-किसी प्रकार की संख्याकन पद्धति विद्यमान थी और प्रत्येक सभ्यता ने विभिन्न संख्या पद्धतियों के उद्भव एवं विकास में कुछ-न-कुछ योगदान दिया। बेबिलोनिया में लगभग 2100 ई. पू. के कुछ शिलालेख (tablets) प्राप्त हुए हैं जिन पर संख्याओं 1 से 60 तक के वर्ग तथा 1 से 32 तक की संख्याओं के घन अंकित हैं। यहाँ 'वर्ग' शब्द की उत्पत्ति इस तथ्य के कारण हुई है कि दो समान संख्याओं का गुणनफल उस वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर होता है जिसकी भुजा गुणा की जा रही संख्या के संख्यात्मक मान के बराबर होती है। इसी प्रकार, a^3 में 'घन' शब्द का आधार भी ऐसा ही है। पूर्णांकीय घातांकों का वर्तमान संकेतन *देकार्त* (*Descartes*) (1637) की देन है। उनके अनुसार "a को a से गुणा करने के लिए हम $a\,a$ अथवा a^2 लिखते हैं तथा गुणनफल को एक बार पुनः a से गुणा करने के लिए a^3 लिखते हैं और इसी प्रकार लिखते चले जाते हैं..." तथापि व्यापक घातांकों के सिद्धांत इससे बहुत पहले ही ज्ञात थे।

वर्ग $a \times a = a^2$ को संख्या a से प्राप्त किया जाता है, अतः स्वाभाविक रूप से a को a^2 *का मूल* अर्थात् *वर्गमूल* कहा गया। इसी प्रकार, a को a^3 का घनमूल कहते हैं। वर्गमूल ज्ञात करने की एक विधि *'दी एलीमेंट्स'* (*The Elements*) नामक पुस्तक में दी गई है। इस पुस्तक में अपने समय तक की यूनानी गणित की समस्त जानकारी उपलब्ध है। पुस्तक में प्राप्त वर्गमूल ज्ञात करने की विधि प्रचलित विधि से बहुत कुछ मिलती-जुलती है। कुछ-कुछ प्रचलित विधि के समान ही वर्गमूल ज्ञात करने की एक विधि एलेक्ज़ेंड्रिया निवासी *थिआन* (*Theon*) (390) ने षाष्ठिक (60 आधार वाली) संख्या पद्धति का उपयोग कर विकसित की। थिआन जैसी ही एक विधि का वर्णन *भास्कर* (1150) ने भी किया है। अंक गणित की पुरानी मुद्रित पुस्तकों में वर्गमूल संख्याओं को कुछ-कुछ विभाजन की पंक्ति (galley) विधि की भाँति व्यवस्थित कर, ज्ञात किया जाता था। *कातानिओ* (*Cataneo*) (1546) तथा *कातात्दी* (*Cataldi*) (1613) के प्रयासों से 16वीं तथा 17वीं शताब्दियों में वर्तमान में प्रचलित विधि लोकप्रिय हो गई थी।

वर्गमूल की तुलना में घनमूल निकालना एक कठिन प्रक्रिया है। वर्गमूल ज्ञात करने की विधियाँ सरल से सूत्र $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ के ज्यामितीय स्वरूप पर आधारित थीं। स्वाभाविक रूप से घनमूल ज्ञात करने की क्रिया अपेक्षाकृत जटिल

सूत्र $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ पर आधारित थी। घनमूल ज्ञात करने की समस्या की दिशा में अनेक प्राचीन गणितज्ञों ने प्रयास किए। इस संदर्भ में *ब्रह्मगुप्त* (628), *अल कारखी* (*al-Karkhi*) (1020), *भास्कर* (1150) तथा *फिबोनाशी*, (*Fibonacci*) (1202) के नाम लिए जा सकते हैं। 16वीं व 17वीं शताब्दी में लोगों ने घनमूल ज्ञात करने की प्रक्रिया को x^2 घन गुटकों (blocks) के x घन गुटकों द्वारा समझाया (ध्यान दीजिए $x^3 = x \times x^2$ आदि)।

1360 में फ्रांसीसी गणितज्ञ *निकोल ऑरसम* (*Nicole Oresme*) (1360) तथा कुछ अन्य गणितज्ञों ने घातांकों के लिए $\frac{1}{2}$ जैसी संख्याओं का प्रयोग आरंभ कर दिया था, परंतु घातांकों के सिद्धांत का संतोषजनक स्पष्टीकरण *वालिस* (*Wallis*) (1655) द्वारा 17 वीं शताब्दी में ही दिया गया। इन्होंने भिन्नात्मक तथा ऋणात्मक घातांकों का प्रयोग किया। इन्हीं का सुझाव था कि x^0 को 1 तथा $x^{p/q}$ को $\sqrt[q]{x^p}$ माना जाए। *न्यूटन* (*Newton*) (1669) ने वालिस के कार्य को परिमार्जित किया। न्यूटन के बाद घातांकों के वर्तमान संकेतन पूर्णतया उपयोग में आने लगे।

लाभ, हानि तथा बट्टा

4.1 भूमिका

कक्षा VI में, हमने प्रतिशतता के एक अनुप्रयोग के रूप में *लाभ और हानि* का अध्ययन प्रारंभ किया था। कक्षा VII में, हमने *उपरिव्ययों* (*overhead expenses*) को सम्मिलित कर, इस अध्ययन का विस्तार किया। इस अध्याय में, हम लाभ और हानि के बारे में कुछ और अधिक सीखेंगे। हम एक प्रारंभिक स्तर पर *बट्टे* (*discount*) की संकल्पना का परिचय भी कराएँगे तथा इससे संबंधित कुछ सरल प्रश्नों को हल करेंगे।

4.2 लाभ और हानि

आप पिछली कक्षाओं में, लाभ और हानि से पहले ही परिचित हो चुके हैं। याद कीजिए कि यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य (वि.मू.) उसके क्रय मूल्य (क्र.मू.) से अधिक हो तो हम कहते हैं कि उस पर लाभ हुआ है। इसके विपरीत, यदि किसी वस्तु का वि.मू. उसके क्र.मू. से कम हो तो हम कहते हैं कि उस पर हानि हुई है। लाभ और हानि से जुड़े विभिन्न संबंधों की एक सूची नीचे दी गई है:

1. लाभ की स्थिति में (अर्थात् जब वि.मू. > क्र.मू.),

   (i) लाभ = वि.मू. − क्र.मू.

   (ii) वि.मू. = लाभ + क्र.मू.

   (iii) क्र.मू. = वि.मू. − लाभ

   (iv) $\text{लाभ}\ \% = \dfrac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$

   (v) $\text{लाभ} = \dfrac{\text{क्र.मू.} \times \text{लाभ}\ \%}{100}$ [उपर्युक्त (iv) से]

(vi) $\text{वि.मू.} = \text{क्र.मू.} \times \left(\frac{100 + \text{लाभ \%}}{100}\right)$ [उपर्युक्त (ii) और (v) से]

(vii) $\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 + \text{लाभ \%}}$ [उपर्युक्त (vi) से]

2. हानि की स्थिति में (अर्थात् जब वि.मू. < क्र.मू.),

(i) हानि = क्र.मू. − वि.मू.

(ii) वि.मू. = क्र.मू. − हानि

(iii) क्र.मू. = हानि + वि.मू.

(iv) $\text{हानि \%} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$

(v) $\text{हानि} = \frac{\text{क्र.मू.} \times \text{हानि \%}}{100}$ [उपर्युक्त (iv) से]

(vi) $\text{वि.मू.} = \text{क्र.मू.} \times \left(\frac{100 - \text{हानि \%}}{100}\right)$ [उपर्युक्त (ii) और (v) से]

(vii) $\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 - \text{हानि \%}}$ [उपर्युक्त (vi) से]

यह सदैव ध्यान में रखना चाहिए कि उपरिव्यय, जैसे कि परिवहन व्यय, मरम्मत इत्यादि पर हुए व्यय, (यदि कोई हो तो) सदैव क्रय मूल्य में सम्मिलित किए जाते हैं। अब हम लाभ और हानि से संबंधित कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 1 : अनवर ने 2 रु प्रति संतरे की दर से 120 संतरे खरीदे। उसने 60 % संतरे 2.50 रु प्रति संतरे की दर से बेचे तथा शेष संतरे 2 रु प्रति संतरे की दर से बेचे। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल : 120 संतरों का क्र.मू. = 2×120 रु = 240 रु

120 संतरों का 60 % = $\frac{60}{100} \times 120$ संतरे = 72 संतरे

अब 72 संतरों का वि.मू. = 2.50×72 रु = 180 रु

तथा शेष 120 − 72, अर्थात् 48 संतरों की वि.मू. = 2×48 रु = 96 रु

$\therefore$ 120 संतरों का वि.मू. = 180 रु + 96 रु = 276 रु

अतः, लाभ = वि.मू. – क्र. मू. = 276 रु – 240 रु = 36 रु

$\therefore$ लाभ % $= \frac{36}{240} \times 100 = 15$

अतः, अनवर का लाभ 15% है।

उदाहरण 2 : मनिंदर ने दो घोड़े 20000 रु प्रति घोड़े की दर से खरीदे। उसने एक घोड़े को 15% लाभ पर बेच दिया। परंतु दूसरे घोड़े को उसे हानि पर बेचना पड़ा। यदि उसे पूरे सौदे पर 1800 रु की हानि हुई हो, तो दूसरे घोड़े का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : दोनों घोड़ों का क्र.मू. = 2 × 20000 रु = 40000 रु

कुल हानि = 1800 रु

$\therefore$ कुल वि.मू. = 40000 रु – 1800 रु = 38200 रु (1)

अब 15% लाभ से पहले घोड़े का वि.मू.

= क्र.मू. $\left(\frac{100 + \text{लाभ } \%}{100}\right)$

$= 20000 \frac{(100+15)}{100}$ रु = 23000 रु (2)

$\therefore$ दूसरे घोड़े का वि.मू. = 38200 रु – 23000 रु = 15200 रु [(1) और (2) से]

अत: दूसरे घोड़े का वि.मू. 15200 रु है।

उदाहरण 3 : 144 मुर्गियों को बेचने पर मल्लेश्वरी को 6 मुर्गियों के वि.मू. के बराबर की हानि होती है। उसकी हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए 1 मुर्गी का वि.मू. 1 रु है।

$\therefore$ 144 मुर्गियों का वि.मू. = 1 × 144 रु = 144 रु

और हानि = 6 मुर्गियों का वि.मू. = 1 × 6 रु = 6 रु

$\therefore$ 144 मुर्गियों का क्र.मू. = वि.मू. + हानि = 144 रु + 6 रु = 150 रु

अतः, हानि प्रतिशत $= \frac{\text{हानि}}{\text{क्र.मू.}} \times 100 = \frac{6}{150} \times 100 = 4$

अतः, मल्लेश्वरी को 4 % की हानि हुई।

उदाहरण 4 : किसी किसान ने दो बैल 18000 रु प्रति बैल की दर से बेचे। एक बैल पर उसे 20 % का लाभ हुआ तथा दूसरे पर 20 % की हानि हुई। उसका कुल लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

हल : पहले बैल का वि.मू. = 18000 रु, लाभ = 20%

अतः, $$\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 + \text{लाभ}\,\%}$$

$$= \frac{100 \times 18000}{100 + 20} \text{ रु} = 15000 \text{ रु} \qquad (1)$$

दूसरे बैल का वि.मू. = 18000 रु, हानि = 20 %

अतः, $$\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 - \text{हानि}\,\%}$$

$$= \frac{100 \times 18000}{100 - 20} \text{ रु} = 22500 \text{ रु} \qquad (2)$$

अब, कुल क्र.मू. = 15000 रु + 22500 रु = 37500 रु [(1) और (2) से]

तथा कुल वि.मू. = 2 × 18000 रु = 36000 रु

अतः, हानि = क्र.मू. − वि.मू.

= 37500 रु − 36000 रु = 1500 रु

प्रश्नावली 4.1

1. किसी दुकानदार ने 2000 रु प्रति कंबल की दर से 100 कंबल खरीदे। उसे ज्ञात हुआ कि उनमें से 10 कंबल खराब हैं और उसने उन्हें 1200 रु प्रति कंबल की दर से बेच दिया। वह शेष कंबलों को किस दर पर बेचे कि उसे पूरे सौदे पर 14 % का लाभ हो?
2. सरिता और सलमा ने एक-एक भैंस एक ही मूल्य पर खरीदी। सरिता ने अपनी भैंस 14880 रु में बेच कर 7 % हानि उठाई। सलमा अपनी भैंस किस मूल्य पर बेचे कि उसे 5 % लाभ हो?
3. गोरांग ने 48 रु प्रति kg की दर से 60 kg सेब खरीदे। उसने 70 % सेब 60 रु प्रति kg तथा शेष सेब 35 रु प्रति kg की दर से बेच दिए। पूरे सौदे में गोरांग का लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

4. किसी सुनार ने एक थोक विक्रेता से 100 ग्राम सोना 54000 रु में खरीदा। उसने यह सोना 10 % लाभ पर बेच दिया। ज्ञात कीजिए :
   (i) सुनार के लिए 10 ग्राम सोने का वि.मू.
   (ii) थोक विक्रेता के लिए 10 ग्राम सोने का क्र.मू., यदि उसका लाभ 8 % है
5. विलियम 1 क्विंटल गेहूँ 924 रु में बेचकर 12 % लाभ उठाता है। 1 क्विंटल चावल इसी मूल्य पर बेचने से उसे 12 % हानि होती है। ज्ञात कीजिए :
   (i) गेहूँ का क्र.मू.
   (ii) चावल का क्र.मू.
   (iii) पूरे सौदे पर लाभ या हानि प्रतिशत
6. एक ट्राइसिकल 16 % के लाभ पर बेची जाती है। यदि उसे 100 रु अधिक में बेचा जाता, तो लाभ 20 % होता। ट्राइसिकल का क्र.मू. ज्ञात कीजिए।
   [*संकेत :* मान लीजिए क्र.मू. = 100 रु है। दोनों विक्रय मूल्यों का अंतर (120–116) रु = 4 रु इत्यादि।]
7. अहमद ने एक रेडियो 2700 रु में खरीदा और 300 रु उसकी मरम्मत पर व्यय किए। फिर उसने वह रेडियो करीम को 25 % लाभ पर बेच दिया। करीम ने उसे 10 % की हानि पर सुब्रामनियम को बेच दिया। ज्ञात कीजिए :
   (i) करीम के लिए रेडियो का क्र.मू.
   (ii) सुब्रामनियम के लिए रेडियो का क्र.मू.
8. उत्कर्ष ने 20 डाइनिंग (dining) मेजें 120000 रु में खरीदी और उन्हें 4 डाइनिंग मेजों के विक्रय मूल्य के बराबर लाभ पर बेच दिया। 1 डाइनिंग मेज का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
9. योगिता ने एक भूखंड डिम्पी को 20 % लाभ पर बेचा। डिम्पी ने उसे 10 % लाभ पर अंजलि को बेच दिया। यदि अंजलि को इस भूखंड के लिए 330000 रु देने पड़े हों, तो योगिता के लिए भूखंड का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
10. किसी दुकानदार ने 250 बल्ब 10 रु प्रति बल्ब की दर से खरीदे। परंतु इनमें से 12 बल्ब फ्यूज़ हो गए जिन्हें उसे फेंकना पड़ा। उसने शेष बल्ब 12 रु प्रति बल्ब की दर से बेच दिए। इस सौदे में उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
11. किसी कमीज को 4 % और 5 % के लाभों पर बेचे जाने पर उसके विक्रय मूल्यों का अंतर 6 रु है। ज्ञात कीजिए :
    (i) कमीज का क्र.मू. (ii) कमीज के दोनों विक्रय मूल्य

12. तोशिबा ने 100 मुर्गियाँ 8000 रु में खरीदीं और इनमें से 20 को 5 % लाभ पर बेच दिया। शेष मुर्गियों को वह किस लाभ प्रतिशत पर बेचे कि पूरे सौदे पर उसे 20 % लाभ हो?

13. 10 रु की 11 की दर से कुछ टॉफिया खरीदी गईं तथा उतनी ही टॉफियाँ 10 रु की 9 की दर से खरीदी गईं। यदि इन सभी टॉफियों को 1 रु की 1 टॉफी की दर से बेचा गया हो तो पूरे सौदे पर लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

[*संकेत :* मान लीजिए खरीदी गई टॉफियों की संख्या 11 और 9 का LCM है।]

14. शबाना ने 16 दर्जन बॉल पेन खरीदे और उन्हें 8 बॉल पेनों के वि.मू. के बराबर हानि पर बेच दिया। ज्ञात कीजिए :

(i) उसकी हानि प्रतिशत

(ii) 1 दर्जन बॉल पेनों का वि.मू., यदि उसने 16 दर्जन बॉल पेन 576 रु में खरीदे थे।

15. मरियम ने दो पंखे 3605 रु में खरीदे। इनमें से एक को उसने 15 % लाभ पर बेचा तथा दूसरे को 9 % की हानि पर बेचा। यदि प्रत्येक पंखे के लिए उसे समान मूल्य प्राप्त हुआ, तो प्रत्येक पंखे का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

[*संकेत :* मान लीजिए पहले पंखे का क्र.मू. x रु है। तब, दूसरे पंखे का क्र.मू. $(3605 - x)$ रु होगा।]

4.3 बट्टा

यद्यपि खरीदना और बेचना एक सरल कार्य प्रतीत होता है, परंतु वास्तव में यह इतना सरल है नहीं। दुकानदार अपने माल के लिए अधिक से अधिक मूल्य प्राप्त करना चाहते हैं, जबकि ग्राहक उसी माल के लिए कम से कम संभव मूल्य देना चाहता है। दुकानदार ग्राहकों को आकर्षित करने के लिए अनेक योजनाएँ बनाते हैं। उधार पर वस्तुएँ बेचना एक ऐसी ही योजना है। परंतु वास्तविकता यह है कि दुकानदार अपने माल का नकद मूल्य प्राप्त करना अधिक पसंद करते हैं। कभी-कभी वे ग्राहकों को एक प्रकार की छूट या प्रोत्साहन प्रदान करते हैं। ये प्रोत्साहन ग्राहकों को यह विश्वास दिलाने के लिए दिए जाते हैं कि वे माल सस्ते में खरीद रहे हैं। दुकानदार ग्राहकों को प्रोत्साहन विभिन्न रूपों में देते हैं। उदाहरणार्थ, आपकों निम्न प्रकार के विज्ञापन देखने को मिल सकते हैं :

'अब केवल 1 kg के मूल्य पर 1100 g डिटरजैंट लीजिए।'

'प्रत्येक 500 g चाय के पैकट के साथ 1 मग मुफ्त।'

'प्रत्येक चादर पर 10 % त्योहार बट्टा।'

या 'आपके मन पसंद नहाने के साबुन पर 2 रु की कमी' इत्यादि।

इस प्रकार, प्रोत्साहन कभी-कभी किसी वस्तु के साथ लगे (जुड़े) मूल्य (जिसे दुकानदार ग्राहक को उस वस्तु का मूल्य बताता है) में कमी करके भी दिया जाता है। यह लगा हुआ मूल्य उस वस्तु का *अंकित मूल्य* [*Marked Price (M.P.)*] या *सूची मूल्य* [*List Price (L.P.)*] कहलाता है तथा मूल्य में की गई कमी *बट्टा* (*discount*) कहलाती है। इसे प्राय: अंकित मूल्य के एक विशेष प्रतिशत के रूप में दिया जाता है। ग्राहक अंकित मूल्य और बट्टे के अंतर के बराबर राशि दुकानदार को देता है। अर्थात् ग्राहक वास्तव में (अंकित मूल्य - बट्टे) के बराबर की राशि का भुगतान करता है। अत:, यह राशि वस्तु का विक्रय मूल्य (वि.मू.) होगी।

इस प्रकार, बट्टा = अंकित मूल्य - विक्रय मूल्य (1)

साथ ही, $\text{बट्टे की दर} = \text{बट्टा}\ \% = \dfrac{\text{बट्टा}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$ (2)

अब, विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य - बट्टा [(1) से]

$\therefore$ $\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} - \dfrac{\text{बट्टा}\ \% \times \text{अंकित मूल्य}}{100}$ [(2) से]

या $\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} \times \left(1 - \dfrac{\text{बट्टा}\ \%}{100}\right)$

या $\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} \times \left(\dfrac{100 - \text{बट्टा}\ \%}{100}\right)$ (3)

उपर्युक्त (3) से, हम सरलता से देख सकते हैं कि

$$\text{अंकित मूल्य} = \frac{100 \times \text{विक्रय मूल्य}}{100 - \text{बट्टा}\ \%} \quad (4)$$

आइए, उपर्युक्त विचारों को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 5 : एक पुस्तक का अंकित मूल्य 30 रु है। यह 15 % बट्टे पर बेची जाती है। इस पुस्तक पर दिया गया बट्टा और उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : पुस्तक का अंकित मूल्य = 30 रु

बट्टे की दर = 15 %

$\therefore$ दिया गया बट्टा = 30 रु का 15 % = $\frac{15}{100} \times 30$ रु = 4.50 रु

अतः, पुस्तक का विक्रय मूल्य = 30 रु − 4.50 रु = 25.50 रु

उदाहरण 6 : एक मेज जिसका अंकित मूल्य 1200 रु था, एक ग्राहक को 1100 रु में बेची गई। मेज पर दिए गए बट्टे की दर ज्ञात कीजिए।

हल : अंकित मूल्य = 1200 रु

वि.मू. = 1100 रु

$\therefore$ बट्टा = (1200 − 1100) रु = 100 रु

$\therefore$ बट्टे की दर = $\frac{\text{बट्टा}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100\%$

$$= \frac{100}{1200} \times 100\% = 8\frac{1}{3}\%$$

उदाहरण 7 : अंकित मूल्य पर 15 % बट्टा देने के बाद एक कमीज 442 रु में बेची गई। इस कमीज का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए अंकित मूल्य x रु है।

बट्टा = x रु का 15 %

$$= \frac{15}{100} \times x \text{ रु} = \frac{3x}{20} \text{ रु}$$

$\therefore$ वि.मू. = $\left(x - \frac{3x}{20}\right)$ रु = $\frac{17x}{20}$ रु

दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार,

$$\frac{17x}{20} = 442$$

या $$x = \frac{442 \times 20}{17} = 520$$

अतः, कमीज का अंकित मूल्य 520 रु है।

उदाहरण 8 : कोई दुकानदार अपने ग्राहकों को 10 % का *ऑफ़ सीज़न* (*off season*) बट्टा देता है और फिर भी 26 % का लाभ अर्जित करता है। दुकानदार के लिए उस जूतों के जोड़े का क्रय मूल्य क्या है, जिसका अंकित मूल्य 1120 रु है?

हल : अंकित मूल्य = 1120 रु

बट्टे की दर = 10 %

$\therefore$ दिया गया बट्टा $= \frac{10}{100} \times 1120 =$ 112 रु

अत:, जूतों के जोड़े का विक्रय मूल्य = (1120 – 112) रु = 1008 रु

अब दुकानदार का लाभ % = 26

अत:, $$\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 + \text{लाभ}\,\%}$$

$$= \frac{100 \times 1008}{100 + 26} = \frac{100 \times 1008}{126} \text{ रु} = 800 \text{ रु}$$

इस प्रकार, जूतों के जोड़े का क्रय मूल्य 800 रु है।

उदाहरण 9 : ज्योति और मीना एक बने-बनाए (रेडीमेड) वस्त्रों की दुकान चलाती हैं। वे इन वस्त्रों का मूल्य इस प्रकार अंकित करती हैं कि 12.5 % का बट्टा देने के बाद भी उन्हें 10 % का लाभ होता है। उस सूट का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए, जिसकी लागत उन्हें 1470 रु आई है।

हल : सूट का क्र.मू. = 1470 रु

$\therefore$ लाभ = 1470 रु का 10 %

$$= \frac{10}{100} \times 1470 \text{ रु} = 147 \text{ रु}$$

$\therefore$ सूट का वि.मू. = (1470 + 147) रु = 1617 रु

मान लीजिए अंकित मूल्य 100 रु है। तब,

बट्टा = 100 रु का 12.5 % = 12.50 रु

$\therefore$ वि.मू. = (100 – 12.50) रु = 87.50 रु

अब यदि वि.मू. 87.50 रु है, तो अंकित मूल्य = 100 रु

$\therefore$ यदि वि.मू. 1617 रु है, तो अंकित मूल्य $= \frac{100}{87.50} \times 1617$ रु $= 1848$ रु

इस प्रकार, सूट का अंकित मूल्य 1848 रु है।

अंकित मूल्य के लिए वैकल्पिक विधि :

मान लीजिए अंकित मूल्य x रु है।

हम जानते हैं कि

$$\text{अंकित मूल्य} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 - \text{बट्टा \%}} \qquad [(4) \text{ से}]$$

या
$$x = \frac{100 \times 1617}{(100 - 12.5)} = \frac{161700}{87.5} = 1848$$

इस प्रकार, सूट का अंकित मूल्य 1848 रु है।

प्रश्नावली 4.2

1. विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए, यदि
   (i) अंकित मूल्य = 320 रु और बट्टा = 12.5 % है।
   (ii) अंकित मूल्य = 990 रु और बट्टा = 10 % है।
2. बट्टे की दर ज्ञात कीजिए, यदि
   (i) अंकित मूल्य = 250 रु और विक्रय मूल्य = 235 रु है।
   (ii) अंकित मूल्य = 1880 रु और विक्रय मूल्य = 1504 रु है।
3. अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए, यदि
   (i) वि.मू. = 1920 रु और बट्टा 4 % है।
   (ii) वि.मू. = 2970 रु और बट्टा 1 % है।
4. सिलाई मशीनों के अंकित मूल्य पर 3 % का एक बट्टा दिया जाता है। उस सिलाई मशीन के लिए एक ग्राहक को कितनी नकद राशि देनी होगी जिसका अंकित मूल्य 1300 रु है।
5. किसी स्कूटर का सूची मूल्य 35000 रु है। वह 8 % के एक बट्टे पर उपलब्ध है। उस स्कूटर का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. अंकित मूल्य 1500 रु वाली एक मेज बट्टा देने के बाद 1080 रु में बेची जाती है। बट्टे की दर ज्ञात कीजिए।

7. उस अलमारी का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए जो 5 % का बट्टा देने के बाद 5225 रु में बेची जाती है।

8. चंदू ने एक घड़ी अंकित मूल्य पर 20 % का बट्टा प्राप्त करने के बाद खरीदी और उसे अंकित मूल्य पर बेच दिया। इस सौदे पर चंदू को प्राप्त लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

9. कोई महिला दुकानदार अपने ग्राहकों को अंकित मूल्य पर 10 % का बट्टा देती है और फिर भी उसे 25 % का लाभ होता है। महिला दुकानदार के लिए उस पंखे का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए जिसका अंकित मूल्य 1250 रु है।

10. जैसमीन अपने माल के अंकित मूल्य पर 4 % का बट्टा देती है और फिर भी 20 % का लाभ अर्जित करती है। जैसमीन के लिए उस कमीज़ का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए जिसका अंकित मूल्य 850 रु है।

11. एक व्यापारी उस वस्तु का मूल्य क्या अंकित करे, जो उसे 918 रु में प्राप्त हुई है, ताकि 15 % का बट्टा देने के बाद भी उसे 20 % का लाभ हो?

12. सुनीता उस साड़ी का क्या मूल्य अंकित करे, जो उसे 2200 रु में प्राप्त हुई है, ताकि 12% का बट्टा देने के बाद भी उसे 26 % का लाभ हो?

13. एक साइकिल विक्रेता साइकिलों के अंकित मूल्य पर 25 % का बट्टा देता है और फिर भी 20 % का लाभ अर्जित करता है। यदि उसे एक साइकिल बेचने पर 360 रु का लाभ हो, तो उस साइकिल का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।
[*संकेत :* पहले साइकिल का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।]

14. असलम जूतों के एक जोड़े का मूल्य क्या अंकित करे, जो उसने 1200 रु में खरीदा है, ताकि 16 % का बट्टा देने के बाद भी उसे 12 % का लाभ हो?

15. एक व्यापारी वैज्ञानिक यंत्रों के अंकित मूल्य पर 20 % का बट्टा देने के बाद भी 25 % लाभ अर्जित करता है। जिस यंत्र की बिक्री पर उसे 150 रु का लाभ हुआ हो, उस यंत्र का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. लाभ की स्थिति में,

$$\text{वि.मू.} = \text{क्र.मू.} \times \left(\frac{100 + \text{लाभ } \%}{100}\right)$$

$$\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 + \text{लाभ } \%}$$

2. हानि की स्थिति में,

$$\text{वि.मू.} = \text{क्र.मू.} \times \left(\frac{100 - \text{हानि } \%}{100}\right)$$

$$\text{क्र.मू.} = \frac{100 \times \text{वि.मू.}}{100 - \text{हानि } \%}$$

3. बट्टा प्राय: अंकित मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

4. बट्टा = अंकित मूल्य - विक्रय मूल्य

5. बट्टे की दर = बट्टा % = $\frac{\text{बट्टा}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$

6. विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य $\times \left(\frac{100 - \text{बट्टा } \%}{100}\right)$

7. अंकित मूल्य = $\frac{100 \times \text{विक्रय मूल्य}}{100 - \text{बट्टा } \%}$

अध्याय

चक्रवृद्धि ब्याज

5.1 भूमिका

कक्षा VII में, आप साधारण ब्याज के बारे में पढ़ चुके हैं। आपको याद होगा कि साधारण ब्याज की स्थिति में, ब्याज संपूर्ण ऋण अवधि में केवल प्रारंभिक उधार लिए गए धन (मूलधन) पर ही लिया जाता है। परंतु दैनिक जीवन के क्रियाकलापों में, साधारण ब्याज बहुत कम स्थितियों में ही लिया/दिया जाता है। बैंकों, डाकघरों, बीमा निगमों एवं अन्य वित्तीय संस्थाओं द्वारा लिया/दिया जाने वाला ब्याज साधारण ब्याज नहीं होता है। इन स्थितियों में, एक निर्धारित समय काल (अवधि) के बाद देय ब्याज और अधिक ब्याज अर्जित करने के लिए पुनः निवेशित कर दिया जाता है। इस प्रकार, मूलधन में ब्याज को जोड़कर *नया* मूलधन बना दिया जाता है, जिसे अगली समय अवधि के लिए पुनः निवेशित किया जा सकता है। इस प्रक्रिया को अनेक समय अवधियों के लिए दोहराया जा सकता है। प्रारंभिक मूलधन और अंतिम समय अवधि के अंत में प्राप्त होने वाले मिश्रधन का अंतर उस समय अवधि के लिए प्रारंभिक मूलधन पर *चक्रवृद्धि ब्याज* (*compound interest*) कहलाता है।

वह समय अवधि, जिसके बाद ब्याज नया मूलधन बनाने के लिए प्रत्येक बार जोड़ा जाता है, *रूपांतरण अवधि* (*conversion period*) कहलाती है।

यह अवधि एक वर्ष, छः मास, तीन मास या एक मास हो सकती है। इन स्थितियों में, क्रमशः यह कहा जाता है कि ब्याज वार्षिक, अर्धवार्षिक, त्रैमासिक या मासिक *संयोजित* (*compounded*) है।

इस अध्याय में, हम चक्रवृद्धि ब्याज की संकल्पना तथा मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज को परिकलित करने की विधियों की चर्चा करेंगे। इसके लिए, हम केवल उन्हीं स्थितियों को लेंगे जिनमें ब्याज *वार्षिक संयोजित* होता है।

5.2 चक्रवृद्धि ब्याज

चक्रवृद्धि ब्याज की संकल्पना को समझने के लिए, पहले हम साधारण ब्याज का एक उदाहरण लेते हैं। मान लें कि 5000 रु की एक राशि 8 % वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए उधार ली जाती है। इस राशि पर कुल ब्याज कितना होगा?

हम जानते हैं कि

साधारण ब्याज $= \frac{P \times R \times T}{100}$,

जहाँ P मूलधन है, R प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर है तथा T वर्षों की संख्या है। इस प्रकार,

साधारण ब्याज $= \frac{5000 \times 8 \times 2}{100}$ रु = 800 रु

आइए, अब निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें :

हर्ष किसी वित्त कंपनी से 8 % वार्षिक की दर से एक वर्ष के लिए 5000 रु उधार लेता है। तब, एक वर्ष के अंत में, हर्ष द्वारा उस कंपनी को दी जाने वाली राशि होगी :

(i) उधार ली गई राशि (मूलधन) = 5000 रु

और (ii) 5000 रु पर 8 % वार्षिक की दर से एक वर्ष का ब्याज

$= \frac{5000 \times 8 \times 1}{100}$ रु = 400 रु

इस प्रकार, हर्ष द्वारा कंपनी को देय राशि = 5000 रु + 400 रु = 5400 रु

मान लीजिए, किसी कारणवश, हर्ष कंपनी को यह राशि देने में असमर्थ है। स्पष्ट है कि कंपनी अब उससे 5400 रु पर ब्याज लेगी। इस प्रकार, दूसरे वर्ष के लिए मूलधन 5400 रु होगा, जो पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन है।

दूसरे वर्ष के अंत में, हर्ष द्वारा उस कंपनी को दी जाने वाली राशि होगी :

(i) नया मूलधन = 5400 रु

और (ii) 5400 रु पर 8 % वार्षिक की दर से एक वर्ष का ब्याज

$= \frac{5400 \times 8 \times 1}{100}$ रु = 432 रु

इस प्रकार, अब हर्ष द्वारा कंपनी को देय राशि = 5400 रु + 432 रु = 5832 रु

अतः, कंपनी को देय कुल ब्याज = 5832 रु – 5000 रु = 832 रु

उपर्युक्त प्रकार से परिकलित किया ब्याज *चक्रवृद्धि ब्याज* (*compound interest*) कहलाता है। इस स्थिति में, 832 रु, मूलधन 5000 रु पर 8 % वार्षिक की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज है।

ध्यान दीजिए कि 5000 रु पर उसी समय अवधि (2 वर्ष) के लिए तथा उसी ब्याज की दर (8 %) से साधारण ब्याज 800 रु था, जबकि चक्रवृद्धि ब्याज 832 रु है। अर्थात् चक्रवृद्धि ब्याज, साधारण ब्याज से (832 – 800) रु या 32 रु अधिक है। यह अंतर इस कारण है कि चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में, हमने पहले वर्ष के साधारण ब्याज 400 रु को मूलधन 5000 रु में जोड़कर (5000 + 400) रु, अर्थात् 5400 रु को दूसरे वर्ष के लिए *नया मूलधन* मान लिया था। दूसरे शब्दों में, चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में, दूसरे वर्ष के लिए ब्याज पहले वर्ष के ब्याज पर भी लिया गया है।

आप इस तथ्य की जाँच कर सकते हैं कि चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर 32 रु पहले वर्ष के ब्याज 400 रु पर एक वर्ष के ब्याज के बराबर है।

टिप्पणियाँ :

1. साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में मुख्य अंतर यह है कि साधारण ब्याज की स्थिति में मूलधन सदैव अचर रहता है, जबकि चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में वह विभिन्न समय अवधियों बाद बदलता रहता है।

2. चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में, दूसरे वर्ष के लिए मूलधन पहले वर्ष के मूलधन और उस पर पहले वर्ष के साधारण ब्याज के योग के बराबर होता है। इसी प्रकार, तीसरे वर्ष के लिए मूलधन दूसरे वर्ष के मूलधन और उस पर दूसरे वर्ष के साधारण ब्याज के योग के बराबर होता है, इत्यादि।

3. किसी दिए हुए मूलधन, दर और समय के लिए, प्रायः चक्रवृद्धि ब्याज साधारण ब्याज से अधिक होता है। पहले वर्ष के लिए साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज बराबर होते हैं (यदि ब्याज वार्षिक परिकलित किया जाता है)।

4. उपर्युक्त उदाहरण में, ब्याज वार्षिक रूप से परिकलित किया गया था। जैसा कि पहले भी बताया जा चुका है, इसके लिए कहा जाता है कि ब्याज *प्रति वर्ष* (*या वार्षिक*) *संयोजित* (*compounded annually*) है।

5. इसी प्रकार की प्रक्रिया एक दी हुई राशि पर 2 वर्षों से अधिक के लिए चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित करने के लिए की जाती है।

आइए, कुछ उदाहरणों पर विचार करें :

उदाहरण 1 : 8000 रु पर 2 वर्ष का 6 % वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : आइए पहले 100 रु पर 2 वर्ष का 6 % वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें।

100 रु पर 1 वर्ष का 6 % वार्षिक की दर से ब्याज = 6 रु

इस प्रकार, पहले वर्ष के लिए,

मूलधन = 100 रु

ब्याज = 6 रु

$\therefore$ मिश्रधन = 106 रु

यह मिश्रधन दूसरे वर्ष के लिए नया मूलधन बन जाता है।

दूसरे वर्ष के लिए,

मूलधन = 106 रु

ब्याज = $\frac{106 \times 6 \times 1}{100}$ रु = 6.36 रु

$\therefore$ मिश्रधन = 106 रु + 6.36 रु = 112.36 रु

इस प्रकार, चक्रवृद्धि ब्याज = 112.36 रु - 100 रु

= 12.36 रु

अब, 100 रु पर चक्रवृद्धि ब्याज = 12.36 रु

$\therefore$ 1 रु पर चक्रवृद्धि ब्याज = $\frac{12.36}{100}$ रु

अतः, 8000 रु पर चक्रवृद्धि ब्याज = $\frac{12.36 \times 8000}{100}$ रु = 988.80 रु

उदाहरण 2 : 20000 रु पर 3 वर्षों के लिए 10 % वार्षिक की दर से मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम 100 रु पर 3 वर्ष का 10 % वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करते हैं।

100 रु पर 10 % की दर से 1 वर्ष का ब्याज = 10 रु

इस प्रकार, पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन = (100 + 10) रु = 110 रु

यह दूसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है।

$\therefore$ दूसरे वर्ष के लिए ब्याज $= \left(\frac{110 \times 10 \times 1}{100}\right) =$ 11 रु

$\therefore$ दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन = 110 रु + 11 रु = 121 रु

पुनः, यह तीसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है।

$\therefore$ तीसरे वर्ष के लिए ब्याज $= \left(\frac{121 \times 10 \times 1}{100}\right)$ रु = 12.10 रु

$\therefore$ तीसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन = 121 रु + 12.10 रु = 133.10 रु

$\therefore$ चक्रवृद्धि ब्याज = 133.10 रु − 100 रु = 33.10 रु

अब, 100 रु पर मिश्रधन = 133.10 रु

$\therefore$ 1 रु पर मिश्रधन $= \frac{133.10}{100}$ रु

अतः, 20000 रु पर मिश्रधन $= \frac{133.10}{100} \times 20000$ रु = 26620 रु

चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन − मूलधन

= 26620 रु − 20000 रु = 6620 रु

इस प्रकार, वांछित मिश्रधन 26620 रु है तथा चक्रवृद्धि ब्याज 6620 रु है।

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त उदाहरणों में, हमने पहले 100 रु पर मिश्रधन/चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित किया है और फिर दिए हुए मूलधन पर मिश्रधन/चक्रवृद्धि ब्याज परकलित करने के लिए *ऐकिक विधि* (*Unitary Method*) का प्रयोग किया है। हम किसी दी हुई राशि के लिए मिश्रधन/चक्रवृद्धि ब्याज सीधे भी ज्ञात कर सकते हैं, जैसा कि अगले उदाहरण में दर्शाया गया है।

उदाहरण 3 : सुरभि ने एक रेफ्रीजरेटर खरीदने के लिए एक वित्त कंपनी से 12000 रु उधार लिए। यदि ब्याज की दर 5 % वार्षिक है तथा ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है, तो सुरभि द्वारा 3 वर्ष के बाद कंपनी को दिया जाने वाला चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित कीजिए।

हल : पहले वर्ष के लिए मूलधन = 12000 रु

$\therefore$ पहले वर्ष के लिए ब्याज $= \frac{12000 \times 5 \times 1}{100}$ रु = 600 रु

$\therefore$ पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन = 12000 रु + 600 रु = 12600 रु

जो दूसरे वर्ष के लिए मूलधन है।

अब, दूसरे वर्ष के लिए ब्याज = $\left(\frac{12600 \times 5 \times 1}{100}\right)$ रु = 630 रु

$\therefore$ दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन = 12600 रु + 630 रु = 13230 रु, जो तीसरे वर्ष के लिए मूलधन है।

अब, तीसरे वर्ष के लिए ब्याज = $\left(\frac{13230 \times 5 \times 1}{100}\right)$ रु = 661.50 रु

$\therefore$ तीसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन = 13230 रु + 661.50 रु = 13891.50 रु

$\therefore$ तीसरे वर्ष के बाद चक्रवृद्धि ब्याज = तीसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन – प्रारंभिक मूलधन

= 13891.50 रु + 12000 रु = 1891.50 रु

टिप्पणी : तीन वर्ष के बाद चक्रवृद्धि ब्याज पहले, दूसरे एवं तीसरे वर्षों के ब्याजों को जोड़कर (600 रु + 630 रु + 661.50 रु) भी प्राप्त किया जा सकता है।

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित के लिए चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित कीजिए:

   (i) 1500 रु पर 2 वर्ष के लिए 6 % वार्षिक की दर से।

   (ii) 2860 रु पर 2 वर्ष के लिए 5 % वार्षिक की दर से।

   (iii) 3000 रु पर 2 वर्ष के लिए 5 % वार्षिक की दर से।

   (iv) 5000 रु पर 2 वर्ष के लिए 10 % वार्षिक की दर से।

   (v) 8500 रु पर 2 वर्ष के लिए 8 % वार्षिक की दर से।

2. 8000 रु पर $12\frac{1}{2}\%$ वार्षिक की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

3. 10000 रु पर 10 % वार्षिक की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

4. सलमा ने किसी संस्था में 9.5 % वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए 6250 रु जमा किए। 2 वर्षों के बाद उसको प्राप्त होने वाला मिश्रधन परिकलित कीजिए।

5. 28000 रु पर 5 % वार्षिक की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

6. 15625 रु की एक राशि पर 4 % वार्षिक की दर से 3 वर्ष का मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

7. वासुदेवन ने 8000 रु की एक राशि 9% वार्षिक ब्याज की दर से निवेशित की। 3 वर्षों के बाद उसको प्राप्त होने वाला मिश्रधन ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

8. दलजीत को एक वित्तीय कंपनी से 40000 रु का एक ऋण प्राप्त हुआ। यदि ब्याज की दर प्रति वर्ष संयोजित 7 % वार्षिक है, तो दलजीत द्वारा 2 वर्षों के बाद देय चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित कीजिए।

9. आरिफ ने, अपनी दुकान को नया स्वरूप देने के लिए, किसी बैंक से 8000 रु का एक ऋण लिया। यदि ब्याज की दर प्रति वर्ष संयोजित 5 % वार्षिक है, तो तीन वर्षों के बाद आरिफ द्वारा देय चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित कीजिए।

10. अनिल ने अपनी दुग्धशाला में एक हैंडपंप लगवाने के लिए 9600 रु की एक राशि उधार ली। यदि ब्याज की दर प्रति वर्ष संयोजित $5\frac{1}{2}\%$ वार्षिक है, तो तीन वर्षों के बाद अनिल द्वारा देय चक्रवृद्धि ब्याज निर्धारित कीजिए।

11. मारिया 93750 रु की राशि 3 वर्षों के लिए 9.6 % वार्षिक की दर से निवेशित करती है, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है। परिकलित कीजिए :

    (i) दूसरे वर्ष के अंत में उसे प्राप्त होने वाला मिश्रधन।

    (ii) तीसरे वर्ष के लिए ब्याज।

5.3 चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने के लिए सूत्र

आइए, पिछले अनुच्छेद में दिए गए उदाहरणों 1 और 2 पर पुनः विचार करें। आप देख सकते हैं कि जैसे–जैसे समय अवधि बढ़ती है, वैसे–वैसे ब्याज परिकलित करने की प्रक्रिया अधिक लंबी होती जाती है तथा इसमें समय भी अधिक लगता है। अतः हमें चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित करने के लिए कोई सूत्र निर्धारित करने का प्रयत्न करना चाहिए।

उदाहरण 1 में, हम मिश्रधन का परिकलन निम्न प्रकार से भी कर सकते हैं :

पहले वर्ष के लिए ब्याज $= \left(\frac{8000 \times 6 \times 1}{100}\right)$ रु

$\therefore$ पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन $= 8000$ रु $+ \left(\frac{8000 \times 6 \times 1}{100}\right)$ रु

$$= 8000\left(1 + \frac{6}{100}\right) \text{ रु} \qquad (1)$$

परंतु, मिश्रधन (1) दूसरे वर्ष के लिए मूलधन हो जाता है।

$\therefore$ दूसरे वर्ष के लिए ब्याज $= 8000\left(1 + \frac{6}{100}\right) \times \frac{6 \times 1}{100}$ रु

$\therefore$ दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन $= \left[8000\left(1 + \frac{6}{100}\right) + 8000\left(1 + \frac{6}{100}\right) \times \frac{6}{100}\right]$ रु

$$= 8000\left(1 + \frac{6}{100}\right)\left(1 + \frac{6}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= 8000\left(1 + \frac{6}{100}\right)^2 \text{ रु} \qquad (2)$$

उदाहरण 2 में, हम मिश्रधन का परिकलन निम्न प्रकार भी कर सकते हैं:

पहले वर्ष के लिए ब्याज $= \left(\frac{20000 \times 10 \times 1}{100}\right)$ रु

$\therefore$ पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन $= \left(20000 + \frac{20000 \times 10 \times 1}{100}\right)$ रु

$$= 20000\left(1 + \frac{10}{100}\right) \text{ रु} \qquad (3)$$

परंतु, मिश्रधन (3) दूसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है।

$\therefore$ दूसरे वर्ष के लिए ब्याज $= 20000\left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \frac{10 \times 1}{100}$ रु

$\therefore$ दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन $= \left[20000\left(1 + \frac{10}{100}\right) + 20000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \frac{10}{100}\right]$ रु

$$= 20000\left(1 + \frac{10}{100}\right)\left(1 + \frac{10}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= 20000 \left(1+\frac{10}{100}\right)^2 \text{ रु} \qquad (4)$$

परंतु, मिश्रधन (4) तीसरे वर्ष के लिए मूलधन बन जाता है।

$\therefore$ तीसरे वर्ष के लिए ब्याज $= 20000 \left(1+\frac{10}{100}\right)^2 \times \frac{10}{100}$ रु

और तीसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन $= \left[20000 \left(1+\frac{10}{100}\right)^2 + 20000 \left(1+\frac{10}{100}\right)^2 \times \frac{10}{100}\right]$ रु

$$= 20000 \left(1+\frac{10}{100}\right)^2 \left(1+\frac{10}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= 20000 \left(1+\frac{10}{100}\right)^3 \text{ रु} \qquad (5)$$

ध्यान दीजिए कि

उदाहरण 1 में, ब्याज की दर = 6 %, वर्षों की संख्या = 2, मूलधन = 8000 रु तथा मिश्रधन A निम्न से प्राप्त होता है :

$$A = 8000\left(1+\frac{6}{100}\right)^2 \text{ रु} \qquad \text{[उपर्युक्त (2) से]}$$

उदाहरण 2 में, ब्याज की दर = 10%, वर्षों की संख्या = 3, मूलधन = 20000 रु तथा मिश्रधन A निम्न से प्राप्त होता है :

$$A = 20000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 \text{ रु.} \qquad \text{[उपर्युक्त (5) से]}$$

उपर्युक्त चर्चा के आधार पर, हम कह सकते हैं कि

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \qquad (I)$$

जहाँ A अंतिम समय अवधि (अर्थात् वर्ष) के बाद का मिश्रधन है, P मूलधन, r प्रतिशत वार्षिक ब्याज दर तथा n वर्षों की संख्या है। चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में, सूत्र (I) के प्रयोग से हम मिश्रधन प्राप्त कर सकते हैं। अब चक्रवृद्धि ब्याज निम्न प्रकार निर्धारित किया जा सकता है :

चक्रवृद्धि ब्याज $= A - P$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P \qquad \text{[(I) का प्रयोग करने पर]}$$

$$= P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right] \quad \text{(II)}$$

उपर्युक्त सूत्रों का प्रयोग स्पष्ट करने के लिए, हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 4 : 6000 रु 2 वर्ष के लिए 5 % वार्षिक ब्याज की दर से उधार दिए गए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है। इस राशि पर प्राप्त मिश्रधन, ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $P = 6000$ रु, $r = 5$ और $n = 2$ है।

मिश्रधन परिकलित करने के लिए, सूत्र (I) का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 6000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2 \text{ रु}$$

$$= 6000\left(\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= \left(6000\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}\right) \text{ रु}$$

$$= 6615 \text{ रु}$$

अतः, वांछित मिश्रधन 6615 रु है।

इस उदाहरण में, हमने स्पष्ट रूप से यह कहा है कि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित है। परंतु यदि ऐसा कुछ भी न कहा जाए, तो समझा जाता है कि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

उदाहरण 5 : 25600 रु पर 6.25 % वार्षिक की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : हमें ज्ञात है : $P = 25600$ रु, $r = 6.25$ और $n = 2$

[सूत्र (II) से]

$$= \left[25600\left\{\left(\frac{17}{16}\right)\left(\frac{17}{16}\right)-1\right\}\right] \text{ रु}$$

$$= \left[25600\,\frac{(289-256)}{256}\right] \text{ रु}$$

$$= \frac{25600\times 33}{256} \text{ रु} = 3300 \text{ रु}$$

उदाहरण 6 : 16000 रु पर 3 वर्ष का मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि वार्षिक ब्याज की दर 2% है।

हल : यहाँ P = 16000 रु, $n = 3$ और $r = 2$ है।

$\therefore$ मिश्रधन $= 16000\left(1 + \frac{2}{100}\right)^3$ रु [सूत्र (I) से]

$$= 16000\left(\frac{102}{100}\right)\left(\frac{102}{100}\right)\left(\frac{102}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= 16000\left(\frac{51}{50}\right)\left(\frac{51}{50}\right)\left(\frac{51}{50}\right) \text{ रु} = 16979.33 \text{ रु (लगभग)}$$

तथा चक्रवृद्धि ब्याज = (16979.33 − 16000) रु = 979.33 रु (लगभग)

उदाहरण 7 : किसी धनराशि पर $6\frac{1}{4}$ % वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष का साधारण ब्याज 2400 रु है। इसी धनराशि पर इसी ब्याज की दर से इसी समय अवधि का चक्रवृद्धि ब्याज क्या होगा?

हल : मान लीजिए धनराशि P रु है। तब,

$$\frac{P\times\frac{25}{4}\times 3}{100} = 2400 \qquad \left[\text{सूत्र S.I. } \frac{P\times R\times T}{100} \text{ का प्रयोग करने पर}\right]$$

या $$P = \frac{240000\times 4}{75} = 12800$$

अब 12800 रु पर $6\frac{1}{4}$ % वार्षिक की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज

$$= \left[12800\left\{\left(1+\frac{25}{400}\right)^3 - 1\right\}\right] \text{ रु}$$ [सूत्र (II) से]

$$= \left[12800\left\{\left(1+\frac{1}{16}\right)^3 - 1\right\}\right] \text{ रु}$$

$$= \left[12800\left\{\frac{17}{16} \times \frac{17}{16} \times \frac{17}{16} - 1\right\}\right] \text{ रु}$$

$$= 12800 \left\{\frac{4913}{4096} - 1\right\} \text{ रु}$$

$$= 12800 \left(\frac{817}{4096}\right) \text{ रु} = 2553.13 \text{ रु (लगभग)}$$

उदाहरण 8 : किसी धनराशि पर 10 % वार्षिक की दर से 2 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर 300 रु है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए व धनराशि P रु है।

10% वार्षिक की दर से P रु पर 2 वर्ष का साधारण ब्याज

$$= \frac{P \times 10 \times 2}{100} \text{ रु.} = \frac{P}{5} \text{ रु} \qquad (1)$$

10% वार्षिक की दर से P रु पर 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज

$$= P\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 - 1\right] \text{ रु}$$

$$= P\left[\frac{11}{10} \times \frac{11}{10} - 1\right] \text{ रु}$$

$$= P\left(\frac{121-100}{100}\right) \text{ रु} = \frac{21P}{100} \text{ रु} \qquad (2)$$

दिया है कि चक्रवृद्धि ब्याज − साधारण ब्याज = 300 रु

$$\therefore \quad \frac{21P}{100} - \frac{P}{5} = 300$$ [(1) और (2) से]

या $$\frac{21P-20P}{100} = 300$$

या $21P - 20P = 30000$

या $P = 30000$

अतः, वांछित धनराशि 30000 रु है।

उदाहरण 9 : कोई धनराशि 8 % वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्षों में 5832 रु हो जाती है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ A = 5832 रु, $r = 8$ और $n = 2$ है।

मान लीजिए वांछित धनराशि P रु है।

$\therefore \quad 5832 = P\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$ [सूत्र (I) से]

या $5832 = P\left(\frac{108}{100}\right)^2$

या $5832 = P\left(\frac{27}{25}\right)\left(\frac{27}{25}\right)$

$\therefore \quad P = \frac{5832 \times 25 \times 25}{27 \times 27} = 5000$

अतः, वांछित धनराशि 5000 रु है।

उदाहरण 10 : कितने प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 1000 रु की धनराशि का 2 वर्षों में मिश्रधन 1102.50 रु हो जाएगा?

हल : मान लीजिए वार्षिक ब्याज की दर r प्रतिशत है।

यहाँ A = 1102.50 रु, P = 1000 रु और $n = 2$ है।

$\therefore \quad 1102.50 = 1000\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ [सूत्र (I) से]

या $\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 = \frac{1102.50}{1000}$

या $\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 = \frac{441}{400} = \left(\frac{21}{20}\right)^2$

$\therefore \quad 1+\frac{r}{100} = \frac{21}{20}$

या $\quad \frac{r}{100} = \frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$

या $\quad r = 5$

अत: वांछित ब्याज की दर 5 % वार्षिक है।

उदाहरण 11 : 1800 रु पर 10 % वार्षिक की दर से किसी समय अवधि के लिए चक्रवृद्धि ब्याज 378 रु है। वह समय अवधि ज्ञात कीजिए।

हल : मूलधन = 1800 रु और चक्रवृद्धि ब्याज = 378 रु।

मान लीजिए वांछित समय अवधि n वर्ष है, तब

मिश्रधन = (1800 + 378) रु = 2178 रु

$\therefore \quad 2178 = 1800\left(1+\frac{10}{100}\right)^n$ [सूत्र (I) से]

या $\quad \left(1+\frac{10}{100}\right)^n = \frac{2178}{1800} = \frac{121}{100} = \left(\frac{11}{10}\right)^2$

या $\quad \left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{11}{10}\right)^2$

या $\quad n = 2$

अत:, वांछित समय अवधि 2 वर्ष है।

प्रश्नावली 5.2

चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्रों का प्रयोग करते हुए, प्रश्न 1-5 में, मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित कीजिए।

1. मूलधन = 4000 रु, दर = 5 % वार्षिक, समय = 2 वर्ष
2. मूलधन = 6000 रु, दर = 10 % वार्षिक, समय = 2 वर्ष
3. मूलधन = 6250 रु, दर = 4 % वार्षिक, समय = 2 वर्ष
4. मूलधन = 20000 रु, दर = 7.5 % वार्षिक, समय = 3 वर्ष
5. मूलधन = 31250 रु, दर = 8 % वार्षिक, समय = 3 वर्ष

6. 25000 रु पर 6 % वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

7. 6 % वार्षिक ब्याज की दर से 125000 रु का 3 वर्ष के बाद मिश्रधन ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है।

8. हेमा ने हमीद को $6\frac{1}{4}$ % वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर 40960 रु उधार दिए, 3 वर्षों के बाद हमीद द्वारा हेमा को दिए जाने वाला मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

9. चंद्रन ने वर्षा से 3 वर्ष के लिए 10000 रु उधार लिए। यदि ब्याज की दर 10 % वार्षिक हो, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है, तो 3 वर्षों के अंत में चंद्रन द्वारा देय मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

10. 32000 रु पर 12 % वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर ज्ञात कीजिए।

11. फातिमा 12 % वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्षों के लिए 12500 रु साधारण ब्याज पर उधार लेती है। राधा यही राशि 10 % वार्षिक की दर से इतनी ही अवधि के लिए चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लेती है, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है। इनमें से कौन अधिक ब्याज देता है और कितना अधिक?

12. मैंने जमशेद से 6 % वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए 12000 रु उधार लिए। यदि जमशेद साधारण ब्याज के स्थान पर 6 % वार्षिक चक्रवृद्धि लेता है, तो मुझे उसे कितनी अतिरिक्त राशि देनी पड़ेगी?

13. किसी धनराशि पर $6\frac{1}{2}$ % वार्षिक की दर से 2 वर्षों का साधारण ब्याज 5200 रु है। इसी राशि पर इसी ब्याज की दर से इसी समय के लिए चक्रवृद्धि ब्याज कितना होगा?

14. उस राशि पर 5 % वार्षिक की दर से 3 वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जो 3 वर्षों में 5 % वार्षिक की दर से 1200 रु साधारण ब्याज देती है।

15. किसी धनराशि पर 7.5 % वार्षिक की दर से 2 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अंतर 360 रु है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

16. किसी धनराशि पर $6\frac{2}{3}$ % वार्षिक की दर से 3 वर्षों के साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज का अंतर 46 रु है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

17. कोई धनराशि प्रति वर्ष संयोजित 2 % वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्षों में 10404 रु हो जाती है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

18. किसी धनराशि का प्रति वर्ष संयोजित 6.5 % वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्षों में मिश्रधन 453690 रु हो जाता है। वह धनराशि ज्ञात कीजिए।

19. किस धनराशि का $6\frac{3}{4}\%$ वार्षिक ब्याज की दर से दो वर्षों में मिश्रधन 45582.25 रु हो जाएगा, जबकि ब्याज प्रति वर्ष संयोजित होता है?

20. किस प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 4000 रु पर 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज 410 रु होगा?

21. कितने समय में 1600 रु की धनराशि का 5 % वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से मिश्रधन 1852.20 रु हो जाएगा?

22. रेखा ने 5 % वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 12000 रु की एक राशि निवेशित की। उसे n वर्षों के बाद 13230 रु की राशि प्राप्त हुई। n का मान ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. यदि संपूर्ण ऋण अवधि में मूलधन एक ही रहे, तो उस मूलधन पर परिकलित ब्याज साधारण ब्याज कहलाता है।
2. वह समय अवधि जिसके बाद मूलधन में ब्याज जोड़कर नया मूलधन बनाया जाता है, रूपांतरण अवधि कहलाती है तथा इस प्रकार परिकलित ब्याज चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है।
3. यदि रूपांतरण अवधि एक वर्ष हो, तो यह कहा जाता है कि ब्याज प्रतिवर्ष संयोजित है।
4. साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में मुख्य अंतर यह है कि साधारण ब्याज की स्थिति में मूलधन एक ही (अचर) रहता है, जबकि चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में मूलधन प्रत्येक अवधि के बाद बदलता रहता है।
5. $$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = A - P$$

$$= P\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

जहाँ A मिश्रधन, P मूलधन, r प्रतिशत प्रति रूपांतरण अवधि ब्याज की दर तथा n रूपांतरण अवधियों की संख्या है।

—— अतीत के झरोखे से ——

व्यावहारिक या व्यापारिक गणित का इतिहास उतना ही पुराना है जितना मानव सभ्यता का। 19वीं शताब्दी में, मेसोपोटामिया में लगभग आधे मिलियन मिट्टी के (मृत्तिका) शिलालेख खोदकर निकाले गए थे। इनमें से लगभग तीन सौ शिलालेख केवल गणित से संबंधित हैं। मुख्यत: इन्हीं शिलालेखों के माध्यम से ही, हम बेबीलोन (सुमेरियन भी सम्मिलित है) की प्राचीनतम ज्ञात मानव सभ्यता के व्यापारिक क्रियाकलापों के बारे में जानकारी प्राप्त कर पाए हैं।

इन शिलालेखों में से लगभग दो सौ शिलालेख शुद्धता *सारणी* शिलालेख हैं जिनमें गुणनों, व्युत्क्रमों, वर्गों, घनों एवं घातांकियों (exponentials) की सारणियाँ दी हुई हैं। विशिष्ट रूप से, हमें ऐसे शिलालेख प्राप्त होते हैं जिनमें $n = 1, 2, ..., 10$ तथा $a = 9, 16, ..., 100, ..., 225$ के लिए, a^n की सारणियाँ दी हुई हैं। ऐसे प्रमाण मिलते हैं कि इन शिलालेखों का प्रयोग साधारण और चक्रवृद्धि ब्याजों के परिकलनों में किया जाता था। 1700 ईसा पूर्व के एक शिलालेख (इस समय फ्रांस में लूव्र (*Louvre*) के म्यूजियम में रखी है) में एक समस्या इस प्रकार (यहाँ प्रचलित वर्तमान संकेतन में व्यक्त) दी हुई है: *ज्ञात कीजिए कि किसी धनराशि को 20 % चक्रवृद्धि ब्याज की दर से स्वयं का दुगुना होने के लिए कितना समय लगेगा।* इसको हल करने के लिए, आपको ऐसा n ज्ञात करना होगा कि $P\left(1+\frac{20}{100}\right)^n = 2P$ अथवा $(1.2)^n = 2$ हो। शिलालेख से यह ज्ञात किया गया कि $(1.2)^3$, अर्थात् $1.728 < 2$ है तथा $(1.2)^4$, अर्थात् $2.0736 > 2$ है। फिर उन्होंने 3 और 4 के बीच n का मान अंतर्वेशित (interpolate) किया (अर्थात् इस समस्या को हल किया कि यदि 1.728 और 2.0736 क्रमश: 3 और 4 के संगत हैं तो 2 के संगत कौन सा मान होगा)।

बाद की अधिकांशत: सभी सभ्यताओं में साधारण और चक्रवृद्धि ब्याजों की संकल्पनाएँ मिलती हैं। यूनानी, रोमन, इटेलियन, ब्रिटिश एवं यहूदी सभी ने ब्याज की चर्चा की। 16वीं और 17वीं शताब्दियों की अंकगणित की सभी पुस्तकों में इस संकल्पना को विशिष्ट स्थान दिया गया। इनमें से अनेकों पुस्तकों में, चक्रवृद्धि ब्याज परिकलित करने के लिए सारणियाँ दी हुई हैं।

भारत में भी ब्याज की संकल्पना का ज्ञान सूत्र काल (Sutra period), अर्थात्, ईसा से कुछ वर्षों पूर्व था। *महावीर* (850) और *भास्कर* (1150) ने ब्याज पर अनेक ऐसी समस्याएँ दी हैं जो यह दर्शाती हैं कि ब्याज प्रतिशत के आधार पर परिकलित किया जाता था।

16वीं शताब्दी और उसके बाद की अंकगणित की सभी पुस्तकों में लाभ और हानि (Profit and Loss) के विषय की चर्चा की गई है। यह वाक्यांश इटली से प्रारंभ हुआ तथा लेटिन, जर्मन, पुर्तगाली एवं फ्रांसीसी भाषाओं में क्रमित अनुवादों के बाद अंग्रेजी लेखकों तक हानि और लाभ (Loss and Gain) के रूप में पहुँचा।

बट्टे की संकल्पना *कमीशन* और *दलाली* से प्रारंभ हुई जो माल की बिक्री और खरीद के मध्य में बीच वाला व्यक्ति (दलाल) लिया करता था। (i) भुगतान राशि में की गई कमी यदि वह राशि देय तिथि से पहले अदा कर दी जाए तथा (ii) बिक्री के लिए प्रोत्साहन हेतु अंकित मूल्य में की गई कमी (दी गई छूट) के रूपों में बट्टे की अवधारणा एक आधुनिक (हाल ही की) विशिष्टता है।

अध्याय

बीजीय सर्वसमिकाएँ

6.1 भूमिका

सातवीं कक्षा में आपने कुछ बीजीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन किया था। जैसा कि आप जानते हैं, तुल्यता के ऐसे बीजीय संबंध को बीजीय सर्वसमिका कहा जाता है जो संबंध में उपस्थित अक्षर के सभी मानों के लिए सत्य रहता है। आपने निम्नलिखित बीजीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन किया था :

A. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

C. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

याद कीजिए कि किसी बीजय व्यंजक के गुणनखंडन के लिए हम इसे बीजीय व्यंजकों के गुणनफल के रूप में लिख लेते हैं। गुणनफल के प्रत्येक व्यंजक को एक *गुणनखंड* कहा जाता है। गुणनखंड ज्ञात करने की प्रक्रिया *गुणनखंडन* कहलाती है।

इस अध्याय में, हम कुछ और सर्वसमिकाएँ सीखेंगे। बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन में हम इन सर्वसमिकाओं का प्रयोग भी सीखेंगे।

6.2 कुछ अन्य मानक सर्वसमिकाएँ

I. गुणनफल $(x+a)(x+b)$

ऊपर दी गई सर्वसमिका A का प्रयोग कर हम दो समान द्विपदों को गुणा कर सकते हैं। आइए, अब ऐसे दो द्विपदों का गुणनफल निकालें जिनके दूसरे पद भिन्न हों। द्विपदों $x+a$ और $x+b$ को गुणा करने पर,

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x(x+b) + a(x+b)\\ &= x^2 + xb + ax + ab\\ &= x^2 + bx + ax + ab \qquad (\text{क्योंकि } xb = bx)\end{aligned}$$

$= x^2 + ax + bx + ab$ (क्योंकि $bx + ax = ax + bx$)

$= x^2 + (a + b)x + ab$ (ax और bx में से x को सार्व गुणनखंड लेने पर)

इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है :

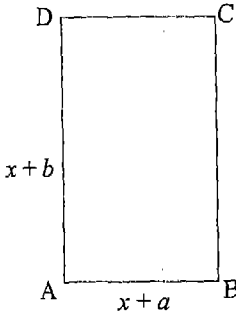
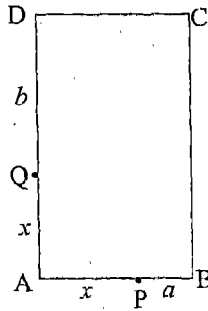
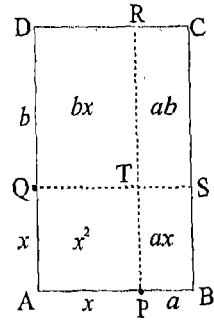
सर्वसमिका I :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

या

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$

क्रियाकलाप 1 : याद कीजिए कि दो द्विपदों $x + a$ और $x + b$ के गुणनफल को भुजाओं $x + a$ और $x + b$ वाले आयत का क्षेत्रफल माना जा सकता है। गत्ते के किसी टुकड़े पर (या पुराने ग्रीटिंग कार्ड पर), भुजाओं $x + a$ और $x + b$ वाला एक आयत ABCD बनाइए [आकृति 6.1 (i)]। स्पष्टतः, आयत ABCD का क्षेत्रफल $(x + a)(x + b)$ है।

AB पर एक बिंदु P इस प्रकार लीजिए कि $AP = x$ हो [आकृति 6.1 (ii)]। AD पर एक बिंदु Q ऐसा लीजिए कि $AQ = x$ हो [आकृति 6.1(ii)]। क्योंकि $AB = x + a$ और $AP = x$ है, अतः $PB = a$ है। पुनः, क्योंकि $AD = x + b$ और $AQ = x$ है, अतः $QD = b$ है [आकृति 6.1(ii)]।

आकृति : 6.1

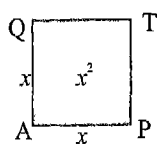
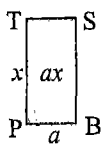
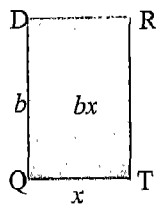
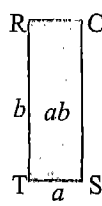
P से AD के समांतर एक रेखाखंड PR खींचिए जो DC से R पर मिले [आकृत 6.1(iii)]। Q से AB के समांतर एक रेखाखंड QS खींचिए जो BC से S पर मिले [आकृति 6.1(iii)]। माना कि PR और QS एक-दूसरे को T पर काटते हैं। ऐसा होने पर आयत निम्नलिखित चार भागों में बँट जाता है :

I. वर्ग APTQ, जिसकी भुजा x है और जिसका क्षेत्रफल x^2 है।

II. आयत PBST, जिसकी भुजाएँ a तथा x हैं और जिसका क्षेत्रफल ax है।

III. आयत QTRD, जिसकी भुजाएँ b तथा x हैं और जिसका क्षेत्रफल bx है।

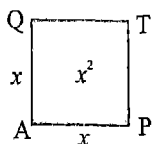
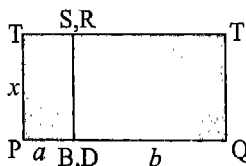
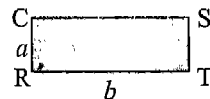
IV. आयत TSCR, जिसकी भुजाएँ a तथा b हैं और जिसका क्षेत्रफल ab है।

रेखाखंडों PR, QT और TS पर काटते हुए इन चारों टुकड़ों को अलग कर लीजिए [आकृति 6.2]।

आकृति : 6.2

क्योंकि पूरी आकृति का क्षेत्रफल वही होगा जो अलग किए गए टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल है, अत: आवश्यक है कि

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$

इस प्रकार सर्वसमिका I सत्यापित हो जाती है।

क्रियाकलाप 2 : क्रियाकलाप 1 की भाँति आकृति 6.2 में दिखाए गए चार टुकड़े बनाइए। अब आयत DQTR को आकृति 6.3 (ii) में दिखाए गए अनुसार आयत PBST से इस प्रकार सटाकर रखिए कि आयत DQTR की भुजा DR और आयत PBST की भुजा BS एक-दूसरे को ढक लें। ऐसा करने पर यह चार टुकड़े आकृति 6.3 में दिखाए गए तीन टुकड़ों में बदल जाएँगे।

आकृति : 6.3

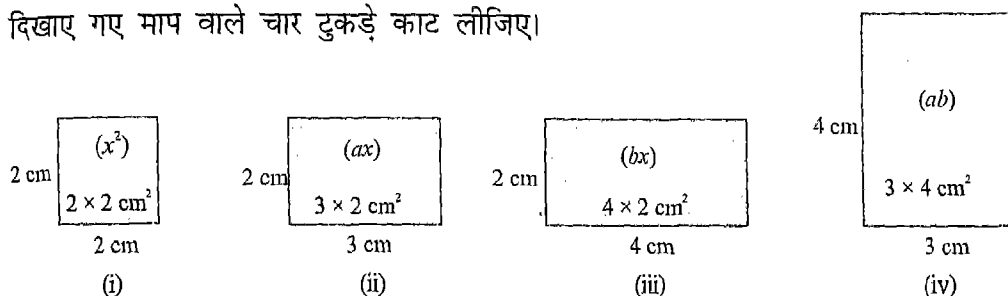
स्पष्ट है कि इन तीन टुकड़ों के क्रमश: क्षेत्रफल x^2, $(a + b)x$ और ab हैं। क्योंकि पूरे टुकड़े का क्षेत्रफल वही होगा जो उन टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल है जिन्हें अलग करने के बाद

फिर से जोड़ लिया गया है, अत: आवश्यक है कि

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

इस प्रकार सर्वसमिका I प्रयोग द्वारा सत्यापित हुई।

ऊपर वाले दोनों क्रियाकलापों में, सर्वसमिका I के सत्यापन के लिए हमने पहले पूरा टुकड़ा लिया और तब इसे काटा। जैसा कि नीचे क्रियाकलापों 3 और 4 में दिखाया गया है, हम यह क्रिया विलोम रूप में भी कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 3 : तीन संख्याएँ x, a और b लीजिए। माना कि $x = 2$ cm, $a = 3$ cm और $b = 4$ cm है। गत्ते के किसी टुकड़े (या किसी पुराने ग्रीटिंग कार्ड) में से आकृति 6.4 में दिखाए गए माप वाले चार टुकड़े काट लीजिए।

आकृति : 6.4

इन टुकड़ों के क्रमशः क्षेत्रफल इन टुकड़ों के भीतर ही दिखाए गए हैं। चारों टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल

$$(2^2 + 3 \times 2 + 4 \times 2 + 3 \times 4) \text{ cm}^2$$

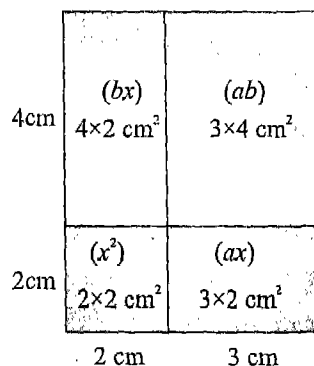
अर्थात् $(x^2 + ax + bx + ab)$ cm² है। अब इन टुकड़ों को इस प्रकार जोड़िए कि ये भुजाओं $(2 + 3)$ cm तथा $(2 + 4)$ cm अर्थात् $(x + a)$ cm और $(x + b)$ cm वाला आयत बनाएँ। ऐसा एक विन्यास आकृति 6.5 मे दिखाया गया है।

क्योंकि अलग हुए टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल वही है जो आकृति 6.5 में जुड़े हुए टुकड़ों का है, अतः आवश्यक है कि

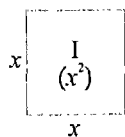
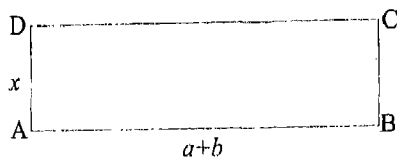
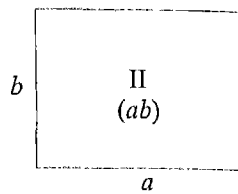
$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab,$$

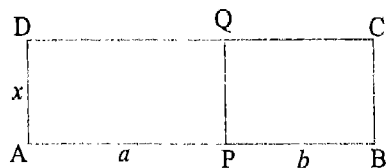
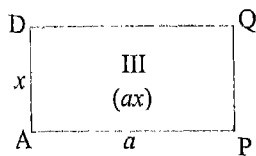
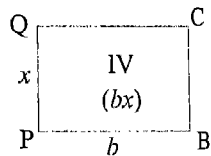
जहाँ $x = 2$ cm, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm हैं।

अब सर्वसमिका I पहले की भाँति सत्यापित हुई।

	2 cm	3 cm
4cm	(bx) 4×2 cm²	(ab) 3×4 cm²
2cm	(x^2) 2×2 cm²	(ax) 3×2 cm²

आकृति : 6.5

क्रियाकलाप 4 : नीचे दिखाई गई आकृति 6.6 में दिए गए तीन टुकड़ों से आरंभ कीजिए। ध्यान दीजिए कि इन तीन टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल है :

$$x^2 + (a + b)x + ab \qquad (1)$$

आकृति : 6.6

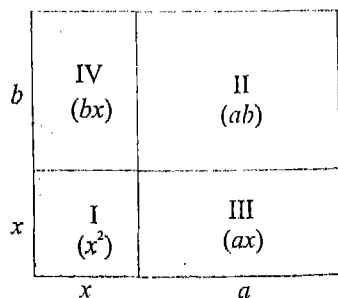
आकृति 6.6 (ii) का टुकड़ा लेकर इसमें AB पर एक बिंदु P इस प्रकार चिह्नित कीजिए कि AP = a हो। P से AD के समांतर एक रेखाखंड खींचिए जो DC से Q पर मिले [आकृति 6.7 (i)]। स्पष्टतः, PB = b है। PQ के अनुदिश काटकर इस टुकड़े से दो टुकड़े प्राप्त कीजिए [आकृति 6.7 (ii) और आकृति 6.7 (iii)]।

आकृति : 6.7

अब आकृतियों 6.6 (i), 6.6 (iii), 6.7 (ii) और 6.7 (iii) में दिखाए गए टुकड़ों को आकृति 6.8 के अनुसार जोड़िए। स्पष्ट है कि आकृति 6.8 में भुजाओं $x + a$ और $x + b$ वाला एक आयत दिखाया गया है। इस आयत का क्षेत्रफल है :

$$(x + a)(x + b) \qquad (2)$$

अब टुकड़े अलग-अलग हों या जोड़ दिए गए हों इनका कुल क्षेत्रफल वही रहेगा। अतः (2) और (1) का प्रयोग करने पर,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

अब सर्वसमिका I पहले की भाँति सत्यापित हुई।

आकृति : 6.8

टिप्पणियाँ 1 : ऊपर दिए गए क्रियाकलापों 1 से 4 में x, a तथा b को धनात्मक माना गया है। परंतु याद रखिए कि सर्वसमिका I, x, a और b के सभी धनात्मक, ऋणात्मक तथा शून्य मानों के लिए सत्य होती है।

2. ध्यान दीजिए कि b का मान a अथवा $-a$ के बराबर भी हो सकता है। इन स्थितियों में सर्वसमिका I के निम्नलिखित विशिष्ट रूप प्राप्त होते हैं :

(i) जब $b = a$, तब

$$(x + a)(x + a) = x^2 + (a + a)x + a^2 \qquad [\text{सर्वसमिका I में } b = a \text{ रखने पर}]$$

$$= x^2 + 2ax + a^2$$

ध्यान दीजिए कि यह अनुच्छेद 6.1 में दी हुई सर्वसमिका A ही है।

(ii) जब $b = -a$, तब

$$(x + a)\{x + (-a)\} = x^2 + \{a + (-a)\}x + a \times (-a),$$

[सर्वसमिका I में $b = -a$ रखने पर]

$$= x^2 - a^2$$

ध्यान दीजिए कि यह अनुच्छेद 6.1 में दी हुई सर्वसमिका C ही है।

अब हम यह दिखाएँगे कि बीजीय व्यंजकों के सरलीकरण में और गुणनफलों के मान ज्ञात करने में सर्वसमिका I का प्रयोग कैसे किया जाता है।

उदाहरण 1 : सर्वसमिका I का प्रयोग कर निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(y + 2)(y + 6)$ (ii) $(x + 5)(x - 3)$

हल : (i) $(y + 2)(y + 6)$ की तुलना $(x + a)(x + b)$ से करने पर, हम देखते हैं कि

$$x = y, a = 2, b = 6$$

अतः सर्वसमिका I का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है :

$$(y + 2)(y + 6) = y^2 + (2 + 6)y + 2 \times 6$$

$$= y^2 + 8y + 12$$

(ii) $(x + 5)(x - 3)$ की तुलना $(x + a)(x + b)$ से करने पर, हम देखते हैं कि

$$a = 5, b = -3$$

अतः सर्वसमिका I का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है :

$$(x+5)(x-3) = x^2 + \{5 + (-3)\}x + 5\times(-3)$$
$$= x^2 + 2x - 15$$

उदाहरण 2 : निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(z-1)(z-8)$ (ii) $(p-4)(p+7)$

हल : (i) आइए, $(z-1)(z-8)$ की तुलना $(x+a)(x+b)$ से करें। हम देखते हैं कि

$x = z, a = -1, b = -8$

अतः सर्वसमिका I का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है :

$$(z-1)(z-8) = z^2 + \{(-1)+(-8)\}z + \{(-1)\times(-8)\}$$
$$= z^2 - 9z + 8$$

(ii) सर्वसमिका I का प्रयोग करने पर,

$$(p-4)(p+7) = p^2 + \{(-4)+7\}p + (-4)\times 7$$
$$= p^2 + 3p - 28$$

टिप्पणी : आप मन-ही-मन तुलना कर, ऊपर खंड (ii) में दिखाए गए अनुसार सीधे ही सर्वसमिका का प्रयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : दी गई संख्याओं को सीधे-सीधे गुणा किए बिना ही 104×106 का मान ज्ञात कीजिए।

हल : 104 को 100 + 4 तथा 106 को 100 + 6 लिखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$104 \times 106 = (100+4)\times(100+6)$$
$$= 100^2 + (4+6)\,100 + 4\times 6 \quad \text{[सर्वसमिका I के प्रयोग से]}$$
$$= 10000 + 10\times 100 + 24$$
$$= 10000 + 1000 + 24 = 11024$$

उदाहरण 4 : किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर 83×79 का मान निकालिए।

हल : $83 \times 79 = (80+3)\times(80-1)$

$$= 80^2 + (3-1)\,80 + 3\times(-1) \quad \text{[सर्वसमिका I के प्रयोग से]}$$
$$= 6400 + 160 - 3 = 6557$$

प्रश्नावली 6.1

निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात करने के लिए, किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कीजिए :

1. $(x+4)(x+5)$ **2.** $(x+6)(x+9)$

3. $(x+8)(x+7)$ **4.** $(x+4)(x+9)$

5. $(x+2)(x+6)$ **6.** $(x+4)(x-1)$

7. $(p+6)(p-4)$ **8.** $(y+8)(y-3)$

9. $(x-4)(x-1)$ **10.** $(z-14)(z-1)$

11. $(y-4)(y-11)$ **12.** $(x-4)(x+21)$

13. $(x-7)(x+12)$ **14.** $(y-4)(y+20)$

निम्नलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए :

15. (i) $\left(x+\frac{1}{5}\right)(x+5)$ (ii) $(y+6)\left(y+\frac{5}{12}\right)$

16. (i) $\left(z+\frac{3}{4}\right)\left(z+\frac{4}{3}\right)$ (ii) $(x^2+4)(x^2+9)$

17. (i) $(y^2+12)(y^2+6)$ (ii) $(q^2+4)(q^2-1)$

18. (i) $(p^2+16)\left(p^2-\frac{1}{4}\right)$ (ii) $\left(y^2+\frac{5}{7}\right)\left(y^2-\frac{14}{5}\right)$

19. (i) $(z^3+14)(z^3+1)$ (ii) $(z^3+1)(z^3-8)$

20. (i) $(y^3+2)\left(y^3-\frac{3}{8}\right)$ (ii) $\left(x^3-\frac{3}{8}\right)\left(x^3+\frac{16}{17}\right)$

दी गई संख्याओं को बिना सीधे-सीधे गुणा किए, निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

21. (i) 103×106 (ii) 204×207

22. (i) 95×96 (ii) 86×82

23. (i) 98×103 (ii) 95×101

24. (i) 194×189 (ii) 205×192

25. (i) 198×209 (ii) 204×197

III. $(a+b+c)^2$ का प्रसारण

आप पहले पढ़ चुके हैं कि किसी द्विपद $(a+b)$ के वर्ग का प्रसारण कैसे किया जाता है। द्विपद के वर्ग के प्रसारण की इस विधि का विस्तार हम त्रिपद $(a+b+c)$ के वर्ग के प्रसारण के लिए आगे बताए अनुसार कर सकते हैं।

मान कि $b+c=x$ है। तब

$(a+b+c)^2 = (a+x)^2$

$= a^2 + 2ax + x^2$ [सर्वसमिका A के प्रयोग से]

$= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2$ [क्योंकि $x = b+c$]

$= a^2 + 2ab + 2ac + (b^2 + 2bc + c^2)$ [सर्वसमिका A के प्रयोग से]

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ [पदों को पुनर्व्यवस्थित कर]

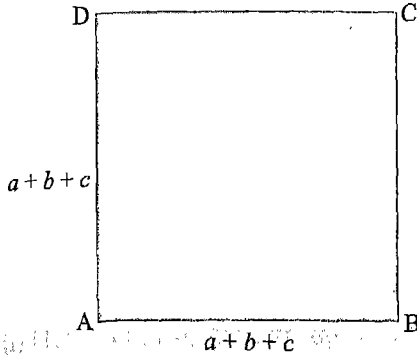
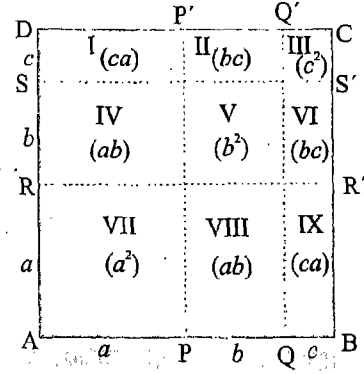
इस प्रकार हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है :

सर्वसमिका II : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

टिप्पणियाँ 1 : ध्यान दीजिए कि व्यंजक $a+b+c$ के वर्ग का प्रसार तीन वर्ग पदों तथा तीन गुणन पदों से बना होता है।

2. a, b और c के मान धनात्मक या ऋणात्मक कुछ भी हो सकते हैं।

क्रियाकलाप 5 : अब हम ज्यामितीय और प्रायोगिक विधि से ऊपर दी गई सर्वसमिका का सत्यापन करेंगे। a, b और c के कोई उपयुक्त मान लेकर गत्ते के एक टुकड़े (या किसी पुराने ग्रीटिंग कार्ड) पर भुजाओं $a+b+c$ वाला एक वर्ग ABCD बनाइए। स्पष्टत:, इस वर्ग का क्षेत्रफल $(a+b+c)^2$ है। AB पर दो बिंदु P और Q ऐसे चिह्नित कीजिए कि $AP = a$ और $PQ = b$ हो [आकृति 6.9 (ii)]। स्पष्टत:, इसका अर्थ हुआ कि $QB = c$ है।

AD पर दो बिंदु R और S इस प्रकार चिह्नित कीजिए कि $AR = a$ और $RS = b$ हो [आकृति 6.9 (ii)]। स्पष्टत:, इसका अर्थ यह हुआ कि $SD = c$ है। P और Q से AD के समांतर रेखाखंड PP' और QQ' खींचिए जो DC से क्रमश: P' और Q' पर मिले। R और S से AB के समांतर रेखाखंड RR' और SS' खींचिए जो BC से क्रमश: R' और S' पर मिले। ऐसा करने से वर्ग I, II, ..., IX से चिह्नित नौ ऐसे टुकड़ों में बँट जाएगा जिनके क्षेत्रफल क्रमश:

(i)

(ii)

आकृति : 6.9

$ca, bc, c^2, ab, b^2, bc, a^2, ab$ और ca हैं। इन टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल है :

$$ca + bc + c^2 + ab + b^2 + bc + a^2 + ab + ca$$

अर्थात् $$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

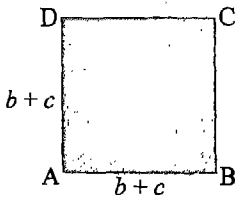
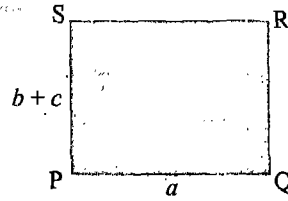
क्योंकि पूरे वर्ग का क्षेत्रफल इसके टुकड़ों के क्षेत्रफल का कुल योग है, अतः आवश्यक होगा कि

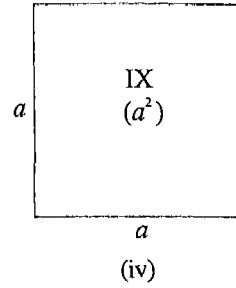
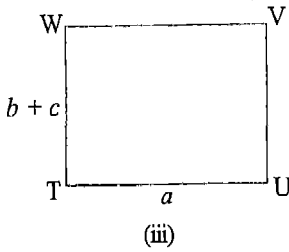
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

इस प्रकार, सर्वसमिका ज्यामितीय रूप से सत्यापित हुई।

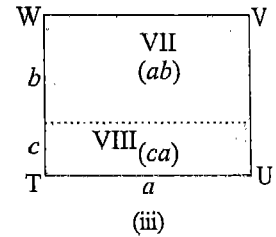
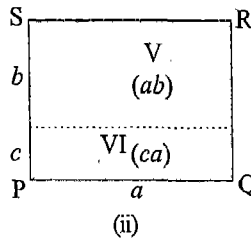
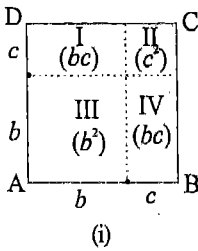
अब हम इस सर्वसमिका को प्रायोगिक रूप से सत्यापित करेंगे। a, b और c के ऐसे भिन्न-भिन्न मान लीजिए जो 1 cm और 8 cm के बीच हों जिससे कि टुकड़ों पर कार्य करना सुविधाजनक रहे। परंतु यह प्रतिबंध ऐच्छिक है (ऐसा करना अनिवार्य नहीं)। एक गत्ते के टुकड़े (या किसी पुराने ग्रीटिंग कार्ड) में से निम्नलिखित टुकड़े काटिए :

(i) भुजा $b + c$ वाला एक वर्ग, (ii) भुजाओं $b + c$ और a वाले दो आयत, और

(iii) भुजा a वाला एक वर्ग (आकृति 6.10)।

(i)

(ii)

आकृति : 6.10

आकृति : 6.10

आकृति 6.10 (i) को लीजिए। AB पर, A से दूरी b पर, एक बिंदु लीजिए [आकृति 6.11 (i)]। लिए गए बिंदु में से AD के समांतर एक रेखा खींचिए। अब AD पर भी, A से दूरी b पर एक बिंदु लीजिए। इस बिंदु से AB के समांतर एक रेखा खींचिए। ऐसा करने पर वर्ग ABCD चार भागों में बँट जाएगा जिन्हें आकृति 6.11 (i) में I, II, III और IV से दिखाया गया हैं। इन भागों के माप आकृति में दिखाए गए हैं। खींची गई रेखाओं पर काटते हुए इन भागों को अलग कर लीजिए।

अब आकृति 6.10 (ii) को लीजिए। SP पर, S से दूरी b पर, एक बिंदु लीजिए [आकृति 6.11 (ii)]। लिए गए बिंदु में से होकर SR के समांतर एक रेखा खींचिए। ऐसा करने पर आयत PQRS दो भागों में बँट जाएगा जिन्हें आकृति 6.11 (ii) में V और VI से दिखाया गया है। इन भागों के माप आकृति में दिखाए गए हैं। खींची गई रेखा पर काटकर दोनों भागों को अलग कर लीजिए।

आकृति : 6.11

आकृति 6.10 (iii) को लीजिए। WT पर, W से दूरी b पर, एक बिंदु लीजिए। लिए गए बिंदु में से WV के समांतर एक रेखा खींचिए। यह रेखा आयत TUVW को दो भागों में बाँट देगी जिन्हें आकृति 6.11 (iii) में VII और VIII से दिखाया गया है। इन भागों के माप आकृति में दिखाए गए हैं। दोनों भागों को अलग करने के लिए खींची गई रेखा पर काटिए।

आकृति 6.10 (iv) में भुजा a वाले वर्ग पर IX लिखिए। अब भागों I से IX को आकृति 6.12 में दिखाए गए अनुसार जोड़ लीजिए। स्पष्टत: ऐसा करने पर भुजा $(a + b + c)$ वाला एक वर्ग प्राप्त होता है। यह देखना सरल है कि इस वर्ग का क्षेत्रफल $(a + b + c)^2$ है।

आकृति : 6.12

क्योंकि पूरे वर्ग का क्षेत्रफल इसके टुकड़ों के कुल क्षेत्रफल के बराबर होना अनिवार्य है, अत:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

इस प्रकार, सर्वसमिका II प्रायोगिक रूप से सत्यापित हुई।

अब सर्वसमिका II का प्रयोग किसी त्रिपद के वर्ग को प्रसारित रूप में लिखने में दिखाया जाएगा।

उदाहरण 5 : $(7x + 4y + 3z)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल : दिए हुए व्यंजक की $(a + b + c)^2$ से तुलना करने पर, हम पाते हैं कि

$$a = 7x, b = 4y, c = 3z$$

अत: सर्वसमिका II का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है :

$$(7x + 4y + 3z)^2 = (7x)^2 + (4y)^2 + (3z)^2 + 2(7x)(4y) + 2(4y)(3z) + 2(3z)(7x)$$

$$= 49x^2 + 16y^2 + 9z^2 + 56\,xy + 24\,yz + 42\,zx$$

उदाहरण 6 : $(2p - 5q + 7r)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल : दिए हुए व्यंजक $(2p - 5q + 7r)^2$ को हम $[2p + (-5q) + 7r]^2$ लिख सकते हैं। दिए हुए व्यंजक की तुलना $(a + b + c)^2$ से करने पर, हम पाते हैं कि

$$a = 2p, b = -5q, c = 7r$$

अत: सर्वसमिका II का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$(2p - 5q + 7r)^2 = (2p)^2 + (-5q)^2 + (7r)^2 + 2(2p)(-5q) + 2(-5q)(7r) + 2(7r)(2p)$$

$$= 4p^2 + 25q^2 + 49r^2 - 20pq - 70qr + 28\,rp$$

उदाहरण 7 : $(4a-3b-2c)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल : सर्वसमिका II का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$(4a-3b-2c)^2 = [4a+(-3b)+(-2c)]^2$$
$$= (4a)^2+(-3b)^2+(-2c)^2+2(4a)(-3b)+2(-3b)(-2c)+2(-2c)(4a)$$
$$= 16a^2+9b^2+4c^2-24ab+12bc-16ac$$

टिप्पणी : याद कीजिए कि $A^2 = (-A)^2$ होता है। इस प्रकार हम व्यंजक $(4a-3b-2c)^2$ का मान $(-4a+3b+2c)^2$ के रूप में भी ज्ञात कर सकते थे।

उदाहरण 8 : व्यंजक $\left(-5x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}z\right)^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए।

हल : सर्वसमिका II का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$(-5x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}z)^2$$
$$= (-5x)^2+\left(\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{3}{4}z\right)^2+2(-5x)\left(\frac{1}{2}y\right)+2\left(\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{3}{4}z\right)+2\left(\frac{3}{4}z\right)(-5x)$$
$$= 25x^2+\frac{1}{4}y^2+\frac{9}{16}z^2-5xy+\frac{3}{4}yz-\frac{15}{2}xz$$

उदाहरण 9 : $(x+2y-3z)^2+(x-2y+3z)^2$ को सरल कीजिए।

हल : सर्वसमिका II का प्रयोग करने पर,

$$(x+2y-3z)^2 = x^2+4y^2+9z^2+4xy-12yz-6xz \quad (1)$$
$$(x-2y+3z)^2 = x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6xz \quad (2)$$

(1) और (2) के संगत पक्षों का योग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$(x+2y-3z)^2+(x-2y+3z)^2 = 2x^2+8y^2+18z^2-24yz$$

प्रश्नावली 6.2

निम्नलिखित प्रत्येक (वर्ग) को प्रसारित रूप में लिखिए :

1. $(x+2y+4z)^2$

2. $(-3x+y+5z)^2$

3. $(-x-2y+6z)^2$

4. $(3a+2b-3c)^2$

5. $(3a-7b-c)^2$

6. $(5a-7b+c)^2$

7. $(4l + 2m - 3n)^2$

8. $(-2l + m - 8n)^2$

9. $(l + 2m - 7n)^2$

10. $(p + 9q + 2)^2$

11. $\left(6x + \frac{1}{2}y + 4z\right)^2$

12. $\left(9x - y + \frac{1}{3}z\right)^2$

13. $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 16\right)^2$

14. $\left(-a - \frac{1}{2}b - 6\right)^2$

रिक्त स्थानों की पूर्ति इस प्रकार कीजिए कि निम्नलिखित प्रत्येक कथन सत्य हो जाए :

15. $(3x - 4y + 2z)^2 = ...x^2 + ...y^2 + ...z^2 - ...xy - ...yz + ...zx$

16. $(-2x - 3y + 5z)^2 = ...x^2 + ...y^2 + ...z^2 + ...xy - ...yz - ...zx$

17. $(a - b + c)^2 = a^2 ... b^2 ... c^2 ... 2ab ... 2bc ... 2ca$

18. $(a - 2b + 7c)^2 = a^2 ... b^2 ... c^2 ... 4ab ... 28bc ... 14ca$

सरल कीजिए :

19. $(p + q + r)^2 + (p - q - r)^2$

20. $(p - q + r)^2 + (p - q - r)^2$

21. $(p + q + r)^2 - (p - q - r)^2$

22. $(p - q + r)^2 - (p - q - r)^2$

23. $(2x + y + z)^2 - (2x - y - z)^2$

24. $(2x - y + z)^2 - (2x + y - z)^2$

III. $(a + b)^3$ का प्रसारण

आप पहले ही सीख चुके हैं कि द्विपद $(a + b)$ के वर्ग का प्रसारण कैसे किया जाता है। द्विपद के वर्ग के प्रसारण की इस विधि का विस्तार हम द्विपद $(a + b)$ के घन के प्रसारण के लिए नीचे दिखाए अनुसार कर सकते हैं:

सर्वसमिका A द्वारा,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

दोनों पक्षों को $(a + b)$ से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$(a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

या

$$(a + b)^3 = a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$ (समान पदों को मिलाकर a के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है :

सर्वसमिका III : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

सर्वसमिका III के RHS के पदों को हम ऐसे रूप में पुनर्व्यवस्थित कर सकते हैं कि इन्हें याद रखना अपेक्षाकृत सरल हो।

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ (पदों को पुनर्व्यवस्थित कर)

$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ (अंतिम दो पदों में से $3ab$ सार्व लेकर)

इस प्रकार, हमें सर्वसमिका III का निम्न वैकल्पिक रूप प्राप्त होता है:

सर्वसमिका III' : $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ का ज्यामितीय सत्यापन

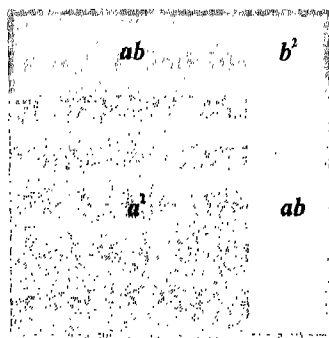
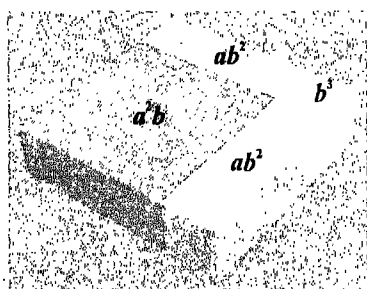
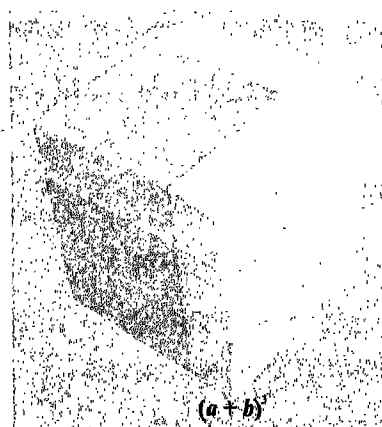
पिछली कक्षा में आपने कागज के घन और लंबकोणिक समांतर षट्फलक या घनाभ (cuboid) बनाना सीखा था। ऊपर बताई गई सर्वसमिका के सत्यापन के लिए आपको बनाने होंगे :

- भुजा a का एक घन (जिसे $a \times a \times a$ घन कहा जाएगा)
- भुजा b वाला एक घन (जिसे $b \times b \times b$ घन कहा जाएगा)
- भुजाओं a, a, b वाले तीन घनाभ (जिन्हें $a \times a \times b$ घनाभ कहा जाएगा)
- भुजाओं a, b, b वाले तीन घनाभ (जिन्हें $a \times b \times b$ घनाभ कहा जाएगा)

इन आठ टुकड़ों (गुटकों) में से पहले ये चार टुकड़े लीजिए :

- $a \times a \times a$ घन
- तीन में से दो $a \times a \times b$ घनाभ
- एक $a \times b \times b$ घनाभ

इन चार टुकड़ों को इस प्रकार खड़ा कीजिए कि इनके आधार आकृति 6.13 (i) के अनुसार हों। तब प्रत्येक टुकड़े की ऊँचाई a होगी [आकृति 6.13 (ii)]। स्पष्टतया, चारों गुटकों के आधारों से भुजा $a + b$ वाला एक वर्ग बन जाएगा। जो ठोस हम बनाने जा रहे हैं, ये चारों गुटके उसका निचला स्तर या भाग बनाते हैं। ध्यान दीजिए कि यह भाग भुजाओं $a + b, a + b, a$ वाला एक घनाभ बन गया।

अब शेष चार गुटके लेकर उन्हें भी इस प्रकार खड़ा कीजिए कि उनके आधार भी आकृति 6.13 (i) के अनुसार ही हों। तब प्रत्येक गुटके की ऊँचाई b होगी [आकृति 6.13 (iii)]। इन टुकड़ों को निचले भाग [आकृति 6.13 (ii)] के ऊपर इस प्रकार चढ़ाकर रखिए कि बीच में खाली स्थान न रहने पाए। यह ऊपर वाला भाग हुआ। ध्यान दीजिए कि यह भाग भुजाओं $a+b, a+b$ और b वाला एक घनाभ है। इसका आधार निचले भाग की ऊपरी सतह को ठीक पूरा-पूरा ढक लेगा। क्योंकि निचले भाग की ऊँचाई a और ऊपरी भाग की ऊँचाई b है, अतः इस प्रकार बने ठोस की ऊँचाई $a+b$ है [आकृति 6.13 (iv)। इस प्रकार हम जो आठ गुटके लेकर चले थे उनसे भुजा $a+b$ वाला एक घन बन गया।

आकृति : 6.13

क्योंकि गुटकों के बीच कोई खाली स्थान नहीं है और स्पष्टतः अतिव्याप्ति (overlap) अर्थात् आंशिक आच्छादन तो है ही नहीं, बने हुए ठोस का आयतन गुटकों के कुल आयतन के बराबर है। अतः प्राप्त हुआ :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

इस प्रकार सर्वसमिका का ज्यामितीय सत्यापन हुआ।

भुजा $a+b$ वाले घन से आरंभ कर हम ऊपर से उलटी (reverse) क्रिया भी कर सकते हैं। कद्दू या आलू जैसे किसी शाक का एक ठोस टुकड़ा लीजिए जो कुछ नरम तो हो पर लचीला नहीं (जिससे यह कट सके और कटने पर अपना आकार बनाए रखे)। सभी ओर से काट-काटकर इसे घन का आकार दीजिए। दियासलाई की तीली का एक छोटा टुकड़ा लीजिए जिसकी लंबाई, माना कि b हो। शाक के टुकड़े की ऊपरी सतह के एक कोने से दोनों ओर यह दूरी माप लीजिए। कोने से इस नापी गई दूरी पर ऊर्ध्वाधर तलों द्वारा शाक के इस टुकड़े को काटकर ऊँचाई $a+b$ वाले चार घनाभ प्राप्त कीजिए। इनके ऊपरी फलकों के माप $b \times b$, $a \times b$, $b \times a$ और $a \times a$ हैं। इन चारों को ऊपरी फलक से b दूरी नीचे एक-एक क्षैतिज तल से काटिए। ऐसा करने पर चारों में से प्रत्येक घनाभ के दो-दो टुकड़े हो जाएँगे और इस प्रकार कुल मिलाकर आठ टुकड़े प्राप्त होंगे। इन टुकड़ों के माप $b \times b \times b$, $b \times a \times b$, $b \times b \times a$, $b \times a \times a$, $a \times b \times b$, $a \times a \times b$, $a \times b \times a$ और $a \times a \times a$ हैं।

इन टुकड़ों के आयतन $b^3, ab^2, ab^2, a^2b, ab^2, a^2b, a^2b,$ और a^3 हैं। क्योंकि इन टुकड़ों का कुल आयतन उस टुकड़े के आयतन के बराबर है जिसे हम लेकर चले थे, अतः

$$b^3 + ab^2 + ab^2 + a^2b + ab^2 + a^2b + a^2b + a^3 = (a+b)^3$$

या

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

इस प्रकार, जिस सर्वसमिका की हम बात कर रहे थे, वह सत्यापित हुई।

IV. $(a-b)^3$ का प्रसारण

जिस प्रकार हमने सर्वसमिका A का प्रयोग कर $(a+b)^3$ का प्रसार किया था, उसी प्रकार सर्वसमिका B का प्रयोग कर हम $(a-b)^3$ का प्रसार कर सकते हैं।

सर्वसमिका B से प्राप्त होता है :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

दोनों पक्षों को $(a-b)$ से गुणा करने पर मिलता है:

$$(a-b)\,(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2)$$

या $\quad (a-b)^3 = a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2)$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$ (समान पदों को मिलाकर a के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है :

सर्वसमिका IV : $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

सर्वसमिका IV के RHS के पदों को हम ऐसे रूप में पुनर्व्यवस्थित कर सकते हैं जिसे याद रखना अपेक्षाकृत सरल हो।

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$ (पदों को पुनर्व्यवस्थित कर)

$$= a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)$$ (अंतिम दो पदों में से $-3ab$ सार्व लेकर)

यहाँ से सर्वसमिका IV का निम्नलिखित वैकल्पिक रूप प्राप्त होता है :

सर्वसमिका IV′ : $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)}$

टिप्पणी: सर्वसमिका IV को सर्वसमिका III में b के स्थान पर $-b$ रखकर प्राप्त किया जा सकता है। इसी प्रकार, सर्वसमिका IV′ को सर्वसमिका III′ से प्राप्त किया जा सकता है।

अब इन सर्वसमिकाओं का प्रयोग दिखाने के लिए कुछ उदाहरण लिए जाएँगे।

उदाहरण 10 : निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए :

(i) $(7x+4y)^3$ (ii) $(2p-9q)^3$

हल : (i) दिए हुए व्यंजक की तुलना $(a+b)^3$ से करने पर, हम पाते हैं कि

$a = 7x,\; b = 4y$

अत: सर्वसमिका III′ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$(7x+4y)^3 = (7x)^3 + (4y)^3 + 3(7x)(4y)(7x+4y)$$

$$= 343x^3 + 64y^3 + 84xy(7x+4y)$$

$$= 343x^3 + 64y^3 + 588x^2y + 336xy^2$$
$$= 343x^3 + 588x^2y + 336xy^2 + 64y^3$$

(x के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

(ii) दिए हुए व्यंजक की तुलना $(a - b)^3$ से करने पर, हम पाते हैं कि

$$a = 2p, \ b = 9q$$

अत: सर्वसमिका IV′ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(2p - 9q)^3 = (2p)^3 - (9q)^3 - 3(2p)(9q)(2p - 9q)$$
$$= 8p^3 - 729q^3 - 54pq\,(2p - 9q)$$
$$= 8p^3 - 729q^3 - 108p^2q + 486pq^2$$
$$= 8p^3 - 108p^2q + 486pq^2 - 729q^3$$

(p के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

उदाहरण 11 : (i) $(-3x + 5y)^3$ और (ii) $(-2z - y)^3$ का प्रसार कीजिए।

हल : (i) सर्वसमिका III′ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(-3x + 5y)^3 = (-3x)^3 + (5y)^3 + 3(-3x)(5y)(-3x + 5y)$$
$$= -27x^3 + 125y^3 - 45xy\,(-3x + 5y)$$
$$= -27x^3 + 125y^3 + 135x^2y - 225xy^2$$
$$= -27x^3 + 135x^2y - 225xy^2 + 125y^3$$

(x के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

(ii) सर्वसमिका III′ का प्रयोग करने पर,

$$(-2z - y)^3 = \{(-2z) + (-y)\}^3$$
$$= (-2z)^3 + (-y)^3 + 3(-2z)(-y)(-2z - y)$$
$$= -8z^3 - y^3 + 6yz\,(-2z - y)$$
$$= -8z^3 - y^3 - 12yz^2 - 6y^2z$$
$$= -y^3 - 6y^2z - 12yz^2 - 8z^3$$
$$= -(y^3 + 6y^2z + 12yz^2 + 8z^3)$$

(y के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर)

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि $(-A)^3 = -A^3$ । अतः हम $(-2z - y)^3$ का मान $-(2z + y)^3$ के रूप में भी ज्ञात कर सकते थे।

उदाहरण 12 : $(x + 4y)^3 - (x - 4y)^3$ को सरल कीजिए।

हल : सर्वसमिका III′ का प्रयोग करने पर,

$$\begin{aligned}(x + 4y)^3 &= (x)^3 + (4y)^3 + 3(x)(4y)(x + 4y)\\ &= x^3 + 64y^3 + 12xy(x + 4y)\\ &= x^3 + 64y^3 + 12x^2y + 48xy^2\\ &= x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3 \quad (x \text{ के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर})\end{aligned}$$

सर्वसमिका IV′ का प्रयोग करने पर,

$$\begin{aligned}(x - 4y)^3 &= (x)^3 - (4y)^3 - 3(x)(4y)(x - 4y)\\ &= x^3 - 64y^3 - 12xy(x - 4y)\\ &= x^3 - 64y^3 - 12x^2y + 48xy^2\\ &= x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3 \quad (x \text{ के घातांकों के घटते क्रम में रखने पर})\end{aligned}$$

ऊपर ज्ञात किए गए $(x + 4y)^3$ और $(x - 4y)^3$ के मानों का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned}(x + 4y)^3 - (x - 4y)^3 &= (x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3) - (x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3)\\ &= 24x^2y + 128y^3\end{aligned}$$

उदाहरण 13 : $x^3 + 8y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x + 2y = 8$ और $xy = 6$ है।

हल : दिया गया है : $x + 2y = 8$ और $xy = 6$

अब $(x + 2y)^3 = x^3 + (2y)^3 + 3(x)(2y)(x + 2y)$ (सर्वसमिका III′ से)

$= x^3 + 8y^3 + 6xy\,(x + 2y)$

$\therefore \quad x^3 + 8y^3 = (x + 2y)^3 - 6xy\,(x + 2y)$

$= (8)^3 - 6\,(6)(8)$ ($x + 2y = 8$ और $xy = 6$ रखने पर)

$= 512 - 288$

$= 224$

उदाहरण 14 : किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर 1001^3 का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वसमिका III′ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$1001^3 = (1000 + 1)^3$$
$$= 1000^3 + 1^3 + 3(1000)(1)(1000 + 1)$$
$$= 1000000000 + 1 + 3000(1000 + 1)$$
$$= 1000000000 + 1 + 3000000 + 3000$$
$$= 1003003001$$

उदाहरण 15 : किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर 998^3 का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वसमिका IV′ का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$998^3 = (1000 - 2)^3$$
$$= (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000 - 2)$$
$$= (1000)^3 - (2)^3 - 6(1000)(998)$$
$$= 1000000000 - 8 - 5988000$$
$$= (1000000000 - 5988000) - 8$$
$$= 994012000 - 8$$
$$= 994011992$$

प्रश्नावली 6.3

निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए :

1. $(x + 2y)^3$ **2.** $(2x - 3y)^3$ **3.** $(ax + by)^3$

4. $(x^2 + 2y)^3$ **5.** $(2x - y^2)^3$ **6.** $(-x + 4y)^3$

7. $(a + 5y)^3$ **8.** $\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}y\right)^3$ **9.** $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)^3$

10. $8x^3 + 27y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $2x + 3y = 8$ और $xy = 2$ (ii) $2x + 3y = 18$ और $xy = 12$

(iii) $2x + 3y = 19$ और $xy = 3$ (iv) $2x + 3y = \frac{21}{2}$ और $xy = \frac{5}{6}$

11. $p^3 - 8y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $p - 2y = 2$ और $py = 8$ (ii) $p - 2y = 1$ और $py = 10$

(iii) $p - 2y = 13$ और $py = -21$ (iv) $p - 2y = -11$ और $py = -5$

12. $125p^3 - 8q^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $5p - 2q = 1$ और $pq = 2$ (ii) $5p - 2q = 6$ और $pq = 4$

(iii) $5p - 2q = 7$ और $pq = 12$ (iv) $5p - 2q = 13$ और $pq = 30$

सरल कीजिए :

13. $(a + 2b)^3 + (a - 2b)^3$ **14.** $(a - 3b)^3 + (a + 3b)^3$

15. $(2a + 5b)^3 - (2a - 5b)^3$ **16.** $(7 - 2b)^3 - (7 + 2b)^3$

17. $\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\right)^3 + \left(\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b\right)^3$ **18.** $\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\right)^3 - \left(\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b\right)^3$

किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर निम्नलिखित घनों के मान निकालिए :

19. (i) $(104)^3$ (ii) $(1004)^3$ (iii) $(503)^3$

20. (i) $(99)^3$ (ii) $(996)^3$ (iii) $(999)^3$

21. (i) $(599)^3$ (ii) $(9.8)^3$ (iii) $(8.01)^3$

6.3 बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन

याद कीजिए कि किसी दिए गए बीजय व्यंजक को बहुधा दो या दो से अधिक बीजीय व्यंजकों (और संख्याओं) के गुणनफल के रूप में लिखना संभव होता है। जब कोई बीजीय व्यंजक कुछ संख्याओं और बीजीय व्यंजकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो इन संख्याओं और बीजीय व्यंजकों में से प्रत्येक दिए गए व्यंजक का *गुणनखंड* कहलाता है। किसी दिए गए व्यंजक को संख्याओं और बीजीय व्यंजकों के गुणनफल के रूप में लिखने की प्रक्रिया को *गुणनखंडन* कहते हैं। उदाहरणत:, क्योंकि $10pq = 5 \times 2 \times p \times q$ है, अत: 5, 2, p और q सभी $10pq$ के गुणनखंड हैं।

कक्षा VII में आपने गुणनखंडन की तीन मूलभूत विधियाँ सीखीं थीं :

- कोई सार्व गुणनखंड अलग कर गुणनखंडन करना

- पदों के पुनर्समूहन द्वारा गुणनखंडन करना
- सर्वसमिकाओं के प्रयोग द्वारा गुणनखंडन करना

आप पहले से ही जानते हैं कि सर्वसमिकाओं A, B और C (जिनका उल्लेख इस अध्याय के आरंभ में किया गया) का प्रयोग बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन में कैसे किया जाता है। अब हम इस अध्याय में सीखी गई सर्वसमिकाओं I से IV का प्रयोग कर बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन करेंगे।

उदाहरण 16 : $x^2 + 5x + 6$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल: सर्वसमिका I से हम जानते हैं कि

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि हम ऐसी दो संख्याएँ a और b (धनात्मक या ऋणात्मक) खोज सकें जिनका योगफल $a + b$, x का गुणांक हो और जिनका गुणनफल ab दिए गए व्यंजक का अचर पद हो, तो दिए हुए व्यंजक को $(x + a)(x + b)$ के रूप में गुणनखंडित किया जा सकता है। अत: आइए, ऐसी दो संख्याएँ a और b खोजने का प्रयास करें कि

$a + b = 5$ (x का गुणांक)

और $ab = 6$ (अचर पद)

अब 6 के गुणनखंड $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ और ± 6 हैं। प्रयत्न और भूल (trial and error) विधि द्वारा हम देखते हैं कि a और b को 2 और 3 लिया जा सकता है। 2 और 3 का योगफल 5 और इनका गुणनफल 6 है। अत :

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2 = (x + 3)(x + 2)$ (सर्वसमिका I के प्रयोग से)

टिप्पणी : a और b का मान ज्ञात करने के लिए, प्रयत्न और भूल विधि में लगने वाले प्रयत्न को कुछ कम करने के लिए आप एक सरल तर्क का प्रयोग कर सकते थे। आइए, योगफल $a + b$ को S से और गुणनफल ab को P से व्यक्त करें। ध्यान दीजिए कि ऊपर लिए गए उदाहरण में S (5) धनात्मक है और P (6) भी धनात्मक है। इस तथ्य को हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं : S : +, P : +

क्योंकि P धनात्मक है, अत: a और b या तो दोनों धनात्मक हैं या a और b दोनों ऋणात्मक। चूँकि S धनात्मक है, अत: a और b दोनों धनात्मक हैं। अत: हमें ऋणात्मक

गुणनखंडों पर ध्यान देने की आवश्यकता नहीं है। अब यह देखना सरल हो जाता है कि a और b के मान किसी क्रम में 2 और 3 हैं।

उदाहरण 17 : $x^2 + 3x - 10$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : यहाँ हमें दो संख्याएँ a और b ऐसी ज्ञात करनी हैं कि

$$a + b = 3 \quad (x \text{ का गुणांक})$$

और $$ab = -10 \quad (\text{अचर पद}) \text{ हो।}$$

अब -10 के गुणनखंड $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ और ± 10 हैं। थोड़े अनुमान और जाँच-परख से ज्ञात हो जाता है कि a और b को 5 तथा -2 लिया जा सकता है। 5 और -2 का योगफल 3, तथा इनका गुणनफल -10 है। अत:

$$x^2 + 3x - 10 = x^2 + \{5 + (-2)\}x + 5(-2)$$

$$= (x + 5)(x - 2) \qquad (\text{सर्वसमिका I के प्रयोग से})$$

टिप्पणी : यहाँ S : +, P : – है। चूँकि P ऋणात्मक है, अत: a और b में से एक संख्या धनात्मक और दूसरी ऋणात्मक है। यह ध्यान में रखते हुए, और यह भी कि S धनात्मक है, हम पाते हैं कि a और b में से बड़ी संख्या धनात्मक है। अब a और b के मानों को 5 और -2 निर्धारित करना सरल कार्य है।

उदाहरण 18 : $x^2 - 7x + 12$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : यहाँ S: –, P: + है। इसका अर्थ यह हुआ कि a और b दोनों ऋणात्मक हैं। क्योंकि

$$a + b = -7 \text{ और } ab = 12,$$

और 12 के ऋणात्मक गुणनखंड $-1, -2, -3, -4, -6$ और -12 हैं, हम पाते हैं कि $a = -4$ तथा $b = -3$ (या फिर $a = -3$ तथा $b = -4$) अत:,

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 + \{(-4) + (-3)\}x + (-4) \times (-3)$$

$$= (x - 4)(x - 3) \qquad (\text{सर्वसमिका I के प्रयोग से})$$

उदाहरण 19 : $x^2 - 3x - 10$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : यहाँ S : –, P : – है। अत: a और b में से एक धनात्मक और दूसरी संख्या ऋणात्मक है। S के ऋणात्मक होने के कारण संख्यात्मक रूप से बड़ा पद ऋणात्मक होगा। 10 के

गुणनखंड $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ तथा ± 10 हैं। अतः a और b के मान -5 और 2 लेने से हमारा कार्य पूरा हो जाएगा। इस प्रकार,

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 + \{2 + (-5)\}x + 2(-5)$$

$$= (x + 2)(x - 5) \qquad \text{(सर्वसमिका I के प्रयोग से)}$$

टिप्पणी : यदि किसी कारणवश भ्रम होने लगे, तो यह आवश्यक नहीं कि अंत में जो गुणनखंड बनते हैं उन्हें आप सर्वसमिका I के प्रयोग से ही लिखें। एक बार x के गुणांक और अचर पद को दो भागों में विभाजित करने के बाद, आप पुनर्समूहन कर सकते हैं। इससे आप एक सार्व गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार, ऊपर दिए गए उदाहरण में,

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 + \{2 + (-5)\}x + 2(-5)$$

$$= x^2 + 2x + (-5)x + 2(-5)$$

$$= (x^2 + 2x) + \{(-5)x + 2(-5)\} \qquad \text{(पदों के पुनर्समूहन से)}$$

$$= x(x + 2) + (-5)(x + 2) \qquad \text{(पहले दो पदों में से सार्व } x \text{ और अंतिम}$$

$$= (x + 2)(x - 5) \qquad \text{दो पदों में से सार्व } -5 \text{ बाहर लेने पर)}$$

यदि आपने गुणनखंडन सर्वसमिका I के प्रयोग से किया है, तो आप इस विधि से उत्तर की जाँच कर सकते हैं।

उदाहरण 20 : व्यंजक $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि पहले तीन पद क्रमशः $2x, y$ और z के वर्ग हैं। यह सर्वसमिका II, अर्थात्

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

की ओर इंगित करता है। आगे, दिए हुए व्यंजक में xy तथा yz वाले पद ऋणात्मक हैं। ऐसा दो प्रकार से हो सकता है :

1. इन दोनों पदों में सार्व अक्षर संख्या y का गुणांक ऋणात्मक हो और x तथा z के गुणांक धनात्मक हों। इस दशा में x, y, z के गुणांकों के चिह्नों का क्रम $+, -, +$ होगा।
2. y का गुणांक तो धनात्मक हो परंतु x और z के गुणांक ऋणात्मक हों। इस दशा में x, y, z के गुणांकों के चिह्नों का क्रम $-, +, -$ होगा।

क्योंकि किसी व्यंजक (A) और इसके संगत ऋणात्मक व्यंजक (–A) का वर्ग समान होता है, अतः इससे कोई अंतर नहीं पड़ता कि ऊपर बताई गई दशाओं में से कौन सी दशा

ली जाती है। पहली दशा लेने पर, दिए गए व्यंजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y^2) + z^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)z + 2(2x)z$

दिए गए व्यंजक के इस रूप की तुलना सर्वसमिका II के RHS से करने पर, हम पाते हैं कि

$$a = 2x, b = -y, c = z$$

अतः $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

$= (2x)^2 + (-y^2) + z^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)z + 2(2x)z$

$= \{2x + (-y) + z\}^2$ (सर्वसमिका II के प्रयोग से)

$= (2x - y + z)^2$

$= (2x - y + z)(2x - y + z)$

उदाहरण 21 : व्यंजक $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि पहले दो पद क्रमशः $2x$ और $3y$ घन हैं। साथ ही शेष दो पदों का गुणनखंड 3 है। इससे बोध होता है कि सर्वसमिका III′ अर्थात्

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

का प्रयोग किया जाए। दिए हुए व्यंजक को हम इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2 = (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)(3y)(2x + 3y)$$

दिए हुए व्यंजक के इस रूप की तुलना सर्वसमिका III′ के RHS से करने पर, हम पाते हैं :

$$a = 2x, \ b = 3y$$

अतः,

$8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2 = (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)(3y)(2x + 3y)$

$= (2x + 3y)^3$ (सर्वसमिका III′ के प्रयोग से)

$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$

उदाहरण 22 : व्यंजक $8x^3 - \frac{y^3}{27} - 2xy\left(2x - \frac{y}{3}\right)$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि $8x^3$ और $\frac{y^3}{27}$ क्रमशः $2x$ और $\frac{y}{3}$ के घन हैं। इससे सर्वसमिका IV′,

अर्थात्

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)$$

के प्रयोग का बोध होता है। दिए गए व्यंजक को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

$$8x^3 - \frac{y^3}{27} - 2xy\left(2x - \frac{y}{3}\right) = (2x)^3 - \left(\frac{y}{3}\right)^3 - 3(2x)\left(\frac{y}{3}\right)\left(2x - \frac{y}{3}\right)$$

दिए गए व्यंजक के इस रूप की तुलना सर्वसमिका IV′ के RHS से करने पर, हम पाते हैं :

$$a = 2x,\ b = \frac{y}{3}$$

अत:, $$8x^3 - \frac{y^3}{27} - 2xy\left(2x - \frac{y}{3}\right) = (2x)^3 - \left(\frac{y}{3}\right)^3 - 3(2x)\left(\frac{y}{3}\right)\left(2x - \frac{y}{3}\right)$$

$$= \left(2x - \frac{y}{3}\right)^3 \qquad \text{(सर्वसमिका IV′ के प्रयोग से)}$$

$$= \left(2x - \frac{y}{3}\right)\left(2x - \frac{y}{3}\right)\left(2x - \frac{y}{3}\right)$$

प्रश्नावली 6.4

निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक का गुणनखंडन कीजिए :

1. $x^2 + 10x + 9$

2. $x^2 + 7x + 12$

3. $y^2 - 2y - 8$

4. $y^2 - 6y - 7$

5. $p^2 + 3p - 4$

6. $p^2 + 4p - 12$

7. $m^2 - 8m + 15$

8. $m^2 - 10m + 24$

निम्नलिखित में से प्रत्येक व्यंजक का गुणनखंडन कीजिए :

9. $9x^2 + y^2 + 25z^2 + 6xy + 10yz + 30xz$

10. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

11. $m^2 + 4n^2 + 25z^2 - 4mn - 20nz + 10mz$

12. $49m^2 + 4n^2 + 9z^2 - 28mn + 12nz - 42mz$

13. $9x^2 + y^2 + 25 + 6xy + 10y + 30x$

निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंडन कीजिए :

14. $p^2 + \frac{q^2}{4} + 1 + pq + q + 2p$

15. $\frac{p^2}{4}+\frac{q^2}{9}+36+\frac{pq}{3}+4q+6p$

16. $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy - 4\sqrt{2}yz + 8xz$ [संकेत : $2 = (\sqrt{2})^2$]

17. $3x^2+3y^2+z^2+6xy+2\sqrt{3}yz+2\sqrt{3}xz$

निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक का गुणनखंडन कीजिए :

18. $8x^3 + y^3 + 12x^2y + 6xy^2$

19. $8x^3 - y^3 - 12x^2y + 6xy^2$

20. $27q^3 - 125p^3 - 135q^2p + 225qp^2$

21. $64p^3 - 27q^3 - 144p^2q + 108pq^2$

22. $27 - 125p^3 - 135p + 225p^2$

23. $64p^3 - 27 - 144p^2 + 108p$

24. $8x^3 + 729 + 108x^2 + 486x$

25. $27x^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$

याद रखने योग्य बातें

कुछ मानक सर्वसमिकाएँ

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
4. $(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$

   या

   $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
5. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
6. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

   या

   $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
7. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

   या

   $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

अध्याय

7

बहुपद

7.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आपने बीजीय व्यंजकों का अध्ययन किया था। जैसा कि आप जानते हैं, कि किसी बीजीय व्यंजक में कई अक्षर संख्याएँ (literals) हो सकती हैं जिन्हें *चर* (*variable*) भी कहा जाता है। जिन बीजीय व्यंजकों का अध्ययन आपने किया था, उनमें आने वाली अक्षर संख्याओं के घातांक केवल *ऋणेतर* (*non-negative*) पूर्णांक थे। इस गुण वाले बीजीय व्यंजक *बहुपद* (*polynomial*) कहलाते हैं। कुछ बहुपद अन्य बहुपदों की तुलना में, इस अर्थ में सरलतर होते हैं कि इनमें केवल एक ही अक्षर संख्या, जैसे कि x होती है। ऐसे *बहुपद एक चर x वाले बहुपद* (*polynomials in one variable*) कहलाते हैं।

इस अध्याय में, हम एक चर वाले बहुपदों का अध्ययन करेंगे। हम किसी बहुपद को एकपदी अथवा द्विपद से भाग देना सीखेंगे। हम विभाजन की इस प्रक्रिया से संबद्ध भाज्य, भाजक, भागफल और शेष के मध्य दो उपयोगी और रोचक संबंध भी प्राप्त करेंगे।

7.2 एक चर वाले बहुपद

जैसा कि अनुच्छेद 7.1 में बताया गया है,

बहुपद ऐसे बीजीय व्यंजक को कहते हैं जिसके चरों के घातांक केवल ऋणेतर पूर्णांक हों। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित सभी व्यंजक बहुपद हैं :

$17 + 2x + x^2,\ 7x^3 + \sqrt{2}x^2y - 5xy^2 + 12y^3,\ x^4 + 3x - 9$

पहला बहुपद और अंतिम बहुपद एक चर x वाला है। मध्य का व्यंजक दो चरों x और y वाला बहुपद है। आगे से जब तक अन्यथा न कहा जाए, *बहुपद शब्द से हमारा तात्पर्य एक चर वाले बहुपद से होगा।*

क्या निम्नलिखित व्यंजकों में से कोई भी एक बहुपद है?

$$6 + 2x^{-2} + x^2,\ x^2 + 3\sqrt{x} - 9,\ 2x^2 - x^{\frac{1}{3}} + 4$$

पहले व्यंजक में चर x का घातांक ऋणात्मक है। दूसरे और तीसरे व्यंजकों में चरों के घातांक आवश्यक रूप से धनात्मक पूर्णांक नहीं हैं। अतः, इनमें से कोई भी व्यंजक बहुपद नहीं है।

केवल एक पद वाले बहुपद को *एकपदी* (*monomial*) कहते हैं। केवल दो पदों वाले बहुपद को *द्विपद* (*binomial*) तथा केवल तीन पदों वाले बहुपद को *त्रिपद* (*trinomial*) कहा जाता है। बहुपद में *बहु* शब्द का अर्थ *अनेक* है। इस प्रकार, बहुपद के शाब्दिक अर्थ से अनेक पदों वाले व्यंजक का बोध होता है। परंतु इसे एकपदियों, द्विपदों और त्रिपदों के लिए भी प्रयोग किया जाता है।

जिस बहुपद में केवल एक चर, माना कि x हो, उसे चर x में (या चर x वाला) बहुपद कहते हैं।

इस प्रकार, $5x^2 + 13x - 9$ चर x में एक बहुपद है।

$y^3 + 7y - 19$ चर y में एक बहुपद है।

बहुपद के पदों को चर के घातांकों के अवरोही अर्थात् घटते क्रम में लिखा जाता है। इसे *बहुपद का मानक रूप* (*standard form of a polynomial*) कहते हैं। जिस पद में x नहीं होता उसे अंत में लिखा जाता है। इसे *अचर* (*constant*) पद कहा जाता है, क्योंकि चर को कोई भी मान क्यों न दे दिया जाए, इसका मान वही रहता है। चर x वाले बहुपद को प्राय: $p(x), q(x), r(x)$ आदि जैसे किसी संकेत से व्यक्त किया जाता है।

बहुपद में चर के अधिकतम घातांक को बहुपद की घात (degree) कहते हैं।

दृष्टांत 1 : x वाले बहुपद $5x^2 + 13x - 9$ की घात 2 है। हम कहते हैं कि यह *दूसरी घात वाला* या *घात 2 वाला बहुपद* है।

दृष्टांत 2 : y वाले बहुपद $y^3 + 17y$ की घात 3 है। हम कहते हैं कि यह *तीसरी घात* या *घात 3 वाला बहुपद* है।

दृष्टांत 3 : p में बहुपद $2p + 3$ की घात 1 है।

दृष्टांत 4 : 3 या -72 जैसे किसी भी *अचर* को *घात 0 वाला बहुपद* कहते हैं, क्योंकि किसी संख्या जैसे कि 3 को हम $3x^0$ समझ सकते हैं।

टिप्पणी : घात दो वाले बहुपद को *द्विघात* (*quadratic*) बहुपद भी कहा जाता है। तीसरी घात वाले बहुपद को *त्रिघात* (*cubic*) बहुपद भी कहा जाता है। चौथी घात वाले बहुपद (उदाहरणतः, $3x^4$ या $2x^4 + 3x^2 + 9x + 4$) को *चतुर्घात* (*biquadratic*) बहुपद भी कहते हैं।

7.3 बहुपद का बहुपद से विभाजन

पूर्णांकों के संदर्भ में, विभाजन की प्रक्रिया याद कीजिए। दो अगल-अलग स्थितियाँ देखने में आती थीं। पहली स्थिति तो वह जहाँ एक पूर्णांक दूसरे पूर्णांक से पूरी तरह विभाजित हो जाता था। उदाहरण के लिए, जब हम 12 को 4 से भाग देते थे, तो भागफल 3 प्राप्त होता था। (इसका अर्थ यह भी था कि 12 को 3 से भाग देने पर भागफल 4 प्राप्त होता था।) वास्तव में, हम केवल $12 \div 4$ को 3 के रूप में सरल कर रहे होते थे। दूसरी स्थिति उन पूर्णांकों के संदर्भ में देखने को मिलती थी जहाँ एक पूर्णांक दूसरे से पूरी तरह विभाजित नहीं होता था और कुछ शेष प्राप्त होता था। उदाहरणतः, 12 को 7 से पूरी तरह विभाजित नहीं किया जा सकता था। 12 को 7 से भाग देने पर भागफल 1 और शेष 5 प्राप्त होता था।

एक चर वाले बहुपदों के संदर्भ में भी जहाँ तक विभाजन की प्रक्रिया का प्रश्न है, ऐसी ही दो स्थितियाँ देखने में आती हैं। कभी-कभी तो केवल सरलीकरण ही किया जाता है; एक बहुपद को किसी बहुपद से भाग देने पर एक बहुपद प्राप्त हो जाता है। परंतु बहुधा ऐसा संयोग नहीं बनता और एक भागफल तथा कुछ शेष प्राप्त होता है। इन दो स्थितियों का उल्लेख हम *शून्य-शेषफल* (*zero-remainder*) तथा *शून्येतर-शेषफल* (*non-zero-remainder*) के रूप में करेंगे।

7.4 बहुपद का बहुपद से विभाजन : शून्य-शेषफल

हम उस सरल दशा से आरंभ करते हैं जहाँ एक बहुपद $p(x)$ को एक दूसरे बहुपद $q(x)$ से विभाजित करने पर कोई तीसरा बहुपद $r(x)$ प्राप्त होता है। याद कीजिए कि भाग देने की प्रक्रिया गुणा करने की प्रक्रिया से एक विशिष्ट रूप में जुड़ी होती है। सर्वाधिक मूलभूत रूप में, पूर्णांकों के प्रत्येक गुणन-तथ्य से, आगे दिखाए अनुसार, दो भाजन-तथ्य प्राप्त होते हैं :

गुणन-तथ्य : $5 \times 4 = 20$

संबद्ध भाजन-तथ्य : $20 \div 5 = 4, 20 \div 4 = 5$

इस विचार का विस्तार हम बहुपदों के विभाजन की प्रक्रिया के लिए कर सकते हैं। यदि कोई बहुपद किन्हीं अन्य दो बहुपदों का गुणनफल हो, तो बहुपदों के इस एक गुणन-तथ्य

से बहुपदों के दो भाजन-तथ्य प्राप्त होते हैं।

इस अध्याय के शेष भाग में, हम यह मानकर चलेंगे कि किसी भी उदाहरण के सभी बहुपदों में वही एक चर आता है। इस प्रकार, हम $p^2 + 3p - 28$ को $p - 4$ से भाग देने की बात तो कर सकते हैं, पर $y - 4$ से नहीं।

7.4.1 एकपदी का एकपदी से विभाजन

दृष्टांत 5 : गुणन-तथ्य : $x^3 \times x^2 = x^5$

संबद्ध भाजन-तथ्य : $x^5 \div x^3 = x^2,\ x^5 \div x^2 = x^3$

इस भाजन-तथ्यों को हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{x^5}{x^3} = x^2,\ \frac{x^5}{x^2} = x^3$$

दृष्टांत 6 : गुणन-तथ्य : $5x^4 \times 3x = 15x^5$

संबद्ध भाजन-तथ्य : $15x^5 \div 5x^4 = 3x,\ 15x^5 \div 3x = 5x^4$

इन भाजन-तथ्यों को हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{15x^5}{5x^4} = 3x,\ \frac{15x^5}{3x} = 5x^4$$

ऊपर के उदाहरणों से लगता है कि संख्याओं के घातांक-नियमों का प्रयोग अक्षर संख्याओं के लिए भी किया जा सकता है। वास्तव में ऐसा करना तथ्यसंगत भी होगा क्योंकि अक्षर संख्याएँ वस्तुतः व्यक्त तो संख्याओं को ही करती हैं। इस प्रकार, किसी एकपदी को किसी एकपदी से विभाजित करने के लिए हमें निम्नलिखित दो नियम प्राप्त होते हैं :

नियम 1 : दो एकपदियों के भागफल का गुणांक उनके गुणांकों का भागफल होता है।

नियम 2 : दो एकपदियों के भागफल में चर वाला भाग दिए गए एकपदियों के चरों वाले भागों के भागफल के बराबर होता है।

उदाहरण 1 : भाग दीजिए : (i) $-20\,x^4$ को $10x$ से (ii) $3y^3$ को $\sqrt{3}y$ से

हल : (i) $\dfrac{-20x^4}{10x} = \left(\dfrac{-20}{10}\right)\left(\dfrac{x^4}{x}\right) = -2x^3$

(ii) $\dfrac{3y^3}{\sqrt{3}y} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{y^3}{y}\right) = \sqrt{3}y^2$

7.4.2 बहुपद को एकपदी से भाग देना

किसी बहुपद को एक दिए गए एकपदी से भाग देने की दो सुविधाजनक विधियाँ हैं। पहली विधि में भाग की प्रक्रिया निम्नलिखित चरणों में की जाती है :

चरण 1 : दिए गए भाज्य बहुपद के पदों को अलग-अलग लिखिए।

चरण 2 : अब प्रत्येक पद को दिए गए एकपदी से भाग दीजिए।

चरण 3 : प्राप्त भागफलों को जोड़ लीजिए।

आइए, इस विधि को एक उदाहरण के द्वारा समझें।

उदाहरण 2 : $3y^3 + 15y^2 + 12y$ को $3y$ से भाग दीजिए।

हल: चरण 1 : दिए गए बहुपद में ये तीन पद हैं: $3y^3$, $15y^2$ और $12y$ ।

चरण 2 : प्रत्येक पद को दिए गए एकपदी $3y$ से भाग देने पर प्राप्त होता है :

$$\frac{3y^3}{3y}, \frac{15y^2}{3y}, \frac{12y}{3y}$$

या y^2, $5y$, 4

चरण 3 : ऊपर वाले भागफलों को जोड़ने पर, इच्छित हल $y^2 + 5y + 4$ प्राप्त होता है। अतः,

$$\frac{3y^3 + 15y^2 + 12y}{3y} = y^2 + 5y + 4$$

टिप्पणी : जब प्रक्रिया आपकी समझ में आ जाए तब अगले उदाहरण की भाँति आप हल को संक्षिप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : $34x^3 - 17x^2 + 51x$ को $17x$ से भाग दीजिए।

हल : $$\frac{34x^3 - 17x^2 + 51x}{17x} = \frac{34x^3}{17x} + \frac{-17x^2}{17x} + \frac{51x}{17x}$$
$$= 2x^2 - x + 3$$

दूसरी विधि : हम पहले ही जानते हैं कि बीजीय व्यंजक के गुणनखंड से क्या तात्पर्य है। क्योंकि बहुपद एक विशेष प्रकार का बीजीय व्यंजक ही होता है, अत: हम बहुपद के गुणनखंड का अर्थ भी समझते हैं। हम बहुपदों का गुणनखंडन करना भी सीख चुके हैं। अत: किसी बहुपद को किसी एकपदी से भाग देने के लिए हम उस बहुपद को जिसे भाग दिया जाना है, इस प्रकार गुणनखंडित करते हैं कि गुणनखंडों में से एक, दिया गया एकपदी हो। इसके बाद नीचे दिखाए गए उदाहरण की भाँति भाग की प्रक्रिया अधिक सुविधाजनक रीति से की जा सकती है।

उदाहरण 4 : $4q^3 - 10q^2 + 5q$ को $2q$ से भाग दीजिए।

हल : $4q^3 - 10q^2 + 5q = 2q \times 2q^2 - 2q \times 5q + 2q \times \left(\frac{5}{2}\right)$

$$= 2q \times \left(2q^2 - 5q + \frac{5}{2}\right)$$

अत:, $4q^3 - 10q^2 + 5q = 2q \times \left(2q^2 - 5q + \frac{5}{2}\right)$, जिससे कि

$$\frac{4q^3 - 10q^2 + 5q}{2q} = \frac{2q\left(2q^2 - 5q + \frac{5}{2}\right)}{2q} = 2q^2 - 5q + \frac{5}{2}$$

इच्छित उत्तर प्राप्त करने के लिए हमने अंश और हर में से सार्व गुणनखंड $2q$ को निरस्त कर दिया।

7.4.3 बहुपद को द्विपद से भाग देना : गुणनखंड विधि

अब हम एक बहुपद को द्विपद से भाग देने के लिए उदाहरण 4 की विधि का विस्तार करेंगे। ध्यान रहे कि हम अब भी शून्य-शेषफल वाली दशा पर विचार कर रहे हैं। यदि संभव हो तो उदाहरण 4 की भाँति ही हम भाग दिए जाने वाले बहुपद का गुणनखंडन इस प्रकार करते हैं कि गुणनखंडों में से एक वह द्विपद हो जिससे भाग दिया जाना है। तब सार्व गुणनखंड को निरस्त करने पर हम इच्छित उत्तर प्राप्त कर लेते हैं।

उदाहरण 5 : $a^2 + 4a - 5$ को $a - 1$ से भाग दीजिए।

हल : अध्याय 6 की सर्वसमिका I का प्रयोग करने पर, $a^2 + 4a - 5 = (a + 5)(a - 1)$ प्राप्त होता है।

अत:, $$\frac{a^2+4a-5}{a-1} = \frac{(a+5)(a-1)}{a-1}$$
$$= a+5$$

इच्छित उत्तर प्राप्त करने के लिए हमने अंश और हर में से सार्व गुणनखंड $(a-1)$ को निरस्त कर दिया।

टिप्पणी : बहुपदों को व्यापक रूप में लिखते समय प्राय: चर के लिए x का और अचरों के लिए a, b आदि का प्रयोग किया जाता है। कभी-कभी, जहाँ भ्रम की संभावना न हो, चर के लिए a का भी प्रयोग किया जा सकता है।

7.4.4 बहुपद को द्विपद से भाग देना : दीर्घ-विभाजन विधि

आप समझ चुके होंगे कि यह सदा तो संभव नहीं होगा कि जिस बहुपद को भाग दिया जाना है उसे आप गुणनखंडित कर ही लें। अब एक ऐसी विधि बताई जाएगी जिसके द्वारा आप किसी भी बहुपद को एक दिए गए द्विपद से भाग दे पाएँगे। इस विधि को *दीर्घ-विभाजन विधि* कहते हैं। इस विधि को हम उदाहरणों की सहायता से समझाएँगे।

याद कीजिए कि पूर्णांकों की बात करते समय जिस पूर्णांक को भाग दिया जाता है उसे भाज्य (dividend) और जिस पूर्णांक से भाग दिया जाता है उसे भाजक (divisor) कहते हैं। बहुपदों के लिए भी हम इन्हीं पदों का प्रयोग करेंगे। पदों, भागफल और शेष का अर्थ भी उसी प्रकार लिया जाएगा।

उदाहरण 6 : $12-14x^2-13x$ को $3+2x$ से भाग दीजिए।

हल **:** भाग की प्रक्रिया निम्नलिखित चरणों में की जाएगी :

चरण 1 : भाज्य $(12-14x^2-13x)$ और भाजक $(3+2x)$ को मानक रूप में लिखिए। ऐसा करने पर प्राप्त होता है : भाज्य : $-14x^2-13x+12$ और भाजक : $2x+3$

चरण 2 : भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग देते हैं। अर्थात् $-14x^2$ को $2x$ से भाग देकर $-7x$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, भागफल का प्रथम पद प्राप्त होता है : $-7x$

$$\frac{-14x^2}{2x} = -7x$$

$$2x\overline{)-14x^2}\ \ (-7x$$
$$\mp 14x^2$$
$$0$$

भागफल $= -7x$

चरण 3 : भाजक को भागफल के प्रथम पद से गुणा कर गुणनफल को भाज्य में से घटाते हैं। अर्थात् $2x + 3$ को $-7x$ से गुणा कर, हम गुणनफल $-14x^2 - 21x$ को भाज्य $-14x^2 - 13x + 12$ में से घटाते हैं। ऐसा करने पर, शेष $8x + 12$ प्राप्त होता है।

$$(2x+3)\times(-7x) = -14x^2 - 21x \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} -14x^2 - 13x + 12 \\ \underset{+}{-}14x^2 \underset{+}{-} 21x \\ \hline 8x + 12 \end{array}$$

चरण 4 : ऊपर प्राप्त शेषफल $8x + 12$ को नया भाज्य मानेंगे। भाजक वही रहेगा। अब चरण 2 को दोहराकर, हम भागफल का अगला पद प्राप्त करते हैं। अर्थात् भाज्य के पहले पद ($8x$) को भाजक के पहले पद ($2x$) से भाग देकर, हम 4 प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, 4 भागफल का दूसरा पद हुआ।

$$\frac{8x}{2x} = 4 \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \text{भागफल} \\ -7x + 4 \end{array}$$

चरण 5 : भाजक को भागफल के अभी-अभी प्राप्त पद से गुणा कर गुणनफल को भाज्य में से घटाते हैं। अर्थात् $2x + 3$ को 4 से गुणा कर गुणनफल $8x + 12$ को भाज्य $8x + 12$ में से घटाते हैं। ऐसा करने पर, शेष 0 प्राप्त होता है।

$$(2x+3)\times 4 = 8x + 12 \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} 8x + 12 \\ \underset{-}{8x} \underset{-}{+} 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

चरण 6 : इस प्रकार, पूरा भागफल $-7x + 4$ और शेष शून्य है। अतः, हम कहते हैं कि

$$(-14x^2 - 13x + 12) \div (2x + 3) = -7x + 4$$

ऊपर की प्रक्रिया इस प्रकार दिखाई जाती है :

$$\begin{array}{r|l} & -7x + 4 \\ \hline 2x+3 & -14x^2 - 13x + 12 \\ & \underset{+}{-}14x^2 \underset{+}{-} 21x \\ \hline & 8x + 12 \\ & \underset{-}{8x} \underset{-}{+}12 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ध्यान दीजिए कि $-14x^2 - 13x + 12 = (2x + 3)(-7x + 4)$ (1)

अर्थात् भाज्य = भाजक × भागफल

इस प्रकार, संबंध (1) से ज्ञात होता है कि $(2x + 3)$ और $(-7x + 4)$, दोनों ही $-14x^2 - 13x + 12$ के गुणनखंड हैं। दूसरे शब्दों में, इस उदाहरण में *भाजक और भागफल,*

दोनों ही भाज्य के गुणनखंड हैं। आइए, एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 7 : $2 + 7x + 7x^2 + 2x^3$ को $1 + 2x$ से भाग दीजिए।

हल : भाग की प्रक्रिया को हम निम्नलिखित चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम भाज्य $(2 + 7x + 7x^2 + 2x^3)$ और भाजक $(1 + 2x)$ को मानक रूप में लिखते हैं। ऐसा करने पर हमें प्राप्त होता है : भाज्य : $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$, भाजक : $2x + 1$

चरण 2 : भाज्य के पहले पद को हम भाजक के पहले पद से भाग देते हैं। अर्थात् $2x^3$ को $2x$ से भाग देकर, हम x^2 प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, हमें भागफल का प्रथम पद प्राप्त होता है : x^2

$$\frac{2x^3}{2x} = x^2 \quad \Big| \quad \text{भागफल } x^2$$

चरण 3 : हम भाजक को भागफल के प्रथम पद से गुणा कर गुणनफल को भाज्य में से घटाते हैं। अर्थात् $2x + 1$ को x^2 से गुणा कर गुणनफल $2x^3 + x^2$ को भाज्य $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ में से घटाते हैं। ऐसा करने पर, हमें शेष $6x^2 + 7x + 2$ प्राप्त होता है।

$$(2x+1) \times x^2 = 2x^3 + x^2 \quad \Big| \quad \begin{array}{r} 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 \\ \underline{-2x^3 \pm x^2 } \\ 6x^2 + 7x + 2 \end{array}$$

चरण 4 : हम ऊपर प्राप्त शेषफल $6x^2 + 7x + 2$ को नया भाज्य मानते हैं। भाजक वही रहता है। चरण 2 को दोहराकर, हम भागफल का अगला पद प्राप्त करते हैं। अर्थात् भाज्य के पहले पद $(6x^2)$ को भाजक के पहले पद $(2x)$ से भाग देकर, हम $3x$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, $3x$ भागफल का दूसरा पद हुआ।

$$\frac{6x^2}{2x} = 3x \quad \Big| \quad \text{भागफल } x^2 + 3x$$

चरण 5 : भाजक को भागफल के अभी-अभी प्राप्त पद से गुणा कर गुणनफल को हम भाज्य में से घटाते हैं। अर्थात् $2x + 1$ को $3x$ से गुणा कर गुणनफल $6x^2 + 3x$ को भाज्य $6x^2 + 7x + 2$ में से घटाते हैं। ऐसा करने पर, हमें शेष $4x + 2$ प्राप्त होता है।

$$(2x+1) \times 3x = 6x^2 + 3x \quad \Big| \quad \begin{array}{r} 6x^2 + 7x + 2 \\ \underline{-6x^2 \pm 3x } \\ 4x + 2 \end{array}$$

चरण 6 : ऊपर प्राप्त शेष $4x + 2$ को हम नया भाज्य मानते हैं। भाजक वही रहता है। चरण 2 को दोहराकर, हम भागफल का अगला पद प्राप्त करते हैं। अर्थात् भाज्य के पहले पद $(4x)$ को भाजक के पहले पद $(2x)$ से भाग देकर, हम भागफल का अगला पद 2 प्राप्त करते हैं।

$$\frac{4x}{2x} = 2 \quad \Big| \quad \text{भागफल } x^2 + 3x + 2$$

चरण 7 : भाजक को भागफल के अभी-अभी प्राप्त पद से गुणा कर, हम गुणनफल को भाज्य में से घटाते हैं। अर्थात् $2x + 1$ को 2 से गुणा कर गुणनफल $4x + 2$ को भाज्य $4x + 2$ में से घटाते हैं। ऐसा करने पर, हमें शेष 0 प्राप्त होता है।

$$(2x+1)\times 2 = 4x+2 \quad \begin{array}{r} 4x+2 \\ \underline{\overset{-}{}4x\overset{-}{+}2} \\ 0 \end{array}$$

चरण 8 : इस प्रकार, पूरा भागफल $x^2 + 3x + 2$ है और शेष शून्य है। अत:, यह कहा जा सकता है कि $(2x^3 + 7x^2 + 7x + 2) \div (2x + 1) = x^2 + 3x + 2$

ऊपर की प्रक्रिया इस प्रकार दिखाई जाती है :

$$\begin{array}{r|l} & x^2+3x+2 \\ \hline 2x+1 & 2x^3+7x^2+7x+2 \\ & \underline{2x^3+x^2} \\ & \quad 6x^2+7x+2 \\ & \quad \underline{6x^2+3x} \\ & \qquad 4x+2 \\ & \qquad \underline{4x+2} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

ध्यान दें : $(2x^3 + 7x^2 + 7x + 2) = (2x + 1)(x^2 + 3x + 2)$ (1)

अर्थात् भाज्य = भाजक × भागफल

इस प्रकार, संबंध (1) से स्पष्ट हो रहा है कि $(2x + 1)$ और $(x^2 + 3x + 2)$, दोनों ही $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ के गुणनखंड हैं। दूसरे शब्दों में, *भाजक और भागफल दोनों, इस उदाहरण में भी भाज्य के गुणनखंड हैं।*

ऊपर के दो उदाहरण इस बात को इंगित करते हैं कि पूर्णांकों के लिए सत्य निम्नलिखित परिणाम बहुपदों के लिए भी सत्य है :

किसी पूर्णांक m को पूर्णांक n से भाग देने पर यदि शेष 0 और भागफल q मिले, तो $m = nq$ होगा। इस प्रकार, n पूर्णांक m का गुणनखंड होगा।

दूसरो शब्दों में, *यदि शेष 0 हो, तो भाज्य = भाजक × भागफल होता है।* अत:, बहुपदों के लिए भी निम्न सत्य है :

किसी बहुपद $f(x)$ को बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर यदि शेष 0 और भागफल $q(x)$ मिले, तो $f(x) = g(x)\, q(x)$ होगा। इस प्रकार, $g(x)$ बहुपद $f(x)$ का गुणनखंड होगा।

दूसरे शब्दों में, बहुपदों के लिए भी निम्न सत्य है :

यदि शेष 0 हो, तो भाज्य = भाजक × भागफल

टिप्पणियाँ : 1. भाज्य, भाजक और भागफल में ऊपर दिया गया संबंध इस बात का निर्णय करने में अत्यंत उपयोगी सिद्ध होता है कि एक दिया गया बहुपद किसी बहुपद का गुणनखंड है या नहीं।

2. शेष के शून्य होने पर केवल भाजक ही नहीं अपितु भागफल भी भाज्य का गुणनखंड होता है।

3. ऊपर दिए हल के चरणों को इतने विस्तार से लिखने की आवश्यकता नहीं है। इनको इसलिए लिखा गया कि आप प्रक्रिया को समझ लें। अगले उदाहरण में दिखाए गए अनुसार भाग किया जाता है।

उदाहरण 8 : ज्ञात कीजिए कि $6x + 5$, बहुपद $6x^2 - 7x - 10$ का गुणनखंड है या नहीं।

हल : आइए, $6x^2 - 7x - 10$ को $6x + 5$ से भाग दें।

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline 6x+5 & 6x^2 - 7x - 10 \\ & \underline{\overset{-}{}6x^2 \overset{-}{+} 5x} \\ & -12x - 10 \\ & -12x - 10 \\ & \underline{+ \quad\quad +} \\ & 0 \end{array}$$

क्योंकि शेष शून्य है, अतः $6x + 5$, $6x^2 - 7x - 10$ का एक गुणनखंड है।

प्रश्नावली 7.1

1. निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-कौन से व्यंजक बहुपद नहीं हैं?

(i) $3z^3 - \sqrt{5}z + 9$ (ii) $3\sqrt{z} + 4z + 5z^2$

(iii) $\sqrt{a}x + x^2 - x^3$ (iv) $\sqrt{a}\, x^{\frac{1}{2}} + ax + 9x^2 + 5$

(v) $2x^{-2} + 3x^{-1} + 4 + 5x$ (vi) $x^2 + x^{-2}$

निम्नलिखित प्रत्येक बहुपद को उसके मानक रूप में लिखिए। साथ ही, प्रत्येक की घात भी लिखिए :

2. $y^2 + 6y + 9 + 4y^4$

3. $4q^2 - 13q^5 + 12q$

4. $\left(z+\frac{3}{4}\right)\left(z+\frac{4}{3}\right)$

5. $(x^2 + 4)(x^2 + 9)$

6. $y^2 + 12 - 5y^8$

7. $q^2 + 4q^8 - q^6$

8. $p^2 + 16 + p^7$

9. $y^2 + y^3 - \frac{5}{7}y^{11}$

10. $(z^3 - 14)(z^3 - 1)$

11. $(z^3 - 1)(z^3 - 8)$

12. $(y^3 - 2)(y^3 + 11)$

13. $\left(x^3-\frac{3}{8}\right)\left(x^3+\frac{16}{17}\right)$

भाग दीजिए :

14. $2x^2$ को $2x$ से

15. $-3x^3$ को x^2 से

16. $\frac{2}{3}x^2$ को x से

17. $\sqrt{5}x^4$ को $5x^3$ से

18. $\sqrt{3}\,a^3$ को $2a$ से

19. $4a^4$ को $-2\sqrt{2}a^2$ से

20. $x + 2x^2 + 3x^3$ को $2x$ से

21. $y^4 - 3y^3 + \frac{1}{2}y^2$ को $3y$ से

22. $-4p^3 + 4p^2 + p + 4$ को $2p$ से

23. $-x^4 + x^2$ को $\sqrt{2}\,x^2$ से

24. $5z^3 - 6z^2 + 7z$ को $2z$ से

25. $\sqrt{3}\,q^4 + 2\sqrt{3}\,q^3$ को $3q^2$ से

26. दीर्घ-विभाजन विधि द्वारा भाग दीजिए। गुणनखंडन विधि से उत्तर का सत्यापन कीजिए :

(i) $x^2 + 6x + 8$ को $x + 4$ से

(ii) $x^2 + 7x + 10$ को $x + 5$ से

(iii) $y^2 - y - 12$ को $y - 4$ से

(iv) $y^2 - 5y + 6$ को $y - 2$ से

(v) $z^2 - 8z + 15$ को $z - 5$ से

(vi) $x^4 + 3x^2 + 2$ को $x^2 + 2$ से

[*संकेत :* $x^2 = y$ लिखिए।]

27. संबद्ध शेष को शून्य दिखाकर सत्यापित कीजिए कि दिया गया द्विपद दिए गए बहुपद का एक गुणनखंड है :

(i) $2x + 3, 2x^2 + 5x + 3$

(ii) $2x + 1, 6x^2 + x - 1$

(iii) $2y - 1, 8y^2 - 2y - 1$

(iv) $5a + 3, 10a^2 - 9a - 9$

(v) $3b - 1, -3b^2 + 13b - 4$

(vi) $p^2 + 3, 4p^4 + 7p^2 - 15$

7.5 बहुपद को बहुपद से भाग देना : शून्येतर शेष

अभी तक हम उस स्थिति की बात कर रहे थे जहाँ किसी बहुपद को एक एकपदी अथवा द्विपद से भाग देने पर कुछ शेष नहीं बचता था (अर्थात् शून्य शेष रहता था)। संख्याओं की भाँति यहाँ भी यह कहा जाता है कि संबद्ध एकपदी अथवा द्विपद बहुपद को पूरी तरह या ठीक-ठीक विभाजित करता है। अब उस स्थिति पर विचार किया जाएगा जहाँ शेष शून्य नहीं होता।

याद कीजिए कि संख्याओं में भाग की प्रक्रिया तब तक किए चले जाते हैं जब तक कि शेष, भाजक से छोटा नहीं हो जाता। बहुपदों में एक बहुपद के दूसरे से छोटा होने की बात नहीं की जाती। इसके स्थान पर हम भाजक और शेष की घातों की तुलना करते हैं। बहुपदों की घातों के पूर्णांक होने के कारण इनकी तुलना की जा सकती है। बहुपदों के लिए भाग की प्रक्रिया तब तक किए चले जाते हैं जब तक कि ऐसा शेष न प्राप्त हो जाए जिसकी घात भाजक की घात से छोटी हो। इस प्रक्रिया को हम एक उदाहरण द्वारा समझाएँगे।

उदाहरण 9 : बहुपद $5x\,(x^2 - x + 1) - (9 + 4x^4)$ को $4x - 1$ से भाग दीजिए।

उदाहरण : दिया गया बहुपद मानक रूप में नहीं है। आइए, पहले इसे मानक रूप में लिखें।

$$5x\,(x^2 - x + 1) - (9 + 4x^4) = 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9 - 4x^4$$
$$= -4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9$$

अब हम पिछले अनुच्छेद में समझाई गई विधि से भाग की प्रक्रिया करते हैं।

$$\begin{array}{r|l}
 & -x^3 + x^2 - x + 1 \\
\hline
4x-1 & -4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9 \\
 & \underset{+}{-}4x^4 \underset{-}{+} x^3 \\
\hline
 & 4x^3 - 5x^2 + 5x - 9 \\
 & \underset{-}{4x^3} \underset{+}{-} x^2 \\
\hline
 & -4x^2 + 5x - 9 \\
 & \underset{+}{-}4x^2 \underset{-}{+} x \\
\hline
 & 4x - 9 \\
 & \underset{-}{4x} \underset{+}{-} 1 \\
\hline
 & -8
\end{array}$$

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी नहीं; भाग की प्रक्रिया करते रहिए।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी नहीं; भाग की प्रक्रिया करते रहिए।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी नहीं; भाग की प्रक्रिया करते रहिए।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी है; भाग की प्रक्रिया समाप्त कीजिए।)

इस प्रकार, भागफल $-x^3 + x^2 - x + 1$ है और शेष -8 है।
ध्यान दीजिए कि ऊपर के उदाहरण में,

$$-4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9 = (4x - 1) \times (-x^3 + x^2 - x + 1) + (-8)$$

दूसरे शब्दों में, *भाज्य = भाजक × भागफल + शेष*

उदाहरण 10 : बहुपद $3y^4 - y^3 + 12y^2 + 2$ को $3y^2 - 1$ से भाग दीजिए।

हल : हम भाग की प्रक्रिया पिछले अनुच्छेद में समझाई गई विधि से करेंगे।

$$\begin{array}{r|l} & y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{13}{3} \\ \hline 3y^2 - 1 & 3y^4 - y^3 + 12y^2 \qquad + 2 \\ & \underline{\overset{-}{3y^4} \qquad \overset{-}{+}\ y^2} \\ & -y^3 + 13y^2 \qquad + 2 \\ & \underline{\overset{+}{-y^3} \qquad + \overset{-}{\frac{1}{3}y}} \\ & 13y^2 - \frac{1}{3}y + 2 \\ & \underline{\overset{-}{13y^2} \qquad \overset{+}{-\frac{13}{3}}} \\ & -\frac{1}{3}y + \frac{19}{3} \end{array}$$

(y में अनुपस्थित पद के लिए खाली (रिक्त) स्थान छोड़कर। समान पदों को एक-दूसरे के नीचे लिखना महत्त्वपूर्ण है, भले ही कुछ स्थान खाली क्यों न छोड़ने पड़ें।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी नहीं; भाग की प्रक्रिया करते रहिए।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी नहीं; भाग की प्रक्रिया करते रहिए।)

(शेष की घात भाजक की घात से छोटी है; भाग की प्रक्रिया समाप्त कीजिए।)

इस प्रकार, $3y^4 - y^3 + 12y^2 + 2$ को $3y^2 - 1$ से भाग देने पर भागफल $y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{13}{3}$ और शेष $-\frac{1}{3}y + \frac{19}{3}$ प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए कि

$$3y^4 - y^3 + 12y^2 + 2 = (3y^2 - 1) \times \left(y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{13}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}y + \frac{19}{3}\right)$$

दूसरे शब्दों में, इस उदाहरण में भी,

भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

वास्तव में, यह संबंध सदैव सत्य होता है। कारण यह है कि यदि हम (भाज्य - शेष) को भाजक से भाग दें, तो शेष शून्य होगा। अतः, पिछले अनुच्छेद की भाँति

भाज्य - शेष = भाजक × भागफल

भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

टिप्पणी : ऊपर के संबंध से हमें यह निर्णय करने में सहायता मिलती है कि दो दिए गए बहुपदों में कोई सा एक दूसरे का गुणनखंड है या नहीं। क्योंकि शेष के शून्य न होने पर भाजक और भागफल में से कोई भी भाज्य का गुणनखंड नहीं होता है।

आइए, बहुपदों की दीर्घ-विभाजन विधि से संबद्ध महत्त्वपूर्ण तथ्यों को अभिलेखित कर लें:

1. भाग की प्रक्रिया आरंभ करने से पहले भाज्य और भाजक को मानक रूप में लिखना आवश्यक है। अर्थात् भाज्य और भाजक दोनों के पदों को चर के घातांकों के अवरोही क्रम में लिख लेना चाहिए।
2. भाग करते समय समान पदों को एक-दूसरे के ऊपर-नीचे लिखिए। ऐसा करने पर प्रत्येक चरण में आपको अनुपस्थित पदों के लिए रिक्त स्थान छोड़ने होंगे।
3. तब तक भाग देते रहिए जब तक कि प्राप्त शेष की घात भाजक की घात से छोटी न हो जाए।
4. जब प्राप्त शेष की घात भाजक की घात से छोटी हो जाए, तब भाग देना बंद कर दीजिए। ये ही अभीष्ट शेष है।
5. यदि शेष शून्य है, तो भाजक भाज्य का गुणनखंड है। अत: यह जानने के लिए कि कोई दिया गया बहुपद $f(x)$ किसी बहुपद $g(x)$ का गुणनखंड है या नहीं, हम $g(x)$ को $f(x)$ से भाग देकर शेष की जाँच करते हैं। यदि शेष शून्य है, तो भाजक, भाज्य का गुणनखंड है, अन्यथा नहीं।

7.5.1 दीर्घ विभाजन का एक तुरंत और लघु रूप

आगे *दीर्घ* विभाजन की एक वैकल्पिक विधि बताई जा रही है, जो बहुत *छोटी* है। माना कि हम $x^3 + 4x^2 - 3x - 7$ को $x - 3$ से भाग देना चाहते हैं। भाज्य बहुपद को सबसे ऊपर की पंक्ति में लिखिए। अब एक पंक्ति रिक्त छोड़िए। एक रेखा खींचिए। रेखा के नीचे, संख्यात्मक गुणांक के लिए रिक्त स्थान छोड़ते हुए भाजक को तीन बार लिखिए, जैसा कि साथ में दिखाया गया है।

$$x^3 \; + \; 4x^2 \; - \; 3x \; - 7$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$(x-3) \quad (x-3) \quad (x-3)$$

सामान्य विधि की भाँति भागफल का पहला पद निकालिए जो यहाँ x^2 है। रेखा के नीचे वाले पहले '$(x-3)$' को x^2 से गुणा कर रिक्त पंक्ति में लिखिए। x^3 वाला पद तो ठीक हो गया। x^2 वाले पद को ठीक पाने के लिए हम बीच की पंक्ति में $7x^2$ लिखते हैं (जिससे कि $-3x^2$ के साथ मिलकर यह भाज्य का x^2 वाला पद $4x^2$ दे दे)। $7x^2$ से हमें भागफल का दूसरा पद $7x$ प्राप्त होता है। नीचे की पंक्ति में दूसरे $(x-3)$ से पहले $+7x$ लिखिए। '$(7x^2$' को पूरा करते हुए गुणनफल $(7x^2-21x)$ को बीच की पंक्ति में लिखिए।

$$\begin{array}{l} x^3 + 4x^2 - 3x - 7 \\ \underline{(x^3 - 3x^2) + (7x^2} \\ \underline{\underline{x}}^2 (x-3) \quad (x-3) \quad (x-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^3 + 4x^2 - 3x - 7 \\ \underline{(x^3 - 3x^2) + (7x^2 - 21x)} \\ \underline{\underline{x}}^2 (x-3) + \underline{\underline{7x}}(x-3) \quad (x-3) \end{array}$$

अब बीच की पंक्ति में $(18x$ लिखकर x वाले पद को ठीक कर लीजिए। इससे भागफल का अगला पद 18 प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{l} x^3 + 4x^2 - 3x - 7 \\ \underline{(x^3 - 3x^2) + (7x^2 - 21x) + (18x} \\ \underline{\underline{x}}^2 (x-3) + \underline{\underline{7x}}(x-3) \quad (x-3) \end{array}$$

नीचे की पंक्ति के अंतिम $(x-3)$ को 18 से गुणा कर गुणनफल को बीच की पंक्ति में लिखिए। अंत में बीच की पंक्ति में 47 लिखकर अचर पद को ठीक कर लीजिए। यह पद 47 शेष है। पूरा परिणाम साथ में दिखाया गया है।

$$\begin{array}{l} x^3 + 4x^2 - 3x - 7 \\ \underline{(x^3 - 3x^2) + (7x^2 - 21x) + (18x - 54) + 47} \\ \underline{\underline{x}}^2 (x-3) + \underline{\underline{7x}}(x-3) + \underline{\underline{18}}\ (x-3) \end{array}$$

इस प्रकार, भागफल $x^2 + 7x + 18$ है (पदों के नीचे दो रेखिकाओं से प्रदर्शित)। साथ ही, शेष 47 है।

प्रश्नावली 7.2

पहले बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग दीजिए। भागफल और शेष लिखिए :

1. $3a^2 + 5a + 7,\ a + 2$

2. $10b^2 + 7b + 8,\ 5b - 3$

3. $6p^3 + 5p^2 + 4,\ 2p + 1$

4. $8q^3 + 6q^2 + 4q - 1,\ 4q + 2$

5. $12x^3 - 8x^2 - 6x + 10,\ 3x - 2$

6. $16x^4 + 12x^3 - 10x^2 + 8x + 20,\ 4x - 3$

7. $5y^3 - 6y^2 + 6y - 1,\ 5y - 1$

8. $z^4 + z^3 + z^2,\ z + 1$

9. $x^4 - x^3 + 5x,\ x - 1$

10. $y^4 + y^2,\ y^2 - 2$

11. ऊपर के सभी प्रश्नों के लिए, परिणाम *भाज्य = भाजक × भागफल + शेष* का सत्यापन कीजिए।

शेष की संभाव्य घातें क्या हो सकती हैं, जब हम भाग दें :

12. $x^4 + x^3$ को $x + 9$ से?

13. $x^2 + x + 1$ को $x - 2$ से?

14. $x^4 + 10x^3 - 9$ को $x^3 + 4$ से?

15. $y^4 + y^2 - y - 3$ को $y^2 + 6$ से?

ज्ञात कीजिए कि पहला बहुपद दूसरे बहुपद का गुणनखंड है या नहीं :

16. $x + 1, 2x^2 + 5x + 4$

17. $3x - 1, 6x^2 + x - 1$

18. $4y + 1, 8y^2 - 2y + 1$

19. $2a - 3, 10a^2 - 9a - 5$

20. $4 - z, 3z^2 - 13z + 4$

21. $4z^2 - 5, 4z^4 + 7z^2 + 15$

22. $y - 2, 3y^3 + 5y^2 + 5y + 2$

याद रखने योग्य बातें

1. ऐसे बीजीय व्यंजकों को जिनके चरों के घातांक केवल ऋणेतर पूर्णांक हो, बहुपद कहा जाता है।
2. जिस बहुपद में केवल एक चर आता हो उसे एक चर वाला (या एक चर में) बहुपद कहते हैं।
3. एक चर वाले बहुपद के विभिन्न पदों के घातांकों में से सबसे बड़े घातांक को बहुपद की घात कहा जाता है।
4. अचर शून्य घात वाला बहुपद होता है।
5. एक चर वाले बहुपद का मानक रूप वह होता है जिसमें बहुपद के पद चर के घातांकों के घटते हुए क्रम में लिखे जाते हैं।
6. दो एकपदियों के भागफल का गुणांक उन एकपदियों के गुणांकों का भागफल होता है।
7. दो एकपदियों के भागफल में चर वाला भाग उन एकपदियों के चर वाले भागों का भागफल होता है।
8. यदि किसी बहुपद (भाज्य) को किसी बहुपद (भाजक) से भाग देने पर शेष शून्य रहे, तो भाजक भाज्य का एक गुणनखंड होता है। ऐसी स्थितियों में भागफल भी भाज्य का एक गुणनखंड होता है। साथ ही,

   भाज्य = भाजक × भागफल

9. व्यापक रूप से,

भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

10. शेष की घात भाजक की घात से सदैव छोटी होती है।

11. दीर्घ-विभाजन की प्रक्रिया करने से पहले भाज्य तथा भाजक दोनों को मानक रूप में लिखना आवश्यक है।

12. दीर्घ-विभाजन करते समय, आवश्यकतानुसार रिक्त स्थान छोड़ते हुए, समान पदों को एक-दूसरे के ऊपर-नीचे लिखा जाता है।

अध्याय

8

एक चर वाले समीकरण

8.1 भूमिका

आप एक चर वाले रैखिक समीकरणों से परिचित हैं। ऐसे समीकरण का रूप $ax + b = c$ के प्रकार का होता है, जहाँ a, b और c संख्याएँ होती हैं, $a \neq 0$ और x चर होता है। चर राशि x का ऐसा मान जो समीकरण को संतुष्ट करे, समीकरण का हल या मूल कहलाता है। याद कीजिए कि निम्नलिखित क्रियाओं से समीकरण के तुल्यता चिह्न (=) में कोई परिवर्तन नहीं होता :

- समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ना।
- समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या घटाना।
- समीकरण के दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से गुणा करना या भाग देना।
- किसी पद का पक्षांतरण करना।

आप जानते हैं कि दैनिक जीवन की कुछ वास्तविक समस्याओं का हल उन्हें रैखिक समीकरणों में परिवर्तित कर और फिर उन समीकरणों को हल कर किया जा सकता है। यह क्रियाकलाप इस अध्याय में आगे बढ़ाया जाएगा।

इस अध्याय में, हम

$$\frac{ax+b}{cx+d} = k, \text{ जहाँ } a, b, c, d \text{ और } k \text{ संख्याएँ हैं और } cx + d \neq 0 \text{ हैं,}$$

जैसे समीकरणों को रैखिक समीकरणों में परिवर्तित कर हल करना सीखेंगे। इसके पश्चात्, हम कुछ शाब्दिक समस्याओं को ऊपर जैसे समीकरणों में परिवर्तित कर हल करेंगे।

8.2 $\frac{ax+b}{cx+d} = k$ के रूप वाले समीकरण

आइए, अनुपात 7:8 वाली दो ऐसी संख्याएँ खोजने का प्रयास करें जिनका योगफल (योग) 45 हो। ऐसी संख्याएँ खोजने के लिए यह मान लेते हैं कि दोनों में से छोटी संख्या x है। क्योंकि दोनों संख्याओं का योगफल 45 है, अतः दूसरी संख्या $45 - x$ हुई। क्योंकि संख्याओं में 7:8 का अनुपात है, अतः आवश्यक होगा कि

$$\frac{x}{45 - x} = \frac{7}{8}$$

यहाँ से,

$\frac{ax + b}{cx + d} = k$ के रूप वाला एक समीकरण प्राप्त होता है, जहाँ $a = 1, b = 0, c = -1,$ $d = 45$ और $k = \frac{7}{8}$ है। इस प्रकार, ऊपर दी गई समस्या को हल करने के लिए, हमें $\frac{ax + b}{cx + d} = k$ जैसे समीकरण को हल करना पड़ेगा। स्पष्टतः, यह समीकरण रैखिक नहीं है। परंतु हम ऐसे समीकरण को रैखिक समीकरण में परिवर्तित कर सकते हैं। उसके बाद हम इसे सरलता से हल कर सकते हैं। आइए, कुछ उदाहरणों द्वारा इसे स्पष्ट करें।

उदाहरण 1 : समीकरण $\frac{3x+8}{2x+7} = 4$ को हल कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि यदि LHS के हर में $2x + 7$ न होता, तो यह समीकरण एक रैखिक समीकरण होता। इसलिए हम इस व्यंजक से मुक्त होने का प्रयास करेंगे। याद कीजिए कि अक्षर संख्याएँ किन्हीं संख्याओं को ही निरूपित करती हैं। इस प्रकार, x, अतः $2x + 7, 3x + 8$ तथा $\frac{3x+8}{2x+7}$ भी संख्याओं को ही निरूपित करते हैं। अतएव हम दिए गए समीकरण $\frac{3x+8}{2x+7} = 4$ के दोनों पक्षों को, तुल्यता चिह्न को प्रभावित किए बिना, $2x + 7$ से गुणा कर सकते हैं। ऐसा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{3x+8}{2x+7} \times (2x+7) = 4(2x + 7)$$

या $\quad 3x + 8 = 8x + 28$

या $\quad 3x - 8x = 28 - 8$ ($8x$ का LHS और 8 का RSH में पक्षांतरण करने पर)

या $\quad -5x = 20$

या $\quad x = -4$

जाँच : जब $x = -4$, तब

$$\text{LHS} = \frac{3(-4)+8}{2(-4)+7} = \frac{-4}{-1} = 4 = \text{RHS}$$

अत:, हल सही है।

उदाहरण 2 : समीकरण $\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$ को हल कीजिए।

हल : आइए, पिछले उदाहरण की भाँति समीकरण के दोनों पक्षों को $2x + 3$ से गुणा करें। ऐसा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{5x+2}{2x+3} \times (2x+3) = \frac{12}{7} \times (2x+3)$$

या $$5x + 2 = \frac{12}{7}(2x+3) \quad (1)$$

या $$5x + 2 = \frac{24}{7}x + \frac{36}{7}$$

या $$5x - \frac{24}{7}x = \frac{36}{7} - 2$$ [$\frac{24}{7}x$ और 2 के पक्षांतरण से]

या $$\frac{11}{7}x = \frac{22}{7}$$

या $$x = \frac{22}{7} \times \frac{7}{11}$$ [दोनों पक्षों को $\frac{7}{11}$ से गुणा करने पर]

या $$x = 2$$

जाँच : $x = 2$ पर,

$$\text{LHS} = \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{5 \times 2 + 2}{2 \times 2 + 3} = \frac{12}{7} = \text{RHS}$$

अत:, हल सही है।

टिप्पणी : जिस प्रकार हमने LHS के हर $2x + 3$ को हटाया है, उसी प्रकार हम RHS के हर 7 को भी हटा सकते थे। यदि हम ऐसा करते, तो हमें भिन्नों का प्रयोग नहीं करना पड़ता। आइए, ऊपर वाले हल में सुधार करें। समीकरण (1) के दोनों पक्षों को 7 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(5x+2) \times 7 = \frac{12(2x+3)}{7} \times 7$$

या $$7(5x+2) = 12(2x+3) \quad (2)$$

या $$35x + 14 = 24x + 36$$

या $$11x = 22$$

या $x = 2$, पहले की भाँति

हल में और अधिक सुधार किया जा सकता था। $2x + 3$ और 7 से दो अलग-अलग बार गुणा करने के स्थान पर, हम समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही बार में $7(2x + 3)$ से गुणा कर सकते थे। ऐसा करने पर, हमें प्राप्त होता :

$$\frac{5x+2}{2x+3} \times 7(2x+3) = \frac{12}{7} \times 7(2x+3)$$

या $$7(5x+2) = 12(2x+3) \quad (3)$$

जो समीकरण (2) ही है। इस प्रकार, समीकरण का हल कुछ सरल हो जाता है।

अब दिए गए समीकरण तथा समीकरण (3) को ध्यान से देखिए।

दिया गया समीकरण	*दिए गए समीकरण का सरलीकृत रूप*
$\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$	$7 \times (5x+2) = 12 \times (2x+3)$

आपने क्या देखा? हमने जो किया वह यह है :

(i) LHS के अंश को RHS के हर से गुणा किया।	$\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$
(ii) RHS के अंश को LHS के हर से गुणा किया।	$\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$
(iii) (i) और (ii) में प्राप्त व्यंजकों को तुल्य किया।	$7 \times (5x+2) = 12 \times (2x+3)$

स्पष्ट कारणों से, इस विधि को *वज्र गुणन* (*cross multiplication*) या *तिर्यक गुणन* की विधि कहा जाता है।

अब वज्र गुणन की विधि उदाहरणों द्वारा समझाई जाएगी।

उदाहरण 3 : समीकरण $\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$ को हल कीजिए।

हल : वज्र गुणन द्वारा हमें प्राप्त होता है :

$$7 \times (x+7) = 4 \times (3x+16)$$

या $7x + 49 = 12x + 64$

या $7x - 12x = 64 - 49$

या $-5x = 15$

या $x = -3$

$$\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$$

जाँच : $x = -3$ पर,

$$\text{LHS} = \frac{x+7}{3x+16} = \frac{-3+7}{3\times(-3)+16} = \frac{4}{7} = \text{RHS}$$

अतः, हल सही है।

उदाहरण 4 : समीकरण $\frac{4x+1}{8x-4} = 2$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{4x+1}{8x-4} = 2$

या $\frac{4x+1}{8x-4} = \frac{2}{1}$ (पूर्णांक 2 को परिमेय संख्या $\frac{2}{1}$ मान कर)

या $1 \times (4x+1) = 2 \times (8x-4)$ (वज्र गुणन द्वारा)

या $4x + 1 = 16x - 8$

या $1 + 8 = 16x - 4x$ (-8 का LHS और $4x$ का RHS में पक्षांतरण करने पर)

या $9 = 12x$

या $x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

जाँच : $x = \frac{3}{4}$ पर,

$$\text{LHS} = \frac{4x+1}{8x-4} = \frac{4\times\frac{3}{4}+1}{8\times\frac{3}{4}-4} = \frac{3+1}{6-4} = \frac{4}{2} = 2 = \text{RHS}$$

अतः, हल सही है।

उदाहरण 5 : x का ऐसा धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जो समीकरण $\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{5}{4}$ को संतुष्ट करे।

हल : आइए, $x^2 = y$ मान लें। तब दिया गया समीकरण हो जाता है :

$$\frac{y+1}{y-1} = \frac{5}{4}$$

वज्र गुणन द्वारा,

$$4(y+1) = 5(y-1)$$

या $\quad 4y + 4 = 5y - 5$

या $\quad 5 + 4 = 5y - 4y$ (दोनों पक्षों में समान पदों को एकत्र करने पर)

$\therefore \quad y = 9$

क्योंकि $y = x^2$ है, अतः, $x^2 = 9 = 3^2 = (-3)^2$

धनात्मक मान लेने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$x = 3$$

आइए, जाँच करें कि क्या $x = 3$ दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है! जाँच करने पर, हम पाते हैं कि $x = 3$ दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है। अतः, x का इच्छित मान 3 है।

प्रश्नावली 8.1

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए और अपने उत्तर की जाँच कीजिए :

1. $\frac{5x-7}{3x} = 2$

2. $\frac{4x+18}{5x} = 2$

3. $\frac{4x}{2x+7} = 3$

4. $\frac{9x}{7-6x} = 15$

5. $\frac{2-z}{z+16} = \frac{3}{5}$

6. $\frac{2y+3}{y-9} = \frac{2}{7}$

7. $\frac{2y-9}{3y+4} = -1$

8. $\frac{5z-11}{3z+7} = -2$

9. $\frac{2y-4}{3y+2} = -\frac{2}{3}$

   [संकेत: $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$]

10. $\frac{5-7y}{2+4y} = -\frac{8}{7}$

11. $\frac{2k-5}{5k+2} = \frac{3}{22}$

12. $\frac{8p-5}{7p+1} = -\frac{5}{4}$

13. $\dfrac{\frac{2}{3}x+1}{x+\frac{1}{4}}=\dfrac{5}{3}$

14. $\dfrac{2x-\frac{3}{4}}{9x+\frac{4}{7}}=\dfrac{1}{4}$

15. $\dfrac{\frac{3}{4}y+7}{\frac{2}{5}y-4}=\dfrac{5}{4}$

16. $\dfrac{\frac{z}{4}-\frac{3}{5}}{\frac{4}{3}-7z}=-\dfrac{3}{20}$

17. $\dfrac{(2x+3)-(5x-7)}{6x+11}=-\dfrac{8}{3}$

18. $\dfrac{(y+1)-(2y+4)}{3-5y}=\dfrac{1}{23}$

19. $\dfrac{x^2-(x+1)(x+2)}{5x+1}=6$

20. $\dfrac{(x+2)(2x-3)-2x^2+6}{x-5}=2$

चर x या y का ऐसा धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जो दिए गए समीकरण को संतुष्ट करे :

21. $\dfrac{x^2-9}{5+x^2}=\dfrac{-5}{9}$

22. $\dfrac{y^2+4}{3y^2+7}=\dfrac{1}{2}$

8.3 व्यावहारिक समस्याएँ हल करने में रैखिक समीकरणों का अनुप्रयोग

याद कीजिए कि बहुत सी व्यावहारिक समस्याओं में कुछ ज्ञात और कुछ अज्ञात राशियों या संख्याओं में कुछ संबंध होते हैं। पिछली कक्षा में, आपने सीखा कि कुछ स्थितियों में इन समस्याओं को रैखिक समीकरणों में कैसे रूपांतरित किया जाता है। इन समीकरणों के हल से संगत व्यावहारिक समस्याओं के हल प्राप्त हो जाते हैं। इन शाब्दिक समस्याओं के हल में महत्त्वपूर्ण चरण नीचे सूचीबद्ध किए जा रहे हैं :

1. समस्या को ध्यान से पढ़कर लिख लीजिए कि (i) क्या दिया गया है और (ii) क्या ज्ञात करना है।
2. अज्ञात राशि को किसी अक्षर संख्या x, y, z, u, v, w आदि से निर्दिष्ट कीजिए।
3. जहाँ तक संभव हो, समस्या के कथनों को एक-एक करके गणितीय कथनों में रूपांतरित कीजिए।
4. वे राशियाँ खोजिए जो बराबर हों। इन तुल्यता संबंधों के संगत समीकरण लिखिए।
5. ऊपर चरण 4 में लिखे गए समीकरणों को हल कीजिए।
6. चरण 5 में प्राप्त अज्ञात राशियों के मान समस्या के कथनों में प्रतिस्थापित कर हल की जाँच कीजिए।

आइए, अब उपरोक्त प्रक्रिया को उदाहरणों से समझाएँ।

उदाहरण 6 : 7 के तीन क्रमागत गुणजों का योगफल 777 है। ये गुणज ज्ञात कीजिए।

हल : जो राशि ज्ञात की जानी है उसके लिए हम एक चर का प्रयोग करेंगे। यहाँ हमें तीन संख्याएँ ज्ञात करनी हैं। लेकिन यदि इनमें से एक संख्या, माना कि पहली ज्ञात हो, तो अन्य दो, इस संख्या में 7 और 14 जोड़कर ज्ञात की जा सकती हैं। (यह दिया हुआ है कि संख्याएँ 7 की क्रमागत गुणज हैं।)

माना कि पहली संख्या x है। तब अन्य दो संख्याएँ $x + 7$ और $x + 14$ हुईं।

दिया हुआ है कि इन तीन क्रमागत गुणजों का योगफल 777 है। अतः,

$$x + (x + 7) + (x + 14) = 777$$

या $3x + 21 = 777$

या $3x = 777 - 21$ [21 को पक्षांतरित करने पर]

या $3x = 756$

या $x = 252$

अतः, 7 के तीन क्रमागत गुणज हुए :

252, 259 और 266

ध्यान दीजिए कि $252 = 36 \times 7$, $259 = 37 \times 7$ और $266 = 38 \times 7$

जाँच : प्राप्त तीनों गुणजों का योगफल $= 252 + 259 + 266 = 777$

अतः, हल सही है।

टिप्पणी : कभी-कभी यह अधिक सुविधाजनक होता है कि अज्ञात राशि को x न लेकर x का कोई गुणज ले लिया जाए। उदाहरणतः, ऊपर पहली संख्या को $7x$ (7 का x वाँ गुणज) मानना अधिक सुविधाजनक रहता। उस स्थिति में अगली दो संख्याएँ $7(x + 1)$ और $7(x + 2)$ होतीं। परिणामस्वरूप, समीकरण बनता :

$$7x + 7(x + 1) + 7(x + 2) = 777$$

या $x + (x + 1) + (x + 2) = 111$ [दोनों पक्षों को 7 से भाग देने पर]

या $3x + 3 = 111$

या $x = 36$

अतः, तीनों क्रमागत गुणज हुए :

$36 \times 7, 37 \times 7$ और 38×7

अर्थात् 252, 259 और 266

उदाहरण 7 : एक फल-विक्रेता कुछ संतरे 5 रु प्रति संतरे की दर से खरीदता है। उतने ही केले वह 2 रु प्रति केले की दर से खरीदता है। वह संतरों पर 20 % और केलों पर 15 % लाभ पाता है। दिन समाप्त होने तक वह सभी फल बेच देता है। उसका कुल लाभ 390 रु है। खरीदे गए संतरों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : I. प्रश्न पढ़कर हमें ज्ञात होता है कि निम्नलिखित तथ्य दिए हुए हैं :

(1) एक संतरे का मूल्य 5 रु है।

(2) एक केले का मूल्य 2 रु है।

(3) केलों की संख्या = संतरों की संख्या।

(4) संतरों पर लाभ 20 % है।

(5) केलों पर लाभ 15 % है।

(6) समस्त फल बिक जाते हैं।

(7) कुल लाभ = 390 रु।

हमें खरीदे गए संतरों की संख्या *ज्ञात* करनी है।

II. क्योंकि हमें संतरों की संख्या ज्ञात करनी है, अतः हम मान लेते हैं कि खरीदे गए संतरों की संख्या x है।

III. अब हम एक-एक करके प्रश्न में दिए गए और चरण I में लिख लिए गए कथनों को गणितीय कथनों में रूपांतरित करने का प्रयास करेंगे। (3) और चरण II के अनुसार,

संतरों की संख्या = केलों की संख्या = x

संतरों का मूल्य = $5 \times x$ रु = $5x$ रु (A)

केलों का मूल्य = $2 \times x$ रु = $2x$ रु (B)

(4) से,

संतरों पर लाभ = $(5x \times \frac{20}{100})$ रु [(A) का प्रयोग करने पर]

= x रु (C)

(5) से,

$$\text{केलों पर लाभ} = \left(2x \times \frac{15}{100}\right) \text{ रु} \qquad \text{[(B) का प्रयोग करने पर]}$$

$$= \left(\frac{3}{10}x\right) \text{ रु} \qquad \text{(D)}$$

(7) से,

390 रु = कुल लाभ = संतरों पर लाभ + केलों पर लाभ

$$= x \text{ रु} + \left(\frac{3}{10}x\right) \text{ रु} \qquad \text{[(C) और (D) का प्रयोग करने पर]}$$

$$= \left(x + \frac{3}{10}x\right) \text{ रु}$$

$$= \left(\frac{13}{10}x\right) \text{ रु}$$

यहाँ से, $390 = \frac{13}{10}x$ (E)

इस रैखिक समीकरण को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{10}{13} \times 390 = \frac{10}{13} \times \frac{13}{10}x$$

या $300 = x$

अतः, खरीदे गए संतरों की संख्या 300 है।

IV. अब हल की जाँच की जाएगी। जाँच इस तथ्य से आरंभ कर सकते हैं कि $x = 300$ समीकरण (E) को संतुष्ट करता है। किंतु इससे यही ज्ञात हो पाएगा कि हमने समीकरण (E) को ठीक हल किया है। इससे यह ज्ञात नहीं होगा कि वास्तव में 300 संतरे खरीदे गए थे। यह जाँचने के लिए, *हमें हल का सत्यापन दिए गए प्रश्न से मिलाकर करना होगा।* आइए, ऐसा करें।

यदि 300 संतरें 5 रु की दर से खरीदकर 20 % लाभ पर बेचे जाएँ, तो संतरों पर लाभ होगा :

$$\left(300 \times 5 \times \frac{20}{100}\right) \text{ रु} = 300 \text{ रु} \qquad \text{(F)}$$

यदि 300 केले (उतने ही जितने कि संतरे) 2 रु की दर से खरीदकर 15 % लाभ पर बेचे जाएँ, तो केलों पर लाभ होगा :

$$\left(300 \times 2 \times \frac{15}{100}\right) \text{ रु} = 90 \text{ रु} \qquad \text{(G)}$$

(F) और (G) से, विक्रेता का कुल लाभ हुआ :

$$300 \text{ रु} + 90 \text{ रु} = 390 \text{ रु}$$

अतः, हल सही है।

उदाहरण 8 : एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ (कर्ण के अतिरिक्त) 3:4 के अनुपात में हैं। इसके कर्ण पर एक आयत बनाया गया है जिसकी बड़ी भुजा स्वयं यह कर्ण है (आकृति 8.1)। इस आयत की चौड़ाई इसकी लंबाई का $\frac{4}{5}$वाँ भाग है। यदि आयत का परिमाप 180 cm हो, तो समकोण त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा ज्ञात कीजिए।

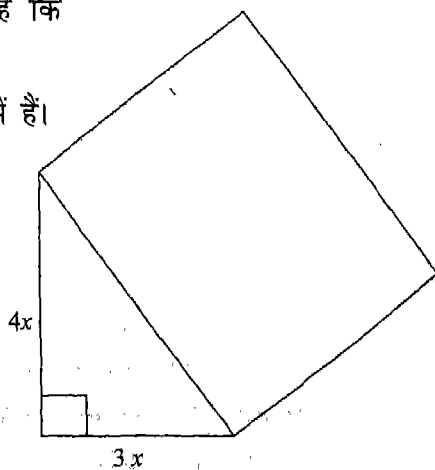
हल : I. प्रश्न को ध्यान से पढ़ने पर ज्ञात होता है कि निम्नलिखित तथ्य दिए गए हैं :

(1) समकोण त्रिभुज की भुजाएँ 3:4 के अनुपात में हैं।

(2) आयत की लंबाई = समकोण त्रिभुज का कर्ण

(3) आयत की चौड़ाई = $\frac{4}{5}$ × (आयत की लंबाई)

(4) आयत का परिमाप = 180 cm

हमें समकोण त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा *ज्ञात* करनी है।

आकृति : 8.1

II. क्योंकि त्रिभुज की एक भुजा ज्ञात करनी है, अत: ऊपर के तथ्य (1) को ध्यान में रखते हुए, यह सुविधाजनक रहेगा कि सबसे छोटी भुजा को (cm में) $3x$ मान लिया जाए। इस स्थिति में, त्रिभुज की दूसरी भुजा (cm में) $4x$ होगी।

III. अब हम प्रश्न में दी गई सूचनाओं [ऊपर के तथ्य (1) से (4)] को गणितीय कथनों में रूपांतरित करने का प्रयास करेंगे। चरण II में, (1) को तो पहले ही $3x$ और $4x$ के रूप में परिवर्तित किया जा चुका है। अब (2) को लीजिए। इससे हमें ज्ञात होता है कि आयत की लंबाई समकोण त्रिभुज के कर्ण के समान है। आइए, कर्ण का मान ज्ञात करें। पाइथागोरस प्रमेय से,

कर्ण (cm में) = $\sqrt{\text{भुजाओं के वर्गों का योग}}$

$$= \sqrt{(3x)^2+(4x)^2} = \sqrt{25x^2} = 5x$$

अत:, आयत की लंबाई (cm में) = $5x$ (A)

(3) से, हम देखते हैं कि

आयत की चौड़ाई (cm में) = $\frac{4}{5}\times 5x = 4x$ (B)

आइए, अब (4) को गणितीय कथन में रूपांतरित करें। याद कीजिए कि

आयत का परिमाप = 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

अत:, (4) से प्राप्त होता है :

$2\times(5x+4x)=180$ (C)

IV. अब हम समीकरण (C) को हल करेंगे जिसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$18\,x = 180$$

$$\therefore \quad x = 10$$

अत:, त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा (cm में) $= 3x = 3\times 10 = 30$

जाँच : अब हम दिए गए प्रश्न के साथ हल की जाँच करेंगे। त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा 30 cm है। क्योंकि भुजाएँ 3 : 4 के अनुपात में हैं, अत:, दूसरी भुजा 40 cm हुई। अर्थात्

त्रिभुज का कर्ण = $\sqrt{30^2+40^2}$ cm = $\sqrt{2500}$ cm = 50 cm

इस प्रकार, आयत की लंबाई = 50 cm और इसकी चौड़ाई $\frac{4}{5} \times 50$ cm = 40 cm हुई। अब आयत का परिमाप $2 \times (50 + 40)$ cm, अर्थात् 180 cm हुआ।

अतः, हल सही है।

अब हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा 30 cm है।

उदाहरण 9 : दो धनात्मक पूर्णांकों का अंतर 50 है। इन पूर्णांकों में 1 : 3 का अनुपात है। ये पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

हल : I. हमें दो पूर्णांकों में दो संबंध दिए गए हैं। हमें दोनों पूर्णांकों के मान ज्ञात करने हैं। चलिए, जिन दो पूर्णांकों के मान ज्ञात करने हैं उनमें से छोटे को चर x से व्यक्त करें।

II. प्रश्न के पहले कथन से ज्ञात होता है कि दोनों पूर्णांकों का अंतर 50 है। अतः बड़ा पूर्णांक $x + 50$ है। इस प्रकार, ये दो पूर्णांक x और $x + 50$ हैं।

III. अब प्रश्न का अगला कथन पढ़िए। इससे ज्ञात होता है कि इन पूर्णांकों का अनुपात 1 : 3 है। इस संबंध को गणितीय कथन में परिवर्तित करने पर,

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{x+50} \qquad (1)$$

चूँकि 1, 3 से छोटा होता है, हमने छोटे पूर्णांक x को RHS के अंश में लिखा।

IV. प्रश्न में और कोई सूचना नहीं दी गई है। अतः, हम ऊपर के समीकरण (1) को हल करते हैं। वज्र गुणन द्वारा,

$$1 \times (x + 50) = 3 \times x$$

या $$x + 50 = 3x$$

या $$50 = 2x$$

या $$x = 25$$

V. पूर्णांकों को x और $x + 50$ से व्यक्त किया गया था। हमने पाया कि x का मान 25 है। अतः, ये पूर्णांक 25 और 25 + 50, अर्थात् 25 और 75 हैं। अतः, इच्छित पूर्णांक 25 और 75 हैं।

VI. आइए, अब हल की जाँच करें। प्रश्न का पहला कथन यह बताता है कि पूर्णांकों में 50 का अंतर है। हम देखते हैं कि 75 − 25 = 50 है। यहाँ तक तो हल सही है। प्रश्न का दूसरा कथन है कि इन दोनों पूर्णांकों का अनुपात 1 : 3 है। अब 25 : 75 वही अनुपात है जो 1 : 3 है। अतः, हल सही है।

टिप्पणी : चरण V के अंत में यह जाँचने में कि $x = 25$ समीकरण (1) को संतुष्ट करता है या नहीं, कोई हानि नहीं थी। किंतु यह जाँच इस बात के लिए पर्याप्त न होती कि दी गई समस्या का हल सही है। अत:, यह आवश्यक है कि हम चरण VI के अनुसार हल को दी हुई समस्या के साथ मिलाकर उसकी जाँच करें।

वैकल्पिक हल : चूँकि संख्याएँ 1:3 के अनुपात में हैं, अत: हम संख्याओं को x और $3x$ ले सकते हैं। क्योंकि संख्याओं में अंतर 50 है, अत:

$3x - x = 50$ [ध्यान दीजिए कि $3x$ बड़ी संख्या है।]

या $2x = 50$

या $x = 25$

अत:, अभीष्ट संख्याएँ 25 और 75 हैं।

उदाहरण 10 : दो अंकों वाली एक संख्या के अंकों का योग 7 है। अंकों का परस्पर क्रम बदलने पर प्राप्त संख्या दी गई संख्या से 27 अधिक है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : यह दिया गया है कि इच्छित *संख्या में दो अंक* हैं। इसलिए संख्या ज्ञात करने के लिए, हमें उसके इकाई और दहाई के अंक निकालने होंगे।

माना कि इकाई का अंक x है। क्योंकि अंकों का योग 7 दिया गया है, अत: दहाई का अंक $(7 - x)$ हुआ। इस प्रकार, प्रसारित रूप में यह संख्या है :

$(7 - x) \times 10 + x$ अर्थात् $70 - 9x$ (1)

[याद कीजिए कि प्रसारित रूप में, $25 = 2 \times 10 + 5, 81 = 8 \times 10 + 1, 36 = 3 \times 10 + 6$ आदि।]

आइए, अब दी गई संख्या के अंकों का क्रम बदल दें। तब इकाई का अंक $(7 - x)$ और दहाई का अंक x हो जाता है। प्रसारित रूप में, नई संख्या है:

$x \times 10 + (7 - x)$, अर्थात् $9x + 7$ (2)

दिया गया है कि नई संख्या पुरानी संख्या से 27 अधिक है। अत:, (1) और (2) से हमें प्राप्त होता है :

$(9x + 7) - (70 - 9x) = 27$

या $18x - 63 = 27$

या $18x = 90$ (– 63 को पक्षांतरित करने पर)

या $x = 5$ (18 से भाग देकर)

इस प्रकार, इकाई का अंक $= x = 5$,

दहाई का अंक $= 7 - x = 7 - 5 = 2$

अत:, अभीष्ट संख्या 25 है।

जाँच : अंकों का परस्पर क्रम बदलने पर हमें 52 प्राप्त होता है।

अब, $52 - 25 = 27$

अत:, हल सही है।

उदाहरण 11 : नदी के बहाव की दिशा में जाती हुई एक मोटरबोट दो तटीय नगरों के बीच की दूरी पाँच घंटे में तय करती है। बहाव के विपरीत मोटरबोट इसी दूरी को छ: घंटे में तय करती है। यदि जलधारा की चाल 2 km/h हो, तो स्थिर जल में बोट की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि हमें स्थिर जल में बोट की चाल ज्ञात करनी है, इसलिए हम मान लेते हैं कि यह चाल x km/h है। इसका अर्थ यह हुआ कि बहाव के साथ-साथ जाते हुए बोट की चाल $(x + 2)$ km/h होगी, क्योंकि x km/h की इसकी अपनी चाल के अतिरिक्त जल भी इसे 2 km/h की दर से आगे धकेल रहा है। बहाव के विपरीत जाते हुए बोट को जल की धारा के विपरीत भी शक्ति लगानी पड़ती है। अत: बहाव के विपरीत इसकी चाल $(x - 2)$ km/h होगी।

यह दिया गया है कि बहाव के साथ-साथ जाते हुए बोट दो तटीय नगरों, माना A और B, के बीच की दूरी पाँच घंटे में तय करती है। अब,

बहाव के साथ बोट की चाल $= (x + 2)$ km/h

एक घंटे में तय की गई दूरी $= (x + 2)$ km

$\therefore$ पाँच घंटे में तय की गई दूरी $= 5 \times (x + 2)$ km

अत:, A और B के बीच की दूरी $5(x + 2)$ km है। (1)

बहाव के विपरीत बोट की चाल $= (x - 2)$ km/h

एक घंटे में तय की गई दूरी $= (x - 2)$ km

$\therefore$ छ: घंटे में तय की गई दूरी $= 6 \times (x - 2)$ km

अत:, A और B के बीच की दूरी $6(x - 2)$ km है। (2)

क्योंकि A और B के बीच तो एक नियत दूरी है, अत: (1) और (2) की तुलना कर, हमें प्राप्त होता है : $5(x + 2) = 6(x - 2)$

इस रैखिक समीकरण को हल करने पर हमें $x = 22$ प्राप्त होता है। अत:, मोटरबोट की अभीष्ट चाल 22 km/h है।

प्रश्नावली 8.2

1. दो धनात्मक पूर्णांकों का अंतर 36 है। एक पूर्णांक को दूसरे से भाग देने पर भागफल 4 आता है। दोनों पूर्णांक ज्ञात कीजिए।
2. दो धनात्मक पूर्णांकों का योग 98 है। इन पूर्णांकों में 3:4 का अनुपात है। ये पूर्णांक ज्ञात कीजिए।
3. एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 8 अधिक है। अंश में 17 जोड़ने और हर में से 1 घटाने पर, संख्या $\frac{3}{2}$ प्राप्त होती है। वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।
4. एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। दोनों संख्याओं में पंद्रह-पंद्रह जोड़ने पर प्राप्त संख्याओं में से एक, दूसरी की दुगुनी हो जाती है। वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. 5 के दो क्रमागत गुणजों का योग 55 है। इन दोनों गुणजों को ज्ञात कीजिए।
6. 6 के तीन क्रमागत गुणजों का योग 666 है। ये गुणज ज्ञात कीजिए।
7. 9 के तीन क्रमागत गुणजों का योग 999 है। ये गुणज ज्ञात कीजिए।
8. रूबी और रेशमा की आयु में 5 : 7 का अनुपात है। चार वर्ष पश्चात्, उनकी आयु का अनुपात 3 : 4 हो जाएगा। उनकी आयु ज्ञात कीजिए।
9. पाँच वर्ष पहले लकी की आयु लवली की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात्, लकी की आयु लवली की आयु की दुगुनी हो जाएगी। उनकी वर्तमान आयु क्या हैं?

   [*संकेत :* पहले यह ज्ञात कीजिए कि पाँच वर्ष पूर्व उनकी आयु क्या थीं।]
10. एक आयत का परिमाप 240 cm है। लंबाई को 10 % घटाने और चौड़ाई को 20 % बढ़ाने पर भी परिमाप यही रहता है। आयत की लंबाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

    [*संकेत :* यदि l और b क्रमशः लंबाई और चौड़ाई को व्यक्त करते हों, तो $b = 120 - l$ है।]
11. दो अंकों वाली एक संख्या के अंकों का योग 9 है। अंकों का परस्पर क्रम बदलने पर प्राप्त संख्या दी गई संख्या से 27 अधिक है। दी गई संख्या ज्ञात कीजिए।
12. दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योग 12 है। दी गई संख्या, अंकों का परस्पर क्रम बदलने पर प्राप्त संख्या से 36 अधिक है। दी गई संख्या ज्ञात कीजिए।

13. किसी दिए गए त्रिभुज की प्रत्येक भुजा में 10 cm की वृद्धि की जाती है। यदि नए त्रिभुज और दिए गए त्रिभुज के परिमापों में 5:4 का अनुपात हो, तो दिए हुए त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।

[*संकेत :* यदि भुजाएँ a, b, c हो, तो परिमाप $a + b + c$ को x मान लीजिए।]

14. सेवानिवृत्त होने पर, कंचन को अपने नियोक्ता (employer) से कुछ धनराशि प्राप्त होती है। वह इस राशि की आधी राशि में 10000 रु और मिलाकर अपनी पुत्री को देती है। वह प्राप्त राशि की तिहाई राशि में 3000 रु और मिलाकर अपने पुत्र को भी देती है। यदि पुत्री को पुत्र से दुगुनी राशि प्राप्त हुई हो, तो कंचन को सेवानिवृत्ति पर अपने नियोक्ता से मिली राशि ज्ञात कीजिए।

15. नदी के बहाव की दिशा में जाती हुई कोई मोटरबोट नदी में एक विशेष दूरी पाँच घंटे में तय करती है। बहाव के विपरीत बोट इसी दूरी को साढ़े पाँच घंटे में तय करती है। जलधारा की चाल 1.5 km/h है। स्थिर जल में बोट की चाल ज्ञात कीजिए।

16. नदी में बहाव के साथ-साथ जाता हुआ कोई स्टीमर दो नगरों के बीच की दूरी 20 घंटे में तय करता है। बहाव के विपरीत दिशा में वापिस आते हुए स्टीमर इसी दूरी को 25 घंटे में तय करता है। जलधारा की चाल 4 km/h है। दोनों नगरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

[*संकेत :* पहले स्थिर जल में स्टीमर की चाल निकालिए।]

17. एक रेस-बोट 66 km की दूरी बहाव के साथ-साथ जाती हुई 110 मिनट में तय करती है। बहाव के विपरीत जाते हुए इसी दूरी को तय करने में बोट 120 मिनट लेती है। स्थिर जल में बोट की चाल 34.5 km/h है। जलधारा की चाल ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. यदि a, b, c, d और k संख्याएँ हों, तो $\dfrac{ax+b}{cx+d} = k$ जैसे समीकरणों को हल करने के लिए, हम इन्हें रैखिक समीकरणों के रूप में बदलते हैं।

2. $\dfrac{ax+b}{cx+d} = k$ जैसे समीकरणों को रैखिक समीकरणों में बदलने के लिए वज्र गुणन की विधि उपयोगी रहती है।

3. किसी शाब्दिक समस्या को हल करने के लिए, अज्ञात राशि को किसी चर से व्यक्त कीजिए और प्रश्न में दिए गए कथनों को क्रमवार गणितीय कथनों में बदलिए। प्रासंगिक समता संबंध बनाकर संगत समीकरणों को हल कीजिए।

—— *अतीत के झरोखे से* ——

बीजगणित के क्षेत्र में *आर्यभट, ब्रह्मगुप्त* और *भास्कर* जैसे भारतीय गणितज्ञों के योगदान से आप पहले ही परिचित हैं। परंतु जिस विषय को आज हम बीजगणित के नाम से जानते हैं उसके बीज तो सभ्यंता के आदिम युग में ही बोए जा चुके थे। इसे हम बीजगणित के ज्ञान का प्रथम चक्र कह सकते हैं। यहाँ ऐसी संख्या-पहेलियाँ दृष्टिगोचर होती हैं जिन्हें बीजगणितीय पुट से हल किया जा सकता है। *अहम्स* (*Ahmes*, 1550 ईसा पूर्व) एक पांडुलिपिक (scribe) थे जिन्होंने अपने काल के गणित-ज्ञान को *पेपिरस* (*papyrus*) पर लिखा। उनके पेपिरस पर लिखा एक प्रश्न यह है: *राशि, यह पूरी, इसका सप्तांश, यह 19 है।* (*Mass, it whole, its seventh, it makes 19*, हमारे संकेतन में यह हुआ : $x + \frac{x}{7} = 19$)

दूसरे चक्र में, बीजगणित ज्यामितीय रूप में यूनान में दृष्टिगोचर होता है। यूनानी ज्यामिति में तो निपुण थे पर जाने कैसे, इनका बीजगणित का ज्ञान शून्य था। आधुनिक बीजगणितीय संक्रियाओं को वे लाघवपूर्ण ज्यामितीय विधियों से करते थे। उदाहरणतः, *यूक्लिड* (*Euclid*) की पुस्तक II में, अनेक बीजीय सर्वसमिकाओं के ज्यामितीय प्रसंस्करण मिलते हैं। ये सभी सर्वसमिकाएँ किसी-न-किसी ज्यामितीय आकृति को उपयुक्त टुकड़ों में काटकर सिद्ध की गई थीं। उदाहरण के लिए, प्रारंभिक पाइथागोरियों (Pythagoreans) द्वारा सिद्ध की गई सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, यूक्लिड ने इस प्रकार व्यक्त की :

यदि किसी सीधी रेखा को दो भागों में बाँटा जाए, तो संपूर्ण रेखा पर बना वर्ग तुल्य होता है, उसके दोनों भागों पर बने वर्ग और दोनों भागों से बने आयत के दुगुने के।

तीसरे चक्र में, बीजगणित मानवीय कार्यकलापों से संबद्ध ललित, पूर्वदेशीय समस्याओं (जिनके कुछ उदाहरण कक्षा VII में दिए गए थे) और वास्तविक जीवन की समस्याओं के रूप में उभरता है। नीचे दी गई समस्याओं में से प्रथम किसी यूनानी संग्रह से ली गई है और दूसरी चीन देश से ली गई है।

I. *मूर्ति* A : जिस आधार पर मैं स्थित हूँ उसका और मेरा भार मिलाकर, कुल कितना भार है?

मूर्ति B : मेरे आधार का और मेरा भार मिलाकर जितने टैलैंट (*talent*) हैं, उतना।

मूर्ति A : मुझ अकेले का भार तुम्हारे आधार के भार का दुगुना है।

मूर्ति B : मुझ अकेले क़ा भार तुम्हारे आधार के भार का तीन गुना है।

(आप इस समस्या को सरलता से हल कर सकते हैं; कुल भार को w और मूर्ति B के आधार के भार को x मानकर चलिए।)

II. यदि एक मुर्गे का मूल्य 5 *सपेक* (*Sapeks*), एक मुर्गी का मूल्य 3 *सपेक* और तीन चूज़ों का मूल्य 1 *सपेक* हो, तो कितने-कितने मुर्गे, मुर्गियों और चूज़ों, कुल मिलाकर 100 का मूल्य 100 *सपेक* होगा?

(आप प्रयत्न और भूल विधि से हल ज्ञात कर सकते हैं; याद रखिए कि *सपेक* धन का एक मात्रक है।)

उच्च कक्षाओं में आप अन्य अनेक प्रकार के बीजगणितों के विषय में अध्ययन करेंगे।

अध्याय

समांतर रेखाएँ

9.1 भूमिका

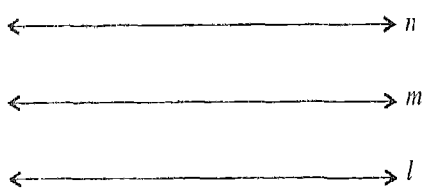
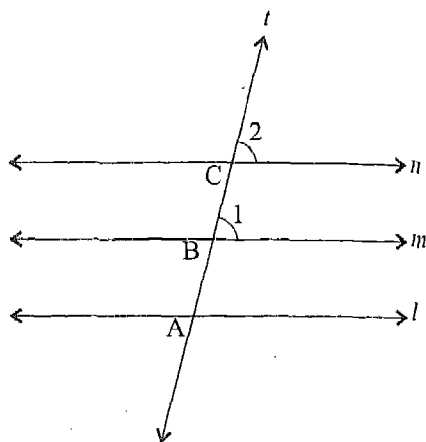
पिछली कक्षाओं में, आप समांतर रेखाओं, तिर्यक रेखाओं तथा उनके कुछ गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। आपको निम्न के बारे में याद होगा :

1. एक तल में वे रेखाएँ जो प्रतिच्छेद नहीं करती *समांतर रेखाएँ* (*Parallel lines*) कहलाती हैं।
2. वह रेखा जो दो या दो से अधिक दी हुई रेखाओं को *भिन्न* (*distinct*) बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है उन दी हुई रेखाओं पर एक *तिर्यक रेखा* (*transversal*) कहलाती है।
3. दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी सभी स्थानों पर समान रहती है तथा यह इन दोनों समांतर रेखाओं के बीच की लांबिक (लंबवत्) दूरी के बराबर होती है।
4. यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे, तो
   (i) संगत कोणों के प्रत्येक युग्म के कोण बराबर होते हैं।
   (ii) एकांतर अंत: कोणों के प्रत्येक युग्म के कोण बराबर होते हैं।
   (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोण संपूरक होते हैं।
5. यदि दो रेखाएँ एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित हों, तो वे समांतर होती हैं, जबकि निम्न में से कोई भी एक कथन सत्य हो :
   (i) संगत कोणों के किसी भी युग्म के कोण बराबर हैं।
   (ii) एकांतर अंत: कोणों के किसी भी युग्म के कोण बराबर हैं।
   (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोणों के प्रत्येक युग्म के कोण संपूरक हैं।

इस अध्याय में, हम समांतर रेखाओं से संबंधित कुछ और गुणों का अध्ययन करेंगे तथा इस ज्ञान का (i) एक दिए हुए रेखाखंड को दिए हुए समान (बराबर) भागों में विभाजित करने एवं

(ii) एक दिए हुए रेखाखंड को एक दिए हुए अनुपात में विभाजित करने में प्रयोग करेंगे।

9.2 एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ

मान लीजिए किसी तल में हमें एक निश्चित रेखा l दी हुई है। आइए इसी तल में, ऐसी दो रेखाओं m एवं n पर विचार करें जिनमें से प्रत्येक रेखा l के समांतर है (आकृति 9.1)। इस प्रकार $m \parallel l$ और $n \parallel l$ है। इन दोनों रेखाओं m और n के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या ये दोनों रेखाएँ समांतर हैं? आइए जाँच करें।

आकृति 9.1

आकृति 9.2

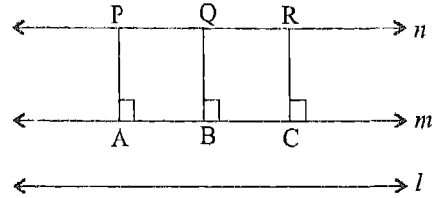
क्रियाकलाप 1 : एक कागज पर रेखा l खींचिए। पटरी एवं सेट-स्क्वेयर की सहायता से दो रेखाएँ m और n ऐसी खींचिए कि इनमें से प्रत्येक रेखा l के समांतर हो। अब एक तिर्यक रेखा t खींचिए जो रेखाओं l, m और n को क्रमशः A, B और C पर प्रतिच्छेद करे तथा क्रमशः बिंदुओं B और C पर संगत कोण 1 और 2 बनाए (आकृति 9.2)।

चाँदे की सहायता से $\angle 1$ और $\angle 2$ को मापिए तथा अंतर $\angle 1 - \angle 2$ ज्ञात कीजिए। इसी प्रकार की समांतर रेखाएँ लेकर उपर्युक्त क्रियाकलाप को दो और आकृतियाँ बनाकर दोहराइए। सुविधा की दृष्टि से, प्रत्येक स्थिति में आकृति का नामांकन एक ही प्रकार से करें। इन आकृतियों को 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए। प्रत्येक आकृति के लिए $\angle 1$, $\angle 2$ एवं अंतर $\angle 1 - \angle 2$ ज्ञात कीजिए तथा अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में लिखिए, जैसा कि आगे दर्शाया गया है :

आकृति	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 1 - \angle 2$
1			
2			
3			

आप क्या देखते हैं? प्रत्येक स्थिति में, आप देखेंगे कि अंतर $\angle 1 - \angle 2$ या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। शून्येतर अंतर मापन में की गई किसी त्रुटि के कारण हो सकता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में $\angle 1 = \angle 2$ है।

चूँकि $\angle 1$ और $\angle 2$ संगत कोण हैं, इसलिए प्रत्येक स्थिति में $m \parallel n$ है।

क्रियाकलाप 2 : क्रियाकलाप 1 की ही तरह, एक कागज पर कोई रेखा l खींचिए और फिर पटरी एवं सेट स्क्वेयर की सहायता से l के समांतर दो रेखाएँ m और n खींचिए। अब रेखा n पर तीन बिंदु P, Q एवं R लीजिए तथा इन बिंदुओं से रेखा m पर क्रमश: लंब PA, QB एवं RC खींचिए ताकि A, B और C रेखा m पर स्थित हों (आकृति 9.3)।

आकृति 9.3

इसी प्रकार की समांतर रेखाएँ एवं लंब रेखाएँ लेते हुए, दो अन्य आकृतियाँ खींचकर उपर्युक्त क्रियाकलाप को दोहराएँ। सुविधा की दृष्टि से, प्रत्येक स्थिति के लिए, आकृति का नामांकन एक ही प्रकार से कीजिए तथा आकृतियों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

अब प्रत्येक स्थिति में, PA, QB एवं RC को मापिए अथा अंतरों PA–QB, QB–RC एवं RC–PA को ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में लिखिए, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

आकृति	PA	QB	RC	PA–QB	QB–RC	RC–PA
1						
2						
3						

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, लांबिक दूरियों के अंतर PA–QB, QB – RC एवं RC – PA या तो शून्य हैं या इतने कम हैं कि इन्हें छोड़ा जा सकता है। यहाँ

भी शून्येतर अंतर त्रुटिपूर्ण मापनों के कारण प्राप्त होंगे।

इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में, PA = QB = RC है। दूसरे शब्दों में, दोनों रेखाओं m और n के बीच की लांबिक दूरियाँ प्रत्येक स्थान पर बराबर हैं। इस प्रकार, $m \parallel n$ है।

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलापों से हमें निम्नलिखित गुण दृष्टिगत होता है:

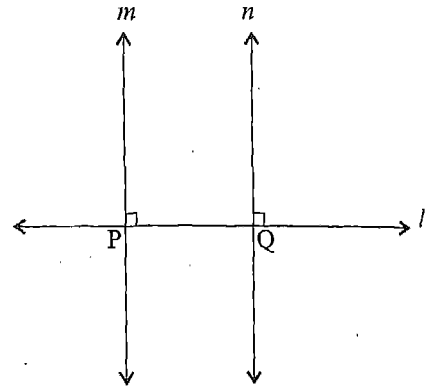
दो रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर हों परस्पर समांतर होती हैं।

इस स्थिति में, हम यह भी कहते हैं कि *तीनो रेखाएँ परस्पर समांतर हैं।*

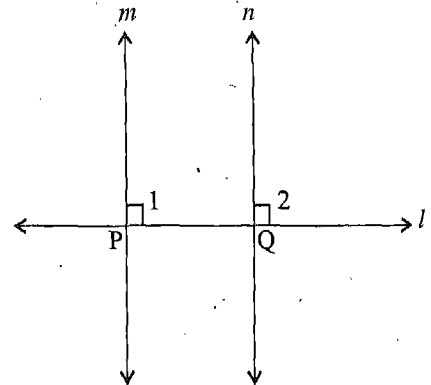
टिप्पणी : हम उपर्युक्त गुण को निम्न प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं :

दो रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर हैं परस्पर प्रतिच्छेद नहीं कर सकतीं। दूसरे शब्दों में, *दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकतीं।*

9.3 एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ

मान लीजिए किसी तल में हमें एक निश्चित रेखा l दी हुई है। आइए इसी तल में, ऐसी दो रेखाओं m और n पर विचार करें जो रेखा l पर क्रमश: P एवं Q बिंदुओं पर लंब हैं (आकृति 9.4)। आप इन दोनों रेखाओं m और n के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या ये दोनों रेखाएँ परस्पर समांतर हैं या नहीं? आइए इसकी जाँच करें।

आकृति 9.4

आकृति 9.5

क्रियाकलाप 3 : एक कागज पर कोई रेखा l खींचिए तथा उस पर कोई दो बिंदु P और Q लीजिए। पटरी एवं सेट स्क्वेयर की सहायता से, l पर दो लंब रेखाएँ खींचिए जो क्रमश: P और Q पर संगत कोण 1 और 2 बनाएँ (आकृति 9.5)। हम देखते हैं कि $\angle 1 = 90° = \angle 2$ है। हम यह भी देखते हैं कि $\angle 1$ और $\angle 2$ संगत कोण हैं। क्योंकि ये दोनों संगत कोण बराबर हैं, इसलिए हमें $m \parallel n$ प्राप्त होता है।

इस क्रियाकलाप से हमें निम्नलिखित गुण दृष्टिगत होता है :

दो रेखाएँ जो एक ही रेखा पर लंब होती हैं परस्पर समांतर होती हैं।

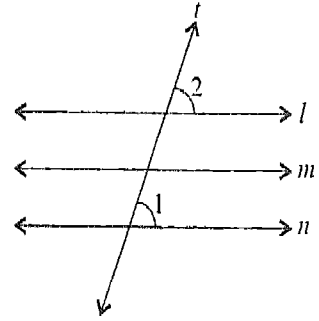
हम इस गुण की रेखा m पर तीन बिंदु A, B एवं C लेकर, उनसे n पर क्रमश: AM, BN एवं CR लंब खींचकर और फिर AM, BN एवं CR को मापकर भी जाँच कर सकते हैं, जैसा कि उपर्युक्त क्रियाकलाप 2 में की थी। हम देखेंगे कि AM = BN = CR है और इसलिए $m \parallel n$ है।

आइए इन गुणों को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : आकृति 9.6 में, $l \parallel m$ तथा $m \parallel n$ है। यदि $\angle 1 = 70°$ है, तो $\angle 2$ ज्ञात कीजिए।

हल : $l \parallel m$ तथा $m \parallel n$ (दिया है)

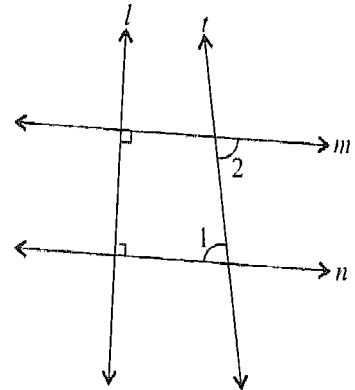
अत:, $l \parallel n$ (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ)

इसलिए, $\angle 2 = \angle 1 = 70°$ (संगत कोण)

आकृति 9.6

उदाहरण 2 : आकृति 9.7 में, $m \perp l$ और $n \perp l$ है तथा तिर्यक रेखा t क्रमश: n और m के साथ $\angle 1$ और $\angle 2$ बनाती है। यदि $\angle 1 = 80°$ है, तो $\angle 2$ ज्ञात कीजिए।

हल : $m \perp l$ और $n \perp l$ (दिया है)

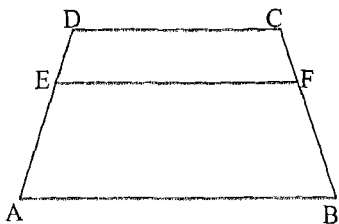
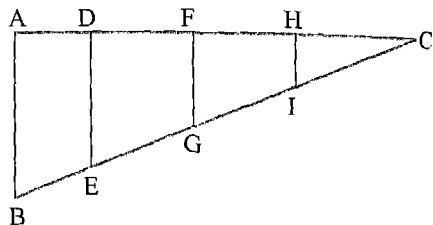
अत:, $m \parallel n$ (एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ)

इसलिए, $\angle 2 = \angle 1 = 80°$ (एकांतर अंत:कोण)

आकृति 9.7

प्रश्नावली 9.1

1. आकृति 9.8 में, $AB \parallel DC$ एवं $EF \parallel AB$ है।

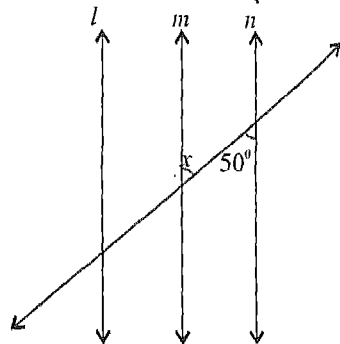
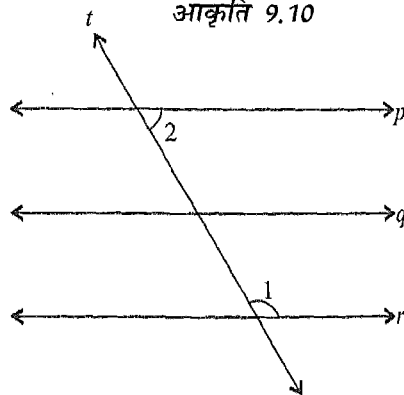
(i) क्या $EF \parallel DC$ भी है? क्यों?

(ii) इस आकृति में समांतर रेखाखंडों के कितने युग्म हैं? प्रत्येक का नाम लिखए।

आकृति 9.8

आकृति 9.9

2. आकृति 9.9 में, रेखाखंडों DE, FG और HI में से प्रत्येक Δ ABC की भुजा AB के समांतर है। इस आकृति में समांतर रेखाखंडों के कितने युग्म हैं? प्रत्येक का नाम लिखिए।

3. आकृति 9.10 में, $l \parallel m$ एवं $l \parallel n$ है।

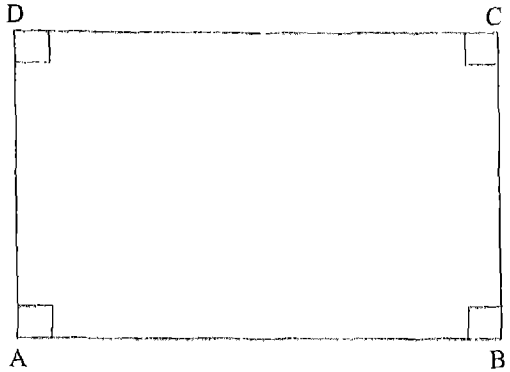
(i) क्या $m \parallel n$ है? क्यों ?

(ii) x का मान ज्ञात कीजिए।

4. आकृति 9.11 में, $p \parallel q$ एवं $q \parallel r$ है।
यदि $\angle 1 = 120°$ है, तो $\angle 2$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.10

आकृति 9.11

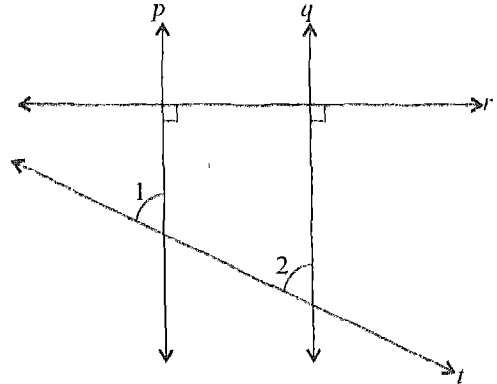
5. चतुर्भुज ABCD का प्रत्येक कोण समकोण है (आकृति 9.12)।

(i) क्या $AD \parallel BC$ है? क्यों?

(ii) क्या $AB \parallel DC$ है? क्यों?

आकृति 9.12

6. आकृति 9.13 में, $r \perp p$ एवं $r \perp q$ है।

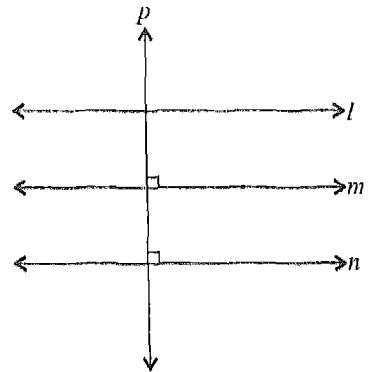
(i) क्या $p \parallel q$ है? क्यों?

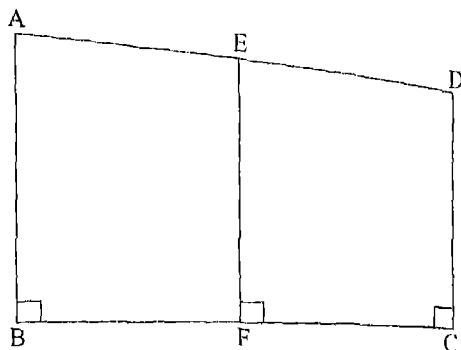
(ii) यदि $\angle 1 = 65°$ है, तो $\angle 2$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.13

7. आकृति 9.14 में, $l \parallel m$, $p \perp m$ एवं $p \perp n$ है।

(i) क्या $m \parallel n$ है? क्यों?

(ii) क्या $l \parallel n$ है? क्यों?

(iii) क्या $p \perp l$ है? क्यों?

आकृति 9.14

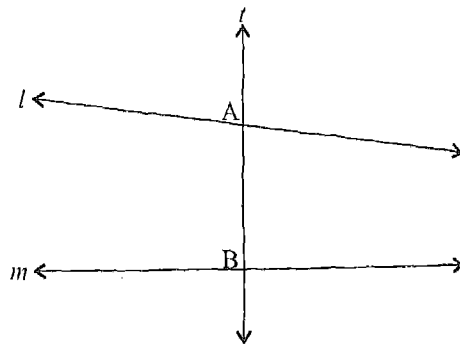
8. आकृति 9.15 में, AB, EF एवं DC में से प्रत्येक BC पर लंब है। इस आकृति में समांतर रेखाओं के कितने युग्म हैं? प्रत्येक का नाम लिखिए।

आकृति 9.15

9. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए :
   (i) एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
   (ii) एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ परस्पर लंब होती हैं।
   (iii) एक ही रेखा पर लंब दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
   (iv) एक ही रेखा पर लंब दो रेखाएँ परस्पर लंब होती हैं।
   (v) एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं।
   (vi) एक ही रेखा पर लंब दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं।

9.4 अंतःखंड

आप आकृति 9.16 से अपनी पिछली कक्षाओं से परिचित हैं। इसमें दो रेखाएँ l और m हैं तथा इन्हें एक तीसरी रेखा t क्रमशः भिन्न बिंदुओं A और B पर काटती है। यह तीसरी रेखा क्या कहलाती है? यह एक *तिर्यक रेखा* कहलाती है।

आकृति 9.16

इस आकृति की एक अन्य प्रकार से भी व्याख्या की जा सकती है। हम कहते हैं कि दो रेखाएँ l और m एक तीसरी रेखा t को दो भिन्न बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती हैं। इस प्रकार, दोनों रेखाएँ l और m तीसरी रेखा t पर रेखाखंड AB काटती है। हम इस रेखाखंडों को एक विशेष नाम *अंतःखंड (intercept)* देते हैं। इस प्रकार,

यदि एक तिर्यक रेखा t दो रेखाओं l और m को दो भिन्न बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती है, तो यह कहा जाता है कि रेखाएँ l और m रेखा t पर अंतःखंड AB काटती है।

ध्यान दीजिए कि अंतःखंड AB एक रेखाखंड है। परंतु शब्द 'अंतःखंड' को अंतःखंड AB की लंबाई के लिए भी प्रयोग किया जाता है।

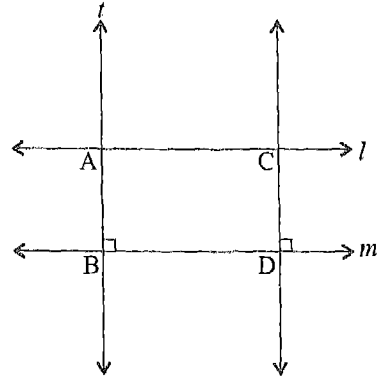
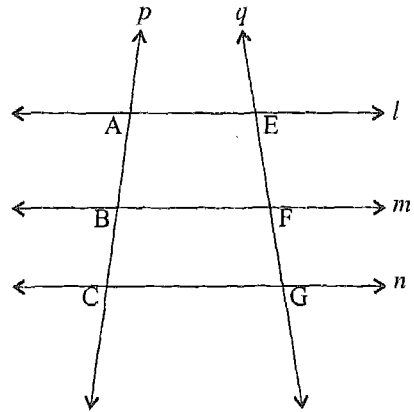
आकृति 9.17

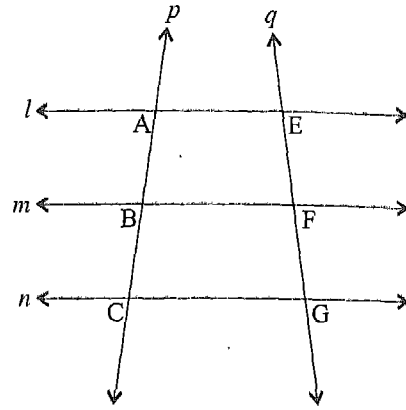
उपर्युक्त विवरण में, हमने रेखाओं l और m के समांतर होने या न होने के बारे में कुछ नहीं कहा है। परंतु यदि l और m समांतर हों और t इन पर लंब हो, तो अंतःखंड AB समांतर रेखाओं l और m के बीच की दूरी के अतिरिक्त कुछ भी नहीं है (आकृति 9.17)। आपको एक चिर-परिचित गुण याद होगा कि दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी प्रत्येक स्थान पर एक जैसी ही होती है। अंतःखंडों के पदों में, हम कह सकते हैं कि

दो समांतर रेखाएँ अपने पर लंब सभी तिर्यक रेखाओं पर समान (बराबर) अंतःखंड बनाती (काटती) हैं।

अब यदि l, m और n परस्पर तीन समांतर रेखाएँ हैं (आकृति 9.18) तथा एक तिर्यक रेखा p उन्हें क्रमशः तीन बिंदुओं A, B और C पर प्रतिच्छेद करती (काटती) है, तो हम कहते हैं कि रेखाओं l, m तथा m, n के युग्म p पर क्रमशः अंतःखंड AB और BC काटते हैं।

आकृति 9.18

इसी प्रकार, यदि एक तिर्यक रेखा q रेखाओं l, m और n को क्रमशः तीन बिंदुओं E, F और G पर प्रतिच्छेद करती है, तो हम कहते हैं कि रेखाओं l, m तथा m, n के युग्म q पर क्रमशः अंतःखंड EF और FG काटते हैं। अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है: क्या उपर्युक्त चारों अंतःखंडों AB, BC, EF एवं FG के बीच कोई संबंध विद्यमान है? अगले दो अनुच्छेदों में, हम क्रियाकलापों की सहायता से इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करेंगे।

9.5 समान अंत:खंड गुण

क्रियाकलाप 4 : कोई रेखा p खींचिए। इस रेखा पर तीन बिंदु A, B और C (इसी क्रम में) इस प्रकार लीजिए कि AB = BC हो (आकृति 9.19)। A, B और C से होकर क्रमशः तीन रेखाएँ l, m और n इस प्रकार खींचिए कि वे परस्पर समांतर हों। इस प्रकार, हमें एक तिर्यक रेखा p ऐसी प्राप्त है जो तीन समांतर रेखाओं l, m और n को इस प्रकार प्रतिच्छेद कर रही है कि AB = BC है। अब एक अन्य तिर्यक रेखा q ऐसी खींचिए जो रेखाओं l, m और n को क्रमशः बिंदुओ E, F और G पर काटे।

आकृति 9.19

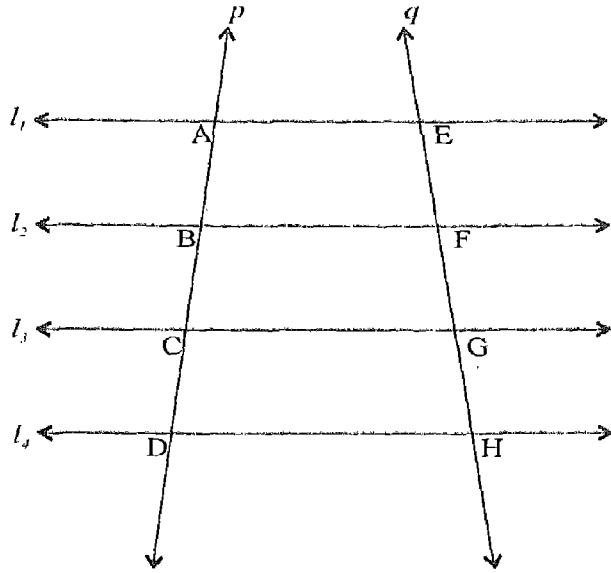
EF एवं FG को मापिए तथा EF–FG ज्ञात कीजिए। इस क्रियाकलाप को दो बार और कीजिए। सुविधा की दृष्टि से, प्रत्येक स्थिति में, आकृति को समान अक्षरों से नामांकित कीजिए तथा आकृतियों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए। अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में लिखिए, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

आकृति	EF	FG	EF – FG
1			
2			
3			

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि, प्रत्येक स्थिति में, EF – FG या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में EF = FG है।

ध्यान दीजिए कि हमने तीन समांतर रेखाएँ l, m और n इस प्रकार ली कि वे तिर्यक रेखा p पर बराबर (समान) अंत:खंड AB और BC काटती हैं। फिर हमने प्राप्त किया कि ये तीनों समांतर रेखाएँ किसी अन्य तिर्यक रेखा q पर भी समान अंत:खंड EF और FG काटती हैं। इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

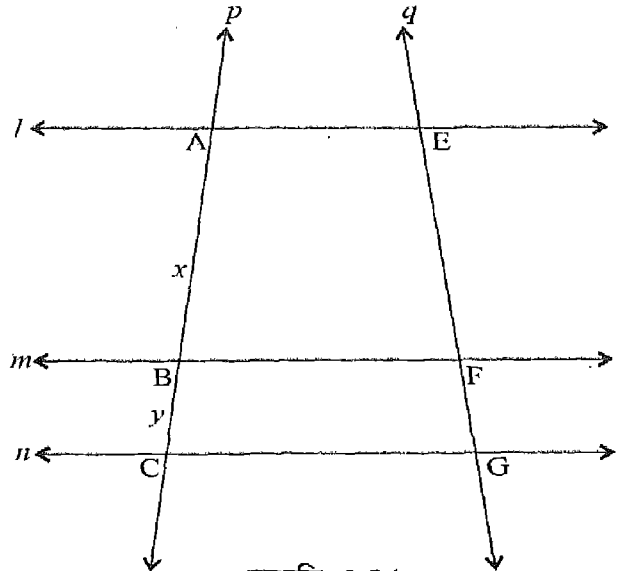
यदि तीन समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक रेखा पर समान अंत:खंड काटती (बनाती) हैं, तो वे किसी अन्य तिर्यक रेखा पर समान अंत:खंड काटेंगी (बनाएँगी)।

ों के लिए भी सत्य है, संख्या तीन से अधिक खंडों की संख्या 2 से आकृति 9.20 में, चार और l_4 तिर्यक रेखा p और CD तथा तिर्यक EF, FG और GH इस = BC = CD है। चूँकि EF = FG है। साथ ही, इसलिए FG = GH BC = CD है, इसलिए स प्रकार, व्यापक रूप के

आकृति 9.20

क समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक रेखा पर समान अंत:खंड काटती हैं, क रेखा पर भी समान अंत:खंड काटेंगी।

ान अंत:खंड गुण (Equal Intercepts Property) कहा जाता है।

त:खंड गुण

रेखा p खींचिए और उस C इस प्रकार लीजिए कि $= y$ cm हो, जहाँ x और जैसे $x = 5$ और $y = 2$ और C से होकर क्रमश: प्रकार खींचिए कि वे प्रकार हमें एक तिर्यक ो तीन समांतर रेखाओं l, : प्रतिच्छेद करती है कि में $\frac{5}{2}$) है।

आकृति 9.21

अब रेखाओं l, m और n को क्रमशः E, F और G पर काटती हुई एक अन्य तिर्यक रेखा q खींचिए। EF और FG को मापिए और फिर $y.\text{EF} - x.\text{FG}$ ज्ञात कीजिए। (अर्थात् वर्तमान स्थिति में $2\text{EF} - 5\text{FG}$ ज्ञात कीजिए)।

x और y में से प्रत्येक के दो अन्य मान लेकर, उपर्युक्त क्रियाकलाप को दोहराइए। सुविधा की दृष्टि से, प्रत्येक स्थिति में आकृति को समान अक्षरों से नामांकित कीजिए तथा आकृतियों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए। अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में लिखिए, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है:

आकृति	EF	FG	x	y	$y.\text{EF}$	$x.\text{FG}$	$y.\text{EF} - x.\text{FG}$
1							
2							
3							

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $y.\text{EF} - x.\text{FG}$ या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में, $y.\text{EF} - x.\text{FG} = 0$ है। दूसरे शब्दों में, $\frac{\text{EF}}{\text{FG}} = \frac{x}{y}$ है, जो $\frac{\text{AB}}{\text{BC}}$ के बराबर है।

ध्यान दीजिए कि हमने तीन समांतर रेखाएँ l, m और n ली हैं जो एक तिर्यक रेखा p पर अंतःखंड AB और BC काटती हैं जो $\frac{x}{y}$ के अनुपात में (वर्तमान स्थिति में $\frac{5}{2}$) है। फिर हमें ज्ञात हुआ कि ये तीनों समांतर रेखाएँ ही किसी अन्य तिर्यक रेखा q पर भी अंतःखंड EF और FG उसी अनुपात $\frac{x}{y}$ में काटती हैं। यह क्रियाकलाप निम्नलिखित गुण प्रदर्शित करता है :

यदि तीन समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा पर एक निश्चित अनुपात में अंतःखंड काटती हैं, तो वे किसी अन्य तिर्यक रेखा पर भी उसी अनुपात में अंतःखंड काटती हैं।

दूसरे शब्दों में, किन्हीं दो तिर्यक रेखाओं को प्रतिच्छेद करने वाली तीन समांतर रेखाएँ उन पर एक ही (समान) अनुपात में अंतःखंड काटती हैं।

वस्तुतः, यह गुण जिसे *समानुपातिक अंतःखंड गुण* (*Proportional Intercepts Property*) कहते हैं, तीन से अधिक समांतर रेखाओं के लिए भी सत्य है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं :

समानुपातिक अंत:खंड गुण :

दो तिर्यक रेखाओं को प्रतिच्छेद करने वाली तीन या अधिक समांतर रेखाएँ उन पर एक ही अनुपात में अंत:खंड काटती हैं।

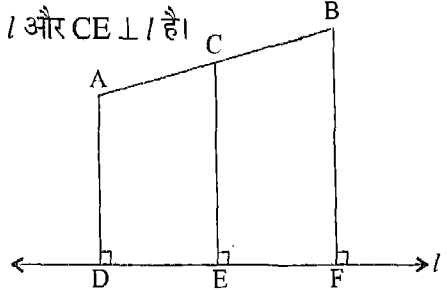
अब हम इन गुणों को स्पष्ट करने के लिए, कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : A और B दो बिंदु हैं जो रेखा l पर स्थित नहीं हैं (आकृति 9.22)। C रेखाखंड AB का मध्य-बिंदु है, $AD \perp l$, $BF \perp l$ और $CE \perp l$ है।

(i) क्या $AD \parallel CE$ है? क्यों?

(ii) क्या $AD \parallel BF$ है? क्यों?

(iii) क्या $AD \parallel CE \parallel BF$ है? क्यों?

(iv) क्या E रेखाखंड DF का मध्य-बिंदु है? क्यों?

आकृति 9.22

हल : (i) $AD \perp l$ और $CE \perp l$ (दिया है)

अत:, $AD \parallel CE$ (एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ)

(ii) $AD \perp l$ और $BF \perp l$ (दिया है)

अत:, $AD \parallel BF$ (एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ)

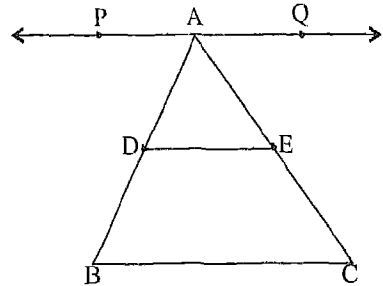
(iii) चूँकि $AD \parallel CE$ और $AD \parallel BF$ है।

अत:, $AD \parallel CE \parallel BF$ (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ)

(iv) तीन समांतर रेखाओं AD, CE और BF के लिए AB एक ऐसी तिर्यक रेखा है कि $AC = CB$ है। (चूँकि C, AB का मध्य-बिंदु है)

अत:, $DE = EF$ (समान अंत:खंड गुण)

अर्थात् E रेखाखंड DF का मध्य-बिंदु है।

उदाहरण 4 : आकृति 9.23 में, ΔABC की भुजा BC के समांतर एक रेखा PAQ है। D भुजा AB का मध्य-बिंदु है और $DE \parallel BC$ है। क्या E भुजा AC का मध्य-बिंदु है?

आकृति 9.23

हल : PAQ ॥ BC और DE ॥ BC (दिया है)

अत:, PAQ, BC और DE ऐसी तीन रेखाएँ हैं जो परस्पर समांतर हैं। (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ)

$AD = DB$ (D भुजा AB का मध्य-बिंदु है)

अत:, $AE = EC$ (समान अंत:खंड गुण)

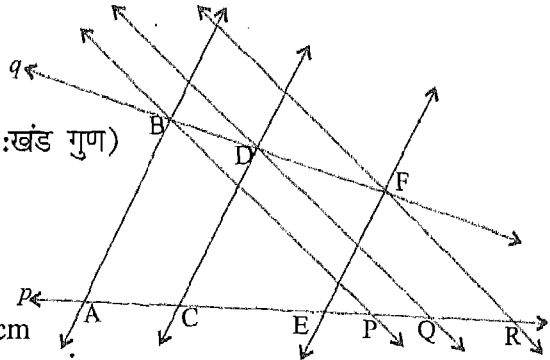
अर्थात् E भुजा AC का मध्य-बिंदु है।

उदाहरण 5 : आकृति 9.24 में, AB ॥ CD ॥ EF है तथा BP ॥ DQ ॥ FR है। यदि AC = 4 cm, CE = 6 cm तथा PQ = 2.4 cm है, तो QR ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{AC}{CE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (दिया है)

अत:, $\frac{BD}{DF} = \frac{2}{3} = \frac{PQ}{QR}$ (समानुपातिक अंत:खंड गुण)

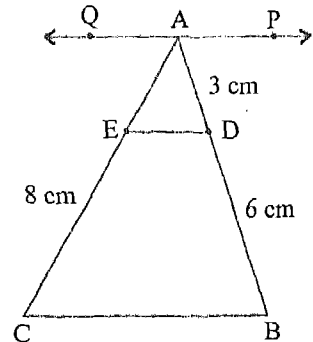
इस प्रकार, $\frac{2.4 \text{ cm}}{QR} = \frac{2}{3}$

या $QR = \frac{3 \times 2.4}{2} \text{ cm} = 3.6 \text{ cm}$

आकृति 9.24

उदाहरण 6 : आकृति 9.25 में, PAQ ॥ DE ॥ BC है। यदि AD = 3cm, DB = 6 cm और EC = 8 cm है, तो AE ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ (समानुपातिक अंत:खंड गुण)

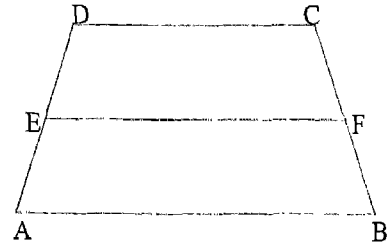
अर्थात् $\frac{AE}{8} = \frac{3}{6} \text{cm}$

या $AE = \frac{8 \times 3}{6} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$

आकृति 9.25

प्रश्नावली 9.2

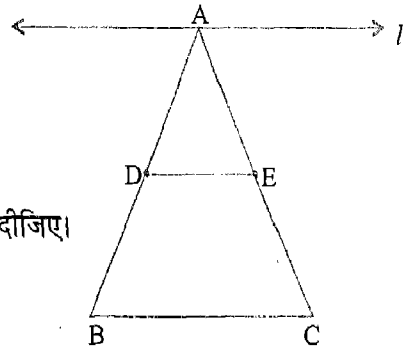
1. आकृति 9.26 में, AB ∥ DC, EF ∥ AB और E रेखाखंड AD का मध्य-बिंदु है।

   (i) क्या AB ∥ EF ∥ DC है? क्यों?

   (ii) क्या F रेखाखंड CB का मध्य-बिंदु है? क्यों?

आकृति 9.26

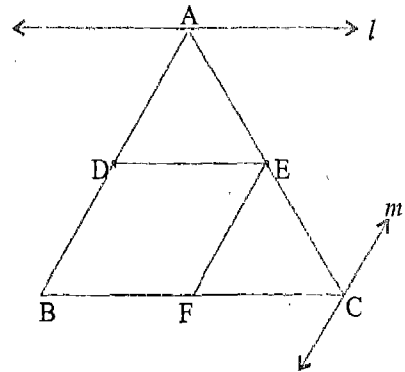
2. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है (आकृति 9.27)। साथ ही, l ∥ DE ∥ BC तथा D भुजा AB का मध्य-बिंदु है।

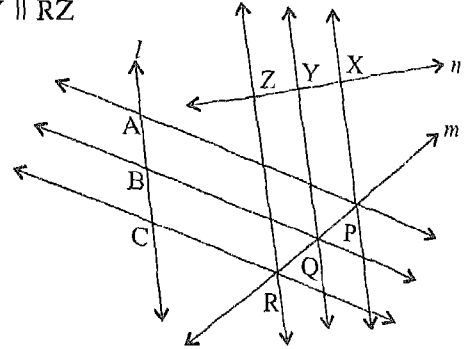
   (i) क्या E भुजा AC का मध्य-बिंदु है? क्यों?

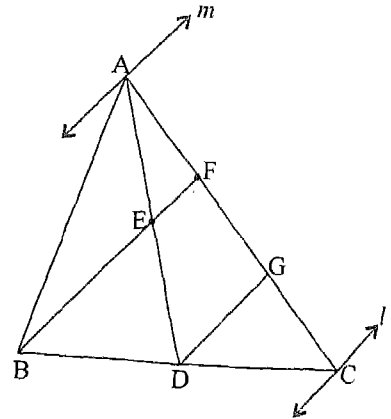
   (ii) क्या Δ ADE भी समद्विबाहु त्रिभुज है? कारण दीजिए।

आकृति 9.27

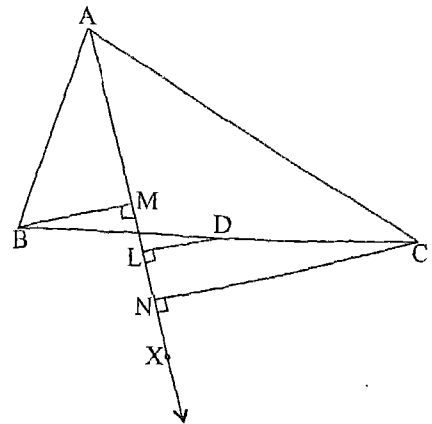
3. आकृति 9.28 में, l ∥ DE ∥ BC, m ∥ EF ∥ AB तथा D रेखाखंड AB का मध्य-बिंदु है।

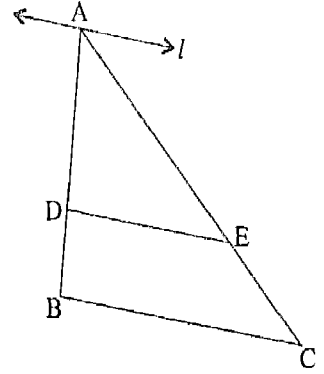
   (i) क्या E रेखाखंड AC का मध्य-बिंदु है? क्यों?

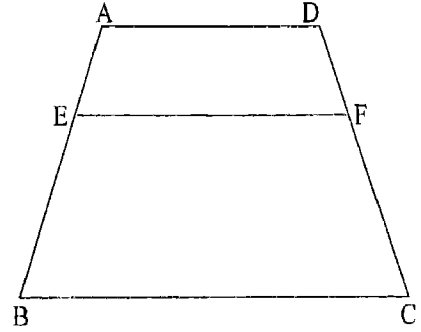
   (ii) क्या F रेखाखंड BC का मध्य-बिंदु है? क्यों?

आकृति 9.28

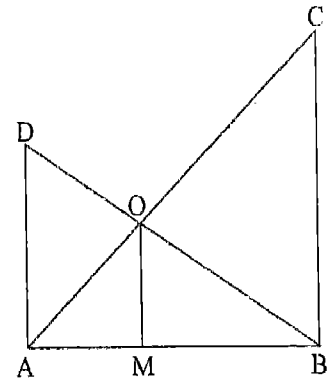
4. आकृति 9.29 में, AP || BQ || CR, PX || QY || RZ तथा AB = BC है। क्या
   (i) PQ = QR है? क्यों?
   (ii) XY = YZ है? क्यों?

आकृति 9.29

5. आकृति 9.30 में, AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है, E रेखाखंड AD का मध्य-बिंदु है तथा l || DG || BF || m है।
   (i) क्या FG = GC है? क्यों?
   (ii) क्या AF = FG है? क्यों?
   (iii) यदि AC = 4.5 cm है, तो AF ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.30

6. त्रिभुज ABC की भुजा BC का मध्य-बिंदु D है तथा किरण AX आकृति 9.31 में दर्शाए अनुसार खींची गई है। BM, CN और DL किरण AX पर लंब खींचे गए हैं जो AX पर क्रमशः M, N और L पर मिलते हैं।
   (i) क्या रेखाओं BM, LD और NC के लिए AX एक तिर्यक रेखा है? क्यों?
   (ii) क्या रेखाओं BM, LD और NC के लिए CB एक तिर्यक रेखा है? क्यों?
   (iii) क्या रेखाएँ BM, LD और NC परस्पर समांतर हैं? क्यों?
   (iv) क्या ML = LN है? क्यों?

आकृति 9.31

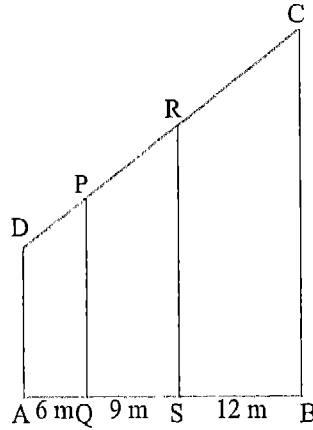
7. आकृति 9.32 में l || ED || CB है। यदि AB = 12 cm, AC = 16 cm और EC = 4 cm है, तो AD ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.32

8. आकृति 9.33 में AD || EF || BC है। यदि EB = 2AE और DF = 1.5 cm है, तो FC की लंबाई ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.33

9. DA, CB और OM में से प्रत्येक रेखाखंड AB पर लंब है, जहाँ O रेखाखंडों AC और DB का प्रतिच्छेद बिंदु है (आकृति 9.34)। यदि OA = 2.4 cm और OC = 3.6 cm है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{AM}{BM}$

(ii) DO, यदि BO = 3 cm है।

आकृति 9.34

10. एक भूखंड ABCD को तीन छोटे भूखंडों AQPD, PQSR और RSBC में विभाजित किया गया है, जैसा कि आकृति 9.35 में दर्शाया गया है। यदि CD = 30 m है तथा DA ∥ PQ ∥ RS ∥ CB है, तो DP, PR और RC की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.35

11. तीन समांतर रेखाएँ l, m और n एक तिर्यक रेखा p से क्रमशः बिंदुओं A, B और C पर इस प्रकार प्रतिच्छेदित हैं कि $AB \neq BC$ है। q एक अन्य तिर्यक रेखा है जो इन तीनों समांतर रेखाओं को क्रमशः D, E और F पर प्रतिच्छेद करती है। क्या DE = EF है? क्यों?

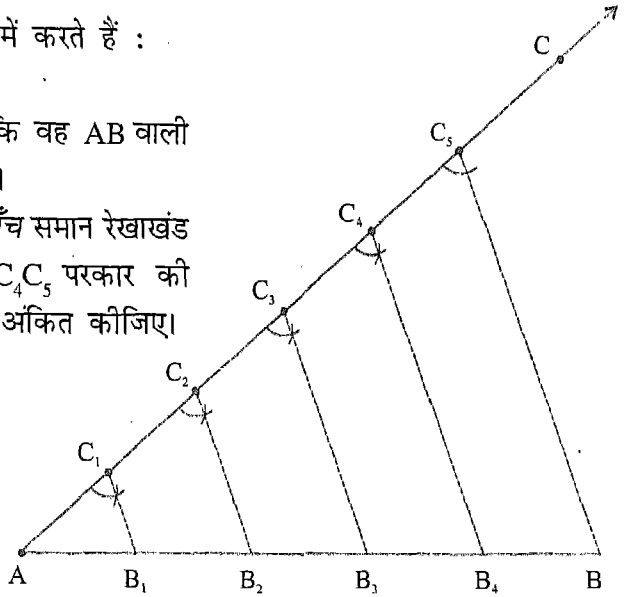
12. तीन समांतर रेखाएँ p, q और r एक तिर्यक रेखा l से क्रमशः बिंदुओं A, B और C पर इस प्रकार प्रतिच्छेदित हैं कि $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ है। m एक अन्य तिर्यक रेखा है जो इन तीनों रेखाओं को क्रमशः P, Q और R पर प्रतिच्छेद करती है। क्या $\frac{PQ}{QR} = \frac{2}{5}$ है? क्यों?

9.7 किसी रेखाखंड को समान भागों में विभाजित करना

पिछली कक्षाओं में, हम एक रेखाखंड को पटरी और परकार की सहायता से दो बराबर भागों में विभाजित करना सीख चुके हैं। आपको याद होगा कि इस तकनीक का प्रयोग करके हम एक रेखाखंड को, मान लीजिए, 4, 8, 16, इत्यादि बराबर (समान) भागों में विभाजित करने में समर्थ हो गए थे। अब हम सीखेंगे कि एक रेखाखंड को पटरी और परकार की सहायता से दिए गए समान भागों में किस प्रकार विभाजित किया जाता है। हम इस प्रक्रिया को एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे। इसके लिए, आप कक्षा VI में सीखी गई आधारभूत रचनाओं का स्मरण करें।

उदाहरण 7 : 8 cm वाले एक रेखाखंड AB को पाँच समान भागों में विभाजित कीजिए।

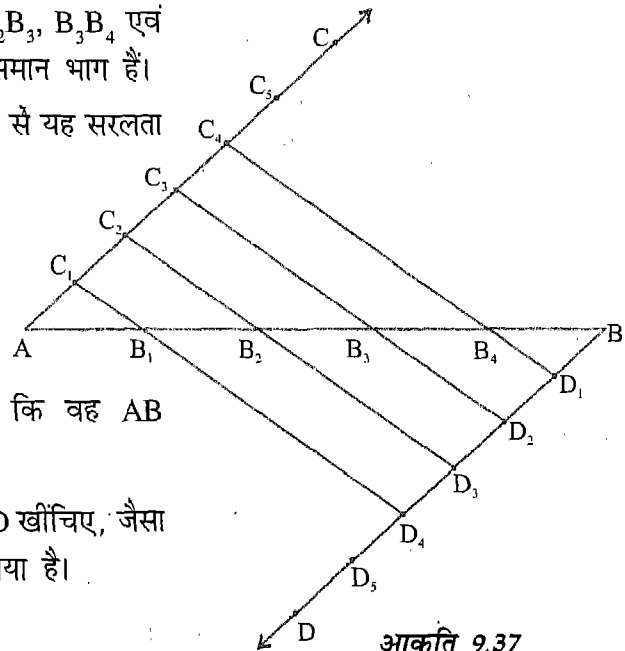
हल : हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

1. AB = 8 cm खींचिए।
2. एक किरण AC ऐसी खींचिए कि वह AB वाली रेखा में न हो (आकृति 9.36)।
3. A से प्रारंभ करते हुए, AC पर पाँच समान रेखाखंड AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4 एवं C_4C_5 परकार की सहायता से किसी भी माप के अंकित कीजिए।
4. C_5B को मिलाइए।
5. बिंदुओं C_1, C_2, C_3 एवं C_4 से होकर C_5B के समांतर रेखाएँ खींचिए जो AB को क्रमशः बिंदुओं B_1, B_2, B_3 एवं B_4 पर प्रतिच्छेद करती हैं।

   तब, रेखाखंड AB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 एवं B_4B ही AB के पाँच वांछित समान भाग हैं।

आकृति 9.36

टिप्पणी : आप समान अंत:खंड गुण से यह सरलता से देख सकते हैं कि $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ है।

वैकल्पिक विधि :

1. AB = 8 cm खींचिए।
2. एक किरण AC ऐसी ख़ींचिए कि वह AB वाली रेखा में न हो।
3. CA के समांतर एक किरण BD खींचिए, जैसा कि आकृति 9.37 में दर्शाया गया है।

आकृति 9.37

4. A से प्रारंभ करते हुए, कोई भी मापन लेकर, AC पर *पाँच* समान रेखाखंड AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4 एवं C_4C_5 अंकित कीजिए।

5. B से प्रारंभ करते हुए, चरण 4 वाले मापन ही लेकर, BD पर *पाँच* समान रेखाखंड BD_1, D_1D_2, D_2D_3, D_3D_4 एवं D_4D_5 अंकित कीजिए।

6. C_1D_4, C_2D_3, C_3D_2 एवं C_4D_1 को मिलाइए जो AB को क्रमशः B_1, B_2, B_3 एवं B_4 पर प्रतिच्छेद करती हैं।

   तब, AB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 एवं B_4B ही AB के वांछित पाँच समान भाग हैं।

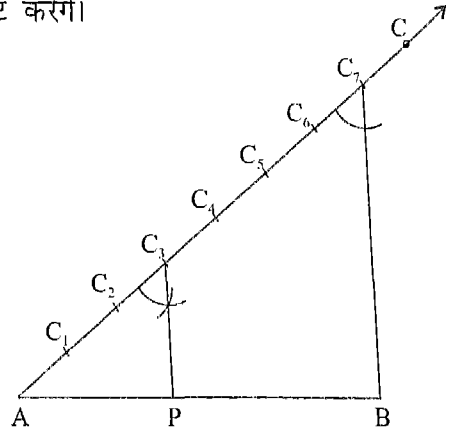
टिप्पणी : AD_5 और C_5B को मिलाकर, आप सरलता से देख सकते हैं कि $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ है।

9.8 किसी रेखाखंड को एक दिए हुए अनुपात में अंतः विभाजित करना

हम इस रचना को पुनः एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 8 : 5 cm लंबाई वाले एक रेखाखंड AB को 3:4 के अनुपात में अंतः विभाजित कीजिए।

हल : हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

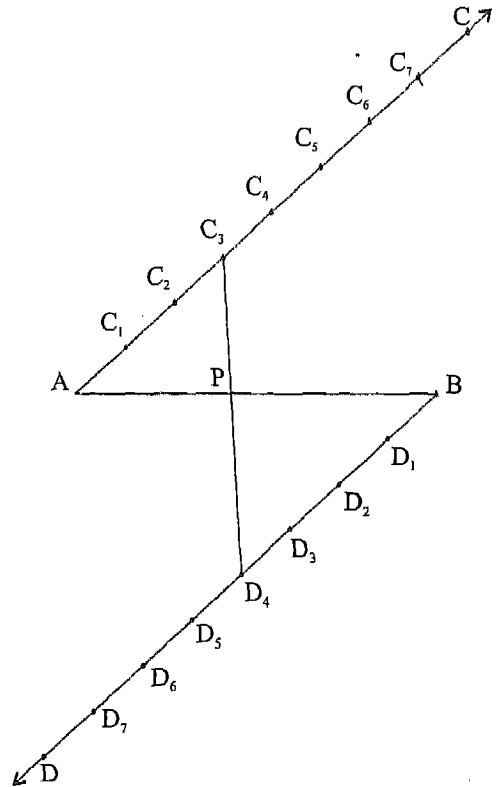
1. 5 cm लंबाई का एक रेखाखंड AB खींचिए।
2. एक किरण AC ऐसी खींचिए कि वह AB वाली रेखा में न हो (आकृति 9.38)।
3. AC पर परकार की सहायता से *सात* (3+4) समान रेखाखंड AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4, C_4C_5, C_5C_6 एवं C_6C_7 अंकित कीजिए।

आकृति 9.38

4. C_7B को मिलाइए।
5. A से प्रारंभ करके अभी खींचे गए *तीन* रेखाखंडों को गिनकर हम C_3 पर पहुँचते हैं। इस बिंदु C_3 से होकर हम C_7B के समांतर एक रेखा खींचते हैं, जो AB को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती है।

तब, P ही वह बिंदु है जो रेखाखंड AB को 3:4 के अनुपात में दो भागों AP और PB में अंत: विभाजित करता है। हम इस रचना की जाँच AP और PB के वास्तविक मापनों द्वारा कर सकते हैं।

टिप्पणी : यह तथ्य कि $\frac{AP}{PB} = \frac{AC_3}{C_3C_7} = \frac{3}{4}$ है, समानुपातिक अंत:खंड गुण से सरलता से प्राप्त हो जाता है।

वैकल्पिक विधि :

1. लंबाई 5 cm का एक रेखाखंड AB खींचिए।
2. एक किरण AC ऐसी खींचिए कि वह AB वाली रेखा में न हो।
3. एक किरण BD, CA के समांतर खींचिए जैसा कि आकृति 9.39 में दर्शाया गया है।
4. A से प्रारंभ करके, परकार की सहायता से, AC पर किसी भी माप के *सात* (3 + 4) समान रेखाखंड AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4, C_4C_5, C_5C_6 एवं C_6C_7 अंकित कीजिए।
5. B से प्रारंभ करके, चरण 4 वाली लंबाई के *सात* (3 + 4) समान रेखाखंड BD_1, D_1D_2, D_2D_3, D_3D_4, D_4D_5, D_5D_6 एवं D_6D_7 किरण BD पर अंकित कीजिए।
6. AC के अनुदिश *तीन* रेखाखंड गिनने पर, हम बिंदु C_3 पर पहुँचते हैं। BD के अनुदिश *चार* रेखाखंड गिनने पर, हम बिंदु D_4 पर पहुँचते हैं। इन बिंदुओं C_3 और D_4 को मिलाने वाला रेखाखंड AB को P पर प्रतिच्छेद करता है। तब P ही वह बिंदु है जो AB को 3:4 के अनुपात में अंत: विभाजित करता है।

आकृति 9.39

टिप्पणी : AD_7 और C_7B को मिलाकर आप सरलता से देख सकते हैं कि

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC_3}{C_3C_7} = \frac{D_7D_4}{D_4B} = \frac{3}{4} \text{ है।}$$

प्रश्नावली 9.3

1. 7.5 cm लंबाई का एक रेखाखंड AB खींचिए और इसे तीन समान भागों में विभाजित कीजिए। प्रत्येक भाग की लंबाई मापिए।

2. 8.5 cm लंबाई का एक रेखाखंड AB खींचिए और इसे पाँच समान भागों में विभाजित कीजिए। प्रत्येक भाग की लंबाई मापिए।

3. 6.6 cm लंबाई का एक रेखाखंड PQ खींचिए। इसे छः समान भागों में विभाजित कीजिए।

4. 12 cm लंबाई का एक रेखाखंड PQ खींचिए और इसे 3 : 5 के अनुपात में अंत: विभाजित कीजिए। मापन द्वारा अपनी रचना की जाँच कीजिए।

5. 10 cm लंबाई का एक रेखाखंड MN खींचिए। इसे 2 : 3 के अनुपात में अंत: विभाजित कीजिए। छोटे भाग को मापिए।

6. 5.6 cm लंबाई का एक रेखाखंड AB खींचिए। AB पर एक बिंदु P ऐसा प्राप्त कीजिए कि $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$ हो। AP और PB को मापिए और अपनी रचना की जाँच कीजिए।

7. 6 cm लंबाई का एक रेखाखंड MN खींचिए। MN पर एक बिंदु P ऐसा प्राप्त कीजिए कि $\frac{MP}{PN} = \frac{1}{2}$ हो। अपनी रचना की जाँच कीजिए।

8. कोई रेखाखंड AB खींचिए। AB पर एक बिंदु P ज्ञात कीजिए कि AP : PB = 2 : 3 हो। AP और PB को मापिए और जाँच कीजिए कि $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$ है।

याद रखने योग्य बातें

1. एक ही रेखा के समांतर दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
2. दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकती।
3. एक ही रेखा पर लंब दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।
4. यदि एक तिर्यक रेखा t दो रेखाओं l और m को भिन्न बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती है, तो यह कहा जाता है कि रेखाएँ l और m रेखा t पर अंत:खंड AB बनाती (काटती) हैं।
5. दो समांतर रेखाएँ उन सभी रेखाओं पर समान (बराबर) अंत:खंड काटती हैं जो उन पर लंब होती हैं।
6. समान अंत:खंड गुण : यदि तीन या अधिक समांतर रेखाएँ एक तिर्यक रेखा पर समान अंत:खंड काटती हैं, तो वे रेखाएँ किसी अन्य तिर्यक रेखा पर भी समान अंत:खंड काटती हैं।
7. समानुपातिक अंत:खंड गुण : तीन या अधिक समांतर रेखाएँ जो दो तिर्यक रेखाओं को प्रतिच्छेद करती हैं उन रेखाओं पर समान अनुपात में अंत:खंड काटती हैं।
8. समान अंत:खंड गुण का प्रयोग करके हम एक दिए हुए रेखाखंड को दिए गए समान भागों में विभाजित कर सकते हैं।
9. समानुपातिक अंत:खंड गुण का प्रयोग करके हम एक दिए हुए रेखाखंड को एक दिए हुए अनुपात में अंत: विभाजित कर सकते हैं।

अध्याय

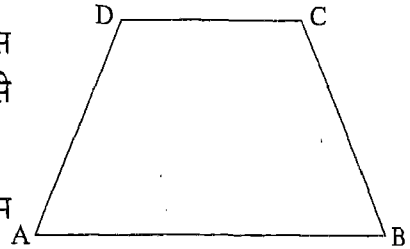
विशेष प्रकार के चतुर्भुज

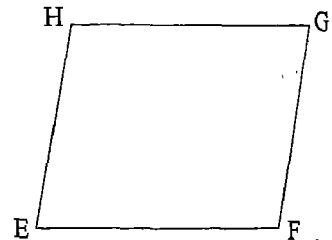
10.1 भूमिका

कक्षा VII में, आप चतुर्भुज, उसकी भुजाओं, कोणों, विकर्णों तथा चतुर्भुज के कोणों के योग से संबंधित एक महत्त्वपूर्ण गुण के बारे में पढ़ चुके हैं। इस अध्याय में, हम कुछ विशेष प्रकार के चतुर्भुजों, जैसे समलंब, समांतर चतुर्भुज, आयत, समचतुर्भुज एवं वर्ग के बारे में अध्ययन करेंगे। हम क्रियाकलापों द्वारा इस प्रकार के चतुर्भुजों के कुछ गुणों का भी अध्ययन करेंगे।

10.2 समलंब और समांतर चतुर्भुज

आकृति 10.1 में दिए चतुर्भुज ABCD को देखिए। इस चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ AB और DC समांतर हैं। इसे *समलंब* (*trapezium*) कहते हैं। इस प्रकार,

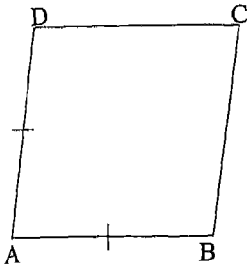
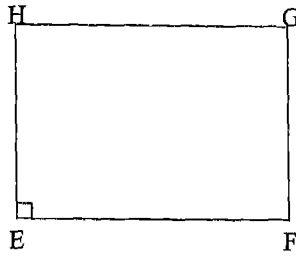
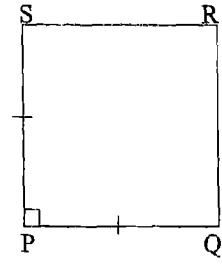
एक चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं के युग्मों में से कम से कम एक भुजाएँ समांतर हों, समलंब कहलाता है।

आकृति 10.1

अब आकृति 10.2 में दिए चतुर्भुज EFGH को देखिए। यह एक समलंब है क्योंकि EF ‖ HG है। यह इसलिए भी समलंब है, क्योंकि EH ‖ FG है। इस प्रकार, यह एक विशिष्ट समलंब है जिसमें सम्मुख भुजाएँ समांतर हैं। इस प्रकार के समलंब को *समांतर चतुर्भुज* (*parallelogram*) कहते हैं। इस प्रकार,

आकृति 10.2

समांतर चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर होती हैं।

टिप्पणी : आप यह सरलता से देख सकते हैं कि प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक समलंब होता है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है अर्थात् प्रत्येक समलंब एक समांतर चतुर्भुज नहीं होता है। उदाहरणार्थ, आकृति 10.1 का समलंब एक समांतर चतुर्भुज नहीं है।

10.3 समचतुर्भुज, आयत और वर्ग

आकृति 10.3 में दिए समांतर चतुर्भुजों को देखिए। आकृति 10.3 (i) में, ABCD एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है, जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ AB और AD बराबर हैं।

आकृति 10.3

इस प्रकार के समांतर चतुर्भुज को *समचतुर्भुज* (*rhombus*) कहते हैं। इस प्रकार,

एक समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर हों समचतुर्भुज कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, समचतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज है जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर होती हैं तथा आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर होती हैं। ध्यान दीजिए कि आकृति 10.2 का समांतर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज नहीं है।

आकृति 10.3 (ii) में, EFGH एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसमें $\angle E = 90°$ है। इस प्रकार के समांतर चतुर्भुज को '*आयत* (*rectangle*) कहते हैं। इस प्रकार,

एक समांतर चतुर्भुज जिसमें एक कोण समकोण हो आयत कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, आयत एक ऐसा चतुर्भुज है जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर होती हैं तथा एक कोण समकोण होता है। ध्यान दीजिए कि आकृति 10.2 का समांतर चतुर्भुज एक आयत नहीं है।

आकृति 10.3 (iii) में, PQRS एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ PQ और PS बराबर है तथा $\angle P = 90°$ है। इस प्रकार के समांतर चतुर्भुज को *वर्ग* (*square*) कहते हैं। इस प्रकार,

एक समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर हों तथा एक कोण समकोण हो वर्ग कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, वर्ग एक ऐसा चतुर्भुज है जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर होती हैं, आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर होती हैं तथा एक कोण समकोण होता है। ध्यान दीजिए कि आकृति 10.3 (i) का समचतुर्भुज एक वर्ग नहीं है तथा आकृति 10.3 (ii) का आयत भी एक वर्ग नहीं है।

उपर्युक्त चर्चा से, हम सरलता से देख सकते हैं कि

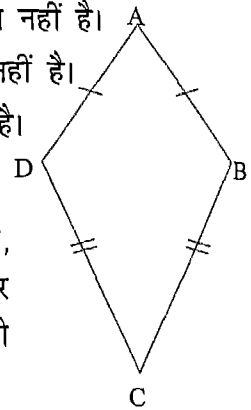
(i) प्रत्येक समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

(ii) प्रत्येक आयत एक समांतर चतुर्भुज है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

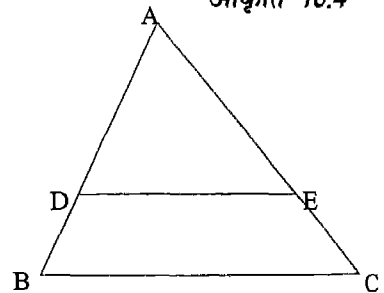
(iii) प्रत्येक वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

(iv) प्रत्येक वर्ग एक समचतुर्भुज है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

(v) प्रत्येक वर्ग एक आयत है, परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

टिप्पणी : आकृति 10.4 को देखिए। यहाँ ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें AD = AB तथा CD = CB है। स्पष्ट है कि यह आकृति ऊपर चर्चित किए गए विशेष प्रकार के चतुर्भुजों से भिन्न है। इस आकृति को एक *पतंग* (*kite*) कहते हैं।

आकृति 10.4

प्रश्नावली 10.1

1. आकृति 10.5 में DE ॥ BC है। BCED किस प्रकार का चतुर्भुज है?

आकृति 10.5

2. एक समलंब एक समांतर चतुर्भुज से किस प्रकार भिन्न है?

3. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। आप इसे क्या विशिष्ट नाम देंगे, यदि निम्नलिखित अतिरिक्त तथ्य ज्ञात हो?

   (i) $AB = AD$ है। (ii) $\angle DAB = 90°$ है।

   (iii) $AB = AD$ और $\angle DAB = 90°$ है।

4. ABCD एक समलंब है, जिसमें $AB \parallel DC$ है। यदि $\angle A = \angle B = 40°$ है, तो अन्य दोनों कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

5. चतुर्भुज PQRS के कोणों P, Q, R और S का अनुपात $1:3:7:9$ है।

   (i) प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए। (ii) क्या PQRS एक समलंब है? क्यों?

   (iii) क्या PQRS एक समांतर चतुर्भुज है? क्यों?

6. निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक के लिए बताइए कि यह कथन सत्य (T) है या असत्य (F) :

   (i) प्रत्येक आयत एक समांतर चतुर्भुज है। (ii) प्रत्येक वर्ग एक आयत है।

   (iii) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है। (iv) प्रत्येक वर्ग एक समचतुर्भुज है।

   (v) प्रत्येक आयत एक वर्ग है। (vi) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक आयत है।

   (vii) प्रत्येक वर्ग एक समांतर चतुर्भुज है। (viii) प्रत्येक समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है।

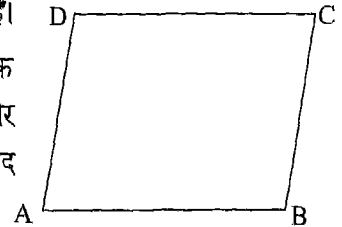
   (ix) प्रत्येक समचतुर्भुज एक वर्ग है। (x) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक वर्ग है।

   (xi) प्रत्येक समांतर चतुर्भुज एक समलंब है। (xii) प्रत्येक समलंब एक समांतर चतुर्भुज है।

   (xiii) प्रत्येक वर्ग एक समलंब है। (xiv) प्रत्येक समलंब एक वर्ग है।

10.4 समांतर चतुर्भुज के गुण

हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज होता है, जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर होती हैं।

आकृति 10.6 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, क्योंकि $AB \parallel DC$ तथा $AD \parallel BC$ है। समांतर चतुर्भुज की भुजाओं और कोणों के विषय में हम और अधिक क्या कह सकते हैं? शायद

आकृति 10.6

सम्मुख भुजाएँ AB और DC बराबर लंबाई की हैं तथा AD और BC भी बराबर लंबाई की हैं। साथ ही, ऐसा प्रतीत होता है कि सम्मुख कोण A और C बराबर माप के हैं तथा ऐसा ही सम्मुख कोणों B और D के मापों के लिए भी है। आइए जाँच करें।

क्रियाकलाप 1 : समांतर रेखाओं का एक युग्म खींचिए। पहले युग्म की समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करते हुए, समांतर रेखाओं का एक अन्य युग्म खींचिए। इस प्रकार प्राप्त समांतर चतुर्भुज को ABCD से नामांकित कीजिए।

इसी प्रकार, दो और समांतर चतुर्भुज खींचिए। इनमें से भी प्रत्येक को ABCD से नामांकित कीजिए। इन तीनों समांतर चतुर्भुजों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

प्रत्येक समांतर चतुर्भुज में AB, BC, CD और DA को मापिए। अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में लिखिए जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

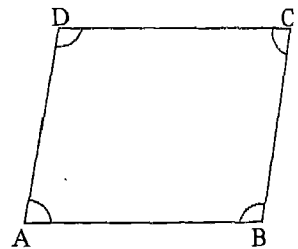
समांतर चतुर्भुज	*सम्मुख भुजाओं का पहला युग्म*			*सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म*		
	AB	DC	AB – DC	AD	BC	AD – BC
1						
2						
3						

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर AB – DC और AD – BC या तो शून्य हैं या इतने कम हैं कि इन्हें छोड़ा जा सकता है। दूसरे शब्दों में,

AB = DC और AD = BC

है। इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

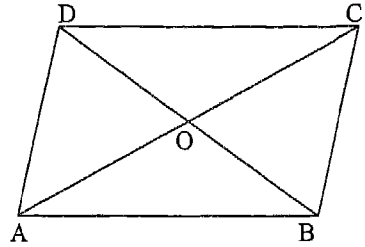
क्रियाकलाप 2 : क्रियाकलाप 1 की तरह, तीन समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए और उन्हें संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए (आकृति 10.7)। इनमें से प्रत्येक समांतर चतुर्भुज में $\angle A$, $\angle C$, $\angle B$ और $\angle D$ को मापिए। अपने प्रेक्षणों को आगे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

आकृति 10.7

समांतर चतुर्भुज	सम्मुख भुजाओं का पहला युग्म			सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म		
	$\angle A$	$\angle C$	$\angle A - \angle C$	$\angle B$	$\angle D$	$\angle B - \angle D$
1						
2						
3						

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर $\angle A - \angle C$ और $\angle B - \angle D$ या तो शून्य हैं या इतने कम हैं कि इन्हें छोड़ा जा सकता है। दूसरे शब्दों में, $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

आकृति 10.8 को देखिए जिसमें समांतर चतुर्भुज ABCD के दोनों विकर्ण AC और BD बिंदु O पर प्रतिच्छेद कर रहे हैं। ऐसा प्रतीत होता है कि O विकर्णों AC और BD दोनों का ही मध्य-बिंदु है। आइए इसकी जाँच करें।

आकृति 10.8

क्रियाकलाप 3 : क्रियाकलाप 1 की तरह, एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए; AC और BD को मिलाइए और मान लीजिए कि इनका प्रतिच्छेद बिंदु O है। दो और समांतर चतुर्भुज खींचिए। इनमें से प्रत्येक समांतर चतुर्भज को ABCD से नामांकित कीजिए। प्रत्येक समांतर चतुर्भुज में AC और BD को मिलाइए तथा इनके प्रतिच्छेद बिंदु को O से अंकित कीजिए। तीनों समांतर चतुर्भुजों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

प्रत्येक आकृति में OA, OC, OB और OD को मापिए। अंतरों OA – OC तथा OB – OD को ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को एक सारणी के रूप में नीचे दर्शाए अनुसार लिखिए :

समांतर चतुर्भुज	पहला विकर्ण AC			दूसरा विकर्ण BD		
	OA	OC	OA – OC	OB	OD	OB – OD
1						
2						
3						

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, OA – OC और OB – OD या तो शून्य हैं या इतने कम हैं कि इन्हें छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में, OA = OC और OB = OD है।

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

अब हम उपर्युक्त प्रेक्षणों का सारांश लिखते हैं :

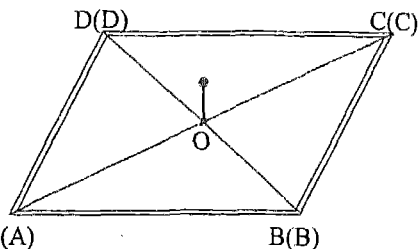
एक समांतर चतुर्भुज में,

(i) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं,

(ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं तथा

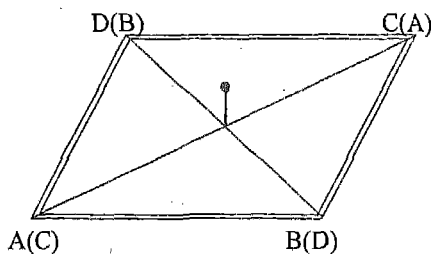
(iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

अब हम समांतर चतुर्भुज के उपर्युक्त तीनों गुणों को प्रदर्शित करने के लिए एक और क्रियाकलाप देते हैं।

क्रियाकलाप 4 : एक गत्ते पर एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए। AC और BD को मिलाकर उनका प्रतिच्छेद बिंदु O प्राप्त कीजिए। एक अक्स कागज (tracing paper) की सहायता से एक अन्य गत्ते में से पहले समांतर चतुर्भुज के सर्वांगसम एक समांतर चतुर्भुज काटिए। इस समांतर चतुर्भुज को भी ABCD से नामांकित कीजिए। मान लीजिए इसके विकर्ण AC और BD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। अब बिंदु O पर एक पिन या कील स्थिर करके दूसरे समांतर चतुर्भुज को पहले समांतर चतुर्भुज पर इस प्रकार रखिए कि संगतता ABCD ↔ ABCD के अंतर्गत एक-दूसरे को पूर्णतया ढक ले (आकृति 10.9)।

D(D) C(C) O A(A) B(B)

आकृति 10.9

आइए अब ऊपरी समांतर चतुर्भुज को बिंदु O के प्रति इस प्रकार घुमाएँ कि इसका शीर्ष A अन्य समांतर चतुर्भुज के शीर्ष C की स्थिति में आ जाए (आकृति 10.10)। घूर्णन करने वाले समांतर चतुर्भुज के शीर्षों B, C और D की स्थितियों का

D(B) C(A) A(C) B(D)

आकृति 10.10

क्या होता है? आप देखेंगे कि शीर्ष B अन्य समांतर चतुर्भुज के शीर्ष D के स्थान पर आ जाता है। इसी प्रकार, C अन्य समांतर चतुर्भुज के शीर्ष A के स्थान पर तथा D अन्य समांतर चतुर्भुज के शीर्ष B के स्थान पर आ जाता है। आप यह भी देख सकते हैं कि इस स्थिति में एक समांतर चतुर्भुज दूसरे समांतर चतुर्भुज को पूर्णतया ढक लेता है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि

(i) $AB = CD$ और $AD = BC$ है,

(ii) $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है तथा

(iii) $OA = OC$ और $OB = OD$ है।

दूसरे शब्दों में, हमने पुनः इसकी जाँच कर ली है कि

(i) समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती है,

(ii) समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं तथा

(iii) समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

आइए, इन परिणामों को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : किसी समांतर चतुर्भुज की एक भुजा 4.8 cm है तथा अन्य भुजा पहली भुजा की $\frac{3}{2}$ गुनी है। इस समांतर चतुर्भुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।

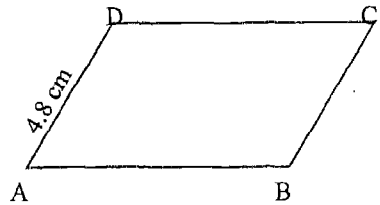
हल : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है (आकृति 10.11)। भुजा $AD = 4.8$ cm है। चूँकि समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं, इसलिए $BC = 4.8$ cm है। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार, समांतर चतुर्भुज की भुजा $AB = \frac{3}{2} \times 4.8 \text{ cm} = 7.2 \text{ cm}$

D C
4.8 cm
A B

आकृति 10.11

इसलिए, सम्मुख भुजा $DC = 7.2$ cm

अतः, समांतर चतुर्भुज का परिमाप $= 4.8 \text{ cm} + 7.2 \text{ cm} + 4.8 \text{ cm} + 7.2 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$

उदाहरण 2 : किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों का अनुपात 1:2 है। समांतर चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है तथा इसके दो आसन्न कोणों B और C का अनुपात 1:2 है (आकृति 10.12)।

$\angle B + \angle C = 180°$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण)

परंतु यह दिया गया है कि

$\angle B : \angle C = 1 : 2$

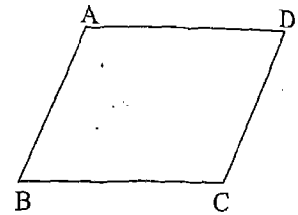
मान लिजिए $\angle B = x$ है। इसलिए, $\angle C = 2x$ है।

अत:, $x + 2x = 180°$

इसलिए, $\angle B = x = \frac{1}{3} \times 180° = 60°$

तथा $\angle C = 2x = \frac{2}{3} \times 180° = 120°$

आकृति 10.12

अत:, $\angle D = \angle B = 60°$ तथा $\angle A = \angle C = 120°$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

प्रश्नावली 10.2

1. किसी समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएँ 4 cm और 3 cm हैं। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

2. किसी समांतर चतुर्भुज के एक कोण का माप 70° है। उसके अन्य कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

3. किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोण बराबर हैं। इस समांतर चतुर्भुज के प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए।

4. किसी समांतर चतुर्भुज की दो भुजाओं का अनुपात 3:5 है तथा उसका परिमाप 48 cm है। इस समांतर चतुर्भुज की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

   [*संकेत :* मान लीजिए दो भुजाएँ $3x$ और $5x$ हैं।]

5. किसी समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों का अनुपात 2:3 है। उसके सभी कोण ज्ञात कीजिए।

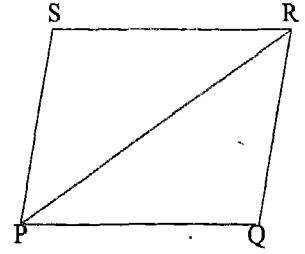
6. किसी समांतर चतुर्भुज का परिमाप 150 cm है। इसकी एक भुजा अन्य भुजा से 25 cm बड़ी है। इस समांतर चतुर्भुज की सभी भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।

7. PR समांतर चतुर्भुज PQRS का एक विकर्ण है (आकृति 10.13)।

   (i) क्या PS = RQ है? क्यों?

   (ii) क्या SR = PQ है? क्यों?

   (iii) क्या PR = RP है? क्यों?

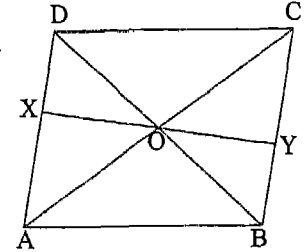
   (iv) क्या Δ PSR $\cong$ Δ RQP है? क्यों?

आकृति 10.13

8. किसी चतुर्भुज के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु एक विकर्ण को 2:3 के अनुपात में विभाजित करता है। क्या यह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज हो सकता है? क्यों?

9. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 10.14)। XY एक ऐसा रेखाखंड है जो O से होकर जाता है तथा X भुजा AD पर स्थित है और Y भुजा BC पर है। निम्न कथनों में से प्रत्येक के लिए कारण दीजिए :

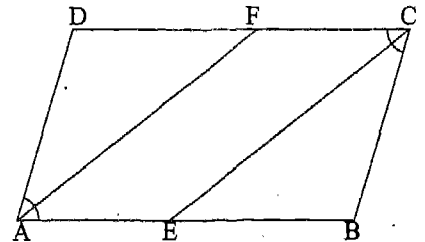
   (i) OB = OD

   (ii) $\angle$ OBY = $\angle$ ODX

   (iii) $\angle$ BOY = $\angle$ DOX

   (iv) Δ BOY $\cong$ Δ DOX

   अब बताइए कि XY बिंदु O पर समद्विभाजित होता है या नहीं।

आकृति 10.14

10. आकृति 10.15 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, CE कोण C को समद्विभाजित करती है तथा AF कोण A को समद्विभाजित करती है। निम्न कथनों में से प्रत्येक के लिए कारण दीजिए :

   (i) $\angle$ BAD = $\angle$ BCD

   (ii) $\angle$ FAB = $\frac{1}{2}$ $\angle$ BAD

   (iii) $\angle$ DCE = $\frac{1}{2}$ $\angle$ BCD

   (iv) $\angle$ FAB = $\angle$ DCE

   (v) $\angle$ DCE = $\angle$ CEB

   (vi) $\angle$ CEB = $\angle$ FAB

आकृति 10.15

(vii) CE || FA

(viii) AE || FC

(ix) AECF एक समांतर चतुर्भुज है।

10.5 समचतुर्भुज के गुण

याद कीजिए कि समचतुर्भुज एक ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है जिसकी आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर होती हैं। आकृति 10.16 में, ABCD एक समचतुर्भुज, अर्थात् ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसमें AB = AD है।

आकृति 10.16

अब समांतर चतुर्भुज के गुणों से, हमें ज्ञात है कि

(i) AB = DC और AD = BC,

(ii) $\angle$ A = $\angle$ C और $\angle$ B = $\angle$ D है।

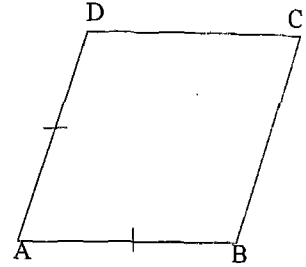
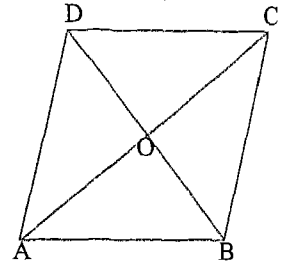
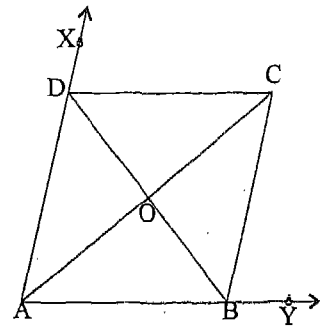
चूँकि AB = AD है, इसलिए उपर्युक्त (i) से, हम सरलता से निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि AB = BC = CD = AD है। दूसरे शब्दों में, *समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।*

अब मान लीजिए कि O एक समचतुर्भुज ABCD के विकर्णों AC और BD का प्रतिच्छेद बिंदु है (आकृति 10.17)। समांतर चतुर्भुज के गुणों से, हम जानते हैं :

आकृति 10.17

OA = OC और OB = OD

विकर्णों AC और BD द्वारा अपने प्रतिच्छेद बिंदु O पर बनाए गए कोणों के बारे में आप क्या कह सकते हैं? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें :

क्रियाकलाप 5 : $\angle$XAY खींचिए। इसकी भुजाओं AX और AY में से क्रमशः रेखाखंड AD और AB इस प्रकार काटिए कि AD = AB हो। D से होकर, एक रेखा AB के समांतर खींचिए तथा B से होकर, एक रेखा AD के समांतर खींचिए जो एक-दूसरे को C पर प्रतिच्छेद करे (आकृति 10.18)। स्पष्ट है कि हमें एक ऐसा समांतर चतुर्भुज ABCD प्राप्त हो गया है, जिसमें AB = AD है। अर्थात् हमें एक समचतुर्भुज ABCD प्राप्त

आकृति 10.18

हो गया है। AC और BD को मिलाइए और उनके प्रतिच्छेद बिंदु को O मानिए। $\angle$ DAB और AB के भिन्न-भिन्न मान लेकर, इसी प्रकार दो अन्य समचतुर्भुज खींचिए। इन समचतुर्भुजों को भी ABCD से नामांकित कीजिए। पहले की तरह, विकर्णों AC और BD के प्रतिच्छेद बिंदु को O से नामांकित कीजिए। समचतुर्भुजों को 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

प्रत्येक स्थिति में, $\angle$BOC और $\angle$COD को मापिए तथा अंतरों $90° - \angle BOC$ और $90° - \angle COD$ को ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

समचतुर्भुज	$\angle$ BOC	$90° - \angle$ BOC	$\angle$ COD	$90° - \angle$ COD
1				
2				
3				

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में अंतर $90° - \angle BOC$ और $90° - \angle COD$ या तो शून्य हैं या इतने कम हैं कि इन्हें छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार,

$\angle BOC = \angle COD = 90°$ है।

अतः, $\angle DOA = \angle BOA = 90°$ (शीर्षाभिमुख कोणों के गुण से)

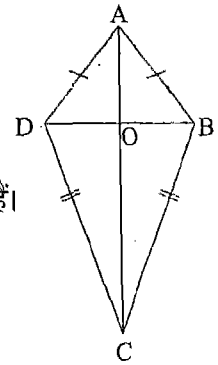
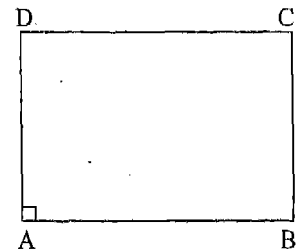
इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

टिप्पणी : याद कीजिए कि वह चतुर्भुज ABCD जिसमें AB = AD और BC = DC हो, एक पतंग कहलाता है (आकृति 10.19)। यहाँ आप देख सकते हैं :
$AC \perp BD$ और $OB = OD$ परंतु $OA \neq OC$

आकृति 10.19

10.6 आयत के गुण

याद कीजिए कि आयत एक ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है, जिसको एक कोण समकोण हो। आकृति 10.20 में, ABCD एक आयत है, अर्थात् एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें $\angle A = 90°$ है। चूँकि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, इसलिए :

आकृति 10.20

$AB = DC, AD = BC,$

$\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$

अब AB ॥ DC तथा AD इनके लिए एक तिर्यक रेखा है।

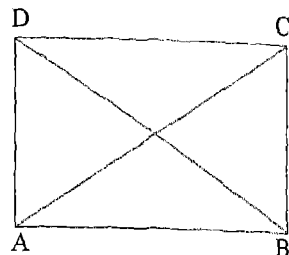
अत:, $\angle A + \angle D = 180^\circ$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण)

परंतु $\angle A = 90^\circ$ है।

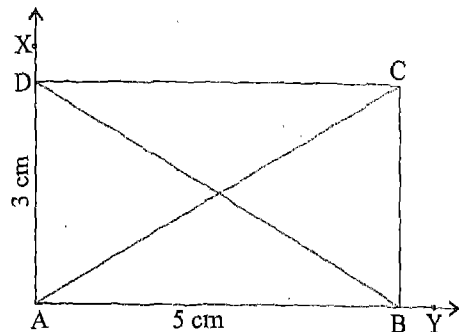
अत:, $\angle D = 90^\circ$ हुआ।

अत:, $\angle B = 90^\circ$ और $\angle C = 90^\circ$

($\angle B = \angle D$ और $\angle A = \angle C$)

अत:, *आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।*

आकृति 10.21

आइए, अब आयत के विकर्णों AC और BD पर विचार करें (आकृति 10.21)। ये समान लंबाई के प्रतीत होते हैं। आइए, इसकी जाँच करें।

क्रियाकलाप 6 : एक समकोण $\angle XAY$ खींचिए तथा इसकी भुजाओं AX और AY में से क्रमशः मान लीजिए, AD = 3 cm और AB = 5 cm काट लीजिए। बिंदुओं D और B से होकर, क्रमश: AB और AD के समांतर रेखाएँ खींचिए जो C पर प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति 10.22)। हमें एक आयत ABCD प्राप्त हो जाता है। AC और BD को मिलाइए।

आकृति 10.22

AB और AD की भिन्न-भिन्न लंबाइयाँ लेकर दो और आयत खींचिए। इन आयतों को भी ABCD से नामांकित कीजिए तथा इनके विकर्ण AC और BD खींचिए। इन आयतों को 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

प्रत्येक स्थिति में, AC और BD को मापिए तथा अंतर AC – BD ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दी हुई एक सारणी के रूप में लिखिए :

आयत	*विकर्ण* AC	*विकर्ण* BD	AC – BD
1			
2			

आप क्या देखतें हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर $AC - BD$ या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, $AC = BD$ है।

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

आयत के विकर्ण बराबर होते हैं।

10.7 वर्ग के गुण

आकृति 10.23

याद कीजिए कि वह समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर हों तथा एक कोण समकोण हो वर्ग कहलाता है।

आकृति 10.23 में, ABCD एक वर्ग है, अर्थात् एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें $AB = AD$ तथा $\angle A = 90°$ है।

अब ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें $AB = AD$ है। इसलिए ABCD एक **समचतुर्भुज है।** अतः इसमें $AB = BC = DC = AD$, $AC \perp BD$, $OA = OC$ और $OB = OD$ है (आकृति 10.24)।

आकृति 10.24

साथ ही, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें $\angle A = 90°$ है।

इसलिए, यह एक आयत हुआ।

अतः, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ और $AC = BD$ होगा।

सारांश रूप में, एक वर्ग में,

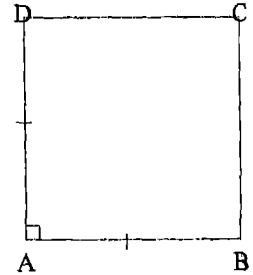
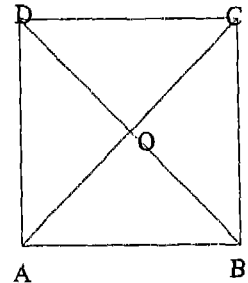
(i) सभी भुजाएँ समान (बराबर) लंबाई की होती हैं,

(ii) सभी कोण समकोण होते हैं,

(iii) विकर्ण बराबर लंबाई के होते हैं तथा

(iv) विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

उपर्युक्त गुणों को स्पष्ट करने के लिए अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : किसी समचतुर्भुज के विकर्णों AC और BD की लंबाइयाँ क्रमशः 6 cm और 8 cm हैं। इस समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए समचतुर्भुज के विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को बिंदु O पर समद्विभाजित करते हैं (आकृति 10.25)।
अब AC = 6 cm और BD = 8 cm है।

अतः, $OA = \frac{1}{2} AC = \frac{6}{2}$ cm = 3 cm है तथा

$OB = \frac{1}{2} BD = \frac{8}{2}$ cm = 4 cm है (विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं)

अब $\angle AOB = 90°$ (समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब होते हैं)

आकृति 10.25

इसलिए, $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)

$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

या $AB = \sqrt{25} = 5$

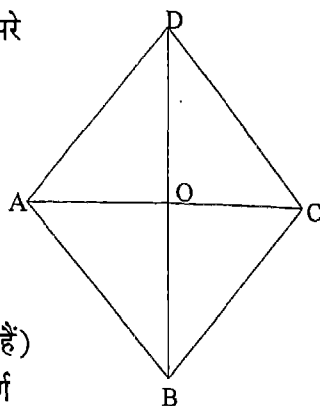
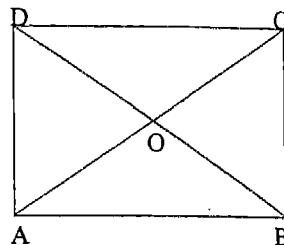
अतः, समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 5 cm है।

उदाहरण 4 : आयत ABCD के विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 10.26)। यदि OA = 5 cm है, तो AC और BD ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.26

हल : OA = 5 cm अतः AC = 2OA = 2 × 5 cm = 10 cm (विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं)

साथ ही, AC = BD (आयत के विकर्ण बराबर होते हैं)

अतः, BD = 10 cm है।

प्रश्नावली 10.3

1. समचतुर्भुज के लिए, निम्न में से कौन-से कथन सत्य हैं?
   (i) इसमें समांतर रेखाओं के दो युग्म हैं।
   (ii) इसमें बराबर कोणों के दो युग्म हैं।
   (iii) इसमें बराबर भुजाओं के केवल दो युग्म हैं।
   (iv) इसके दो कोण समकोण हैं।

(v) इसके विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

(vi) इसके विकर्ण बराबर हैं और परस्पर लंब है।

(vii) इसकी सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की हैं।

2. आयत के लिए, निम्न में से कौन-से कथन सत्य हैं?

(i) इसमें बराबर लंबाई वाली सम्मुख भुजाओं के दो युग्म हैं।

(ii) इसकी सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की हैं।

(iii) इसके विकर्ण बराबर हैं।

(iv) इसके विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

(v) इसके विकर्ण परस्पर लंब हैं।

(vi) इसके विकर्ण बराबर हैं और परस्पर लंब हैं।

(vii) इसके विकर्ण परस्पर लंब हैं और समद्विभाजित करते हैं।

(viii) इसके विकर्ण बराबर हैं और परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

(ix) इसके विकर्ण बराबर हैं, परस्पर लंब हैं और समद्विभाजित करते हैं।

(x) इसके सभी कोण बराबर हैं।

3. उपर्युक्त प्रश्न 2 में आयत के स्थान पर वर्ग लेकर उन्हीं प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

4. एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब नहीं हैं। क्या यह एक समचतुर्भुज है? क्यों?

5. AC एक आयत ABCD का विकर्ण है।

(i) क्या $BC = DA$ है? क्यों

(ii) क्या $AB = CD$ है? क्यों

(iii) क्या $\angle B = \angle D$ है? क्यों

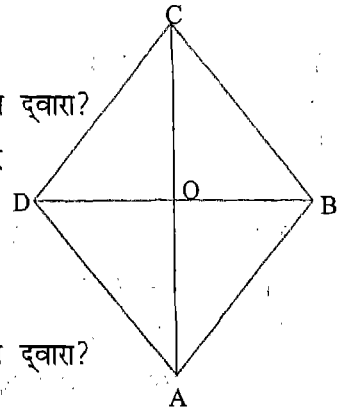
(iv) क्या $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ है? किस सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा?

6. ABCD एक समचतुर्भुज है और इसके विकर्ण परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 10.27)।

(i) क्या $OB = OD$ है? क्यों?

(ii) क्या $BC = DC$ है? क्यों?

(iii) क्या $\Delta BOC \cong \Delta DOC$ है? किस सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा?

(iv) क्या $\angle BCO = \angle DCO$ है? क्यों?

आकृति 10.27

(v) क्या Δ BAO $\cong$ Δ DAO है? किस सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा?

(vi) क्या $\angle$ BAO = $\angle$ DAO है? क्यों?

(vii) क्या समचतुर्भुज का विकर्ण AC कोण A और C को समद्विभाजित करता है? क्यों?

7. समचतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC उसकी भुजा BC के बराबर है (आकृति 10.28)। इस समचतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.28

8. चतुर्भुज के आकार की एक खिड़की के फ्रेम (frame) का एक विकर्ण दूसरे विकर्ण से अधिक लंबा है। क्या यह फ्रेम आयत के आकार का है? क्यों?

9. आकृति 10.29 में, ABCD एक आयत है। क्रमश: शीर्षों B और D से विकर्ण AC पर दो लंब BM और DN हैं।

आकृति 10.29

(i) क्या AB = CD है? क्यों?

(ii) क्या $\angle$ BMA = $\angle$ DNC है? क्यों?

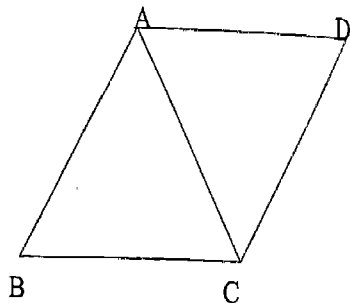
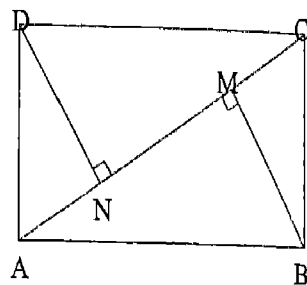
(iii) क्या $\angle$ BAM = $\angle$ DCN है? क्यों?

(iv) क्या Δ BMA $\cong$ Δ DNC है? किस सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा?

(v) क्या BM = DN है? क्यों?

10. किसी चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब हैं। क्या यह चतुर्भुज सदैव एक समचतुर्भुज है? यदि आपका उत्तर *'नहीं'* है, तो एक आकृति खींचकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

11. किसी समचतुर्भुज के विकर्ण बराबर हैं। क्या यह समचतुर्भुज एक वर्ग भी है?

12. किसी चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हैं। क्या यह चतुर्भुज सदैव एक आयत है? यदि आपका उत्तर *'नहीं'* है? तो एक आकृति खींचकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. एक चतुर्भुज जिसके दो सम्मुख भुजाएँ समांतर हों, समलंब कहलाता है।
2. वह चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्मों की भुजाएँ समांतर हों, समांतर चतुर्भुज कहलाता है।
3. वह समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर हों, समचतुर्भुज कहलाता है। वास्तव में, समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।
4. वह समांतर चतुर्भुज जिसमें एक कोण समकोण हो, आयत कहलाता है। वास्तव में, आयत के सभी कोण समकोण होते हैं।
5. वह समांतर चतुर्भुज जिसमें आसन्न भुजाओं के एक युग्म की भुजाएँ बराबर हों तथा एक कोण समकोण हों, वर्ग कहलाता है। वास्तव में, वर्ग की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं तथा सभी कोण समकोण होते हैं।
6. एक समांतर चतुर्भुज में,
   (i) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं,
   (ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं तथा
   (iii) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
7. समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
8. आयत के विकर्ण बराबर होते हैं तथा परस्पर समद्विभाजित करते हैं।
9. वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं तथा परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

अध्याय

11

चतुर्भुजों की रचना

11.1 भूमिका

कक्षा VII में आप चतुर्भुजों के बारे में पढ़ चुके हैं। पिछले अध्याय में आप विशेष प्रकार के चतुर्भुजों एवं उनके गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में हम कुछ दिए हुए माप के चतुर्भुजों की रचना करना सीखेंगे। आपको याद होगा कि कक्षा VII में आप निम्नलिखित सरल स्थितियों में त्रिभुजों की रचना करना सीख चुके हैं :

(i) जब उसकी दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत कोण दिया हो।

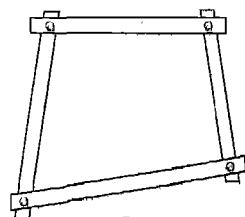
(ii) जब उसके दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दी हुई हो।

(iii) जब उसकी सभी तीन भुजाएँ दी हुई हों।

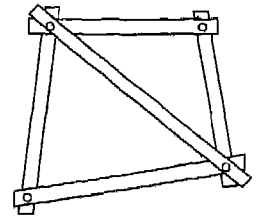
(iv) जब त्रिभुज समकोण त्रिभुज हो तथा कर्ण और एक भुजा दी हुई हो।

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में, एक त्रिभुज के तीन विशिष्ट भागों के माप, उस त्रिभुज की रचना करने के लिए पर्याप्त थे। साथ ही, एक ही मापों से खींचे गए दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, अर्थात् एक–दूसरे की कार्बन प्रतिलिपि होते हैं। दूसरे शब्दों में, किसी त्रिभुज के तीन उपयुक्त माप दिए हों, तो त्रिभुज की रचना अद्‌वितीय रूप से की जा सकती है।

एक चतुर्भुज की अद्‌वितीय रूप से रचना करने के लिए, हमें कितने मापों की आवश्यकता है? हम कल्पना कर सकते हैं कि चतुर्भुज के चार भागों की जानकारी होने पर हम उसकी रचना अद्‌वितीय रूप से कर सकते हैं। परंतु यह सत्य नहीं है। हम इसे एक क्रियाकलाप द्‌वारा स्पष्ट करते हैं :

क्रियाकलाप : उपर्युक्त लंबाइयों वाली गत्ते की चार पट्‌टियाँ लीजिए, जिनके सिरों पर छेद हुए हों। इन पट्‌टियों को सिरों पर जोड़कर एक चतुर्भुज बनाइए; जैसा कि आकृति 11.1 में दर्शाया

आकृति 11.1

गया है। अब दो सम्मुख कोनो (शीर्षों) को दबाकर इस चतुर्भुज के आकार को बदलने का प्रयत्न कीजिए। आप देखेंगे कि आप सरलता से इस आकार को बदलकर एक अन्य चतुर्भुज प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार, चार भुजाओं की मापों से दो भिन्न चतुर्भुज बनाए जा सकते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि चार भुजाओं की मापों से हम एक चतुर्भुज बना भी लें, तो भी यह चतुर्भुज अद्‌वितीय नहीं होगा।

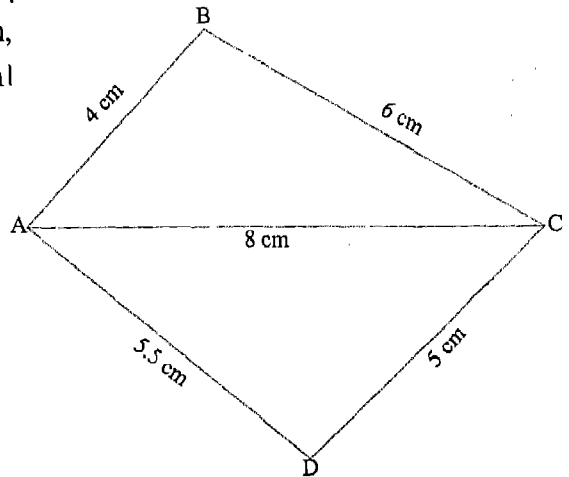
अब एक और पट्‌टी लीजिए तथा इसे पहले बनाए गए चतुर्भुज में एक विकर्ण की तरह जोड़िए, जैसा कि आकृति 11.2 में दिखाया गया है। अब इस चतुर्भुज का आकार बदलने का प्रयत्न कीजिए। आप क्या देखते हैं? अब आप ऐसा करने में समर्थ नहीं हो पाएँगे। इससे यह प्रदर्शित होता है कि एक चतुर्भुज की अद्‌वितीय रूप से रचना करने के लिए कम से कम उसके पाँच भागों (इस स्थिति में चार भुजाएँ और एक विकर्ण) की आवश्यकता होती है। इस अध्याय में हम कुछ सरल स्थितियों में चतुर्भुजों की रचना करेंगे। निस्संदेह, प्रत्येक स्थिति में, हमें चतुर्भुज के पाँच विशिष्ट भागों के मापों की आवश्यकता होगी। हम इन रचनाओं को विशिष्ट उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

आकृति 11.2

11.2 चतुर्भुज की रचना जब उसका एक विकर्ण और चारों भुजाएँ दी हुई हों

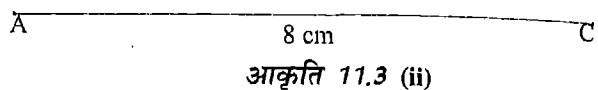
दिया है : चतुर्भुज ABCD की चार भुजाएँ AB = 4 cm, BC = 6 cm, CD = 5 cm, AD = 5.5cm और एक विकर्ण AC = 8 cm।

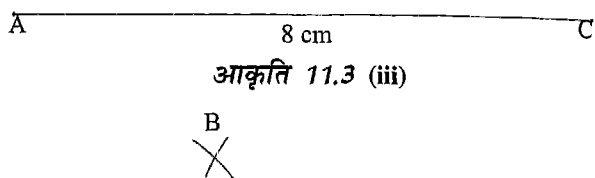
रचना करनी है : उपर्युक्त चार भुजाओं और एक विकर्ण वाले चतुर्भुज की।

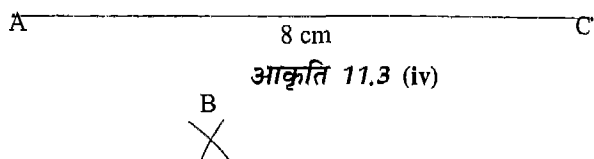
पहले हम हाथ से चतुर्भुज ABCD की एक अनुमानित आकृति (rough figure) बनाते हैं तथा चारों भुजाओं और एक विकर्ण की मापों को दर्शाते हैं [आकृति 11.3 (i)]।

B, A, C, D, 4 cm, 6 cm, 8 cm, 5.5 cm, 5 cm

आकृति 11.3 (i)

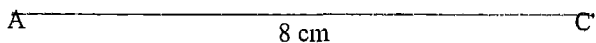
रचना के चरण :

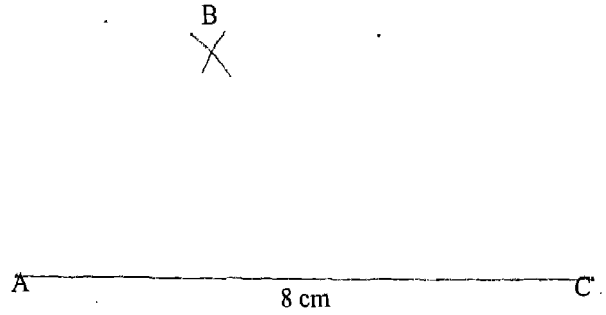
1. AC = 8 cm खींचिए [आकृति 11.3 (ii)]।

आकृति 11.3 (ii)

2. A को केंद्र मानकर और AB (= 4 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए [आकृति 11.3 (iii)]

आकृति 11.3 (iii)

3. C को केंद्र मानकर और BC (= 6 cm) त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप खींचिए जो चरण 2 वाले चाप को B पर प्रतिच्छेद करे [आकृति 11.3 (iv)]।

आकृति 11.3 (iv)

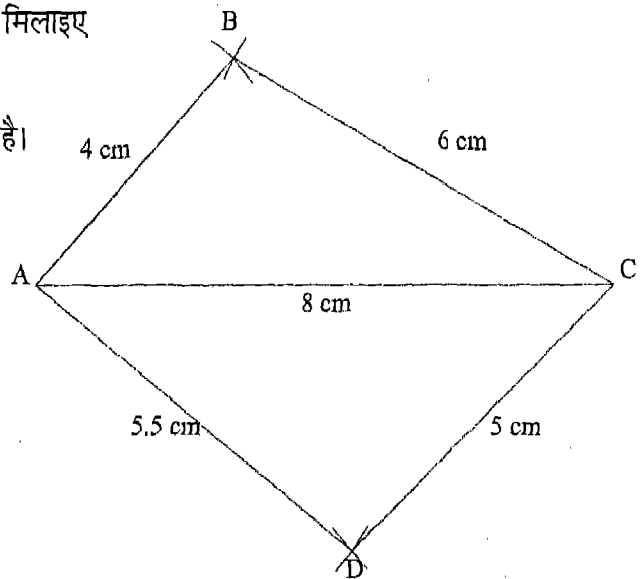
4. A को केंद्र मानकर और AD (= 5.5 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप इस प्रकार खींचिए कि यह चाप और बिंदु B, AC के विपरीत ओर स्थित हों [आकृति 11.3 (v)]।

A 8 cm C

आकृति 11.3 (v)

5. C को केंद्र मानकर और CD (= 5 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो चरण 4 वाले चाप को बिंदु D पर प्रतिच्छेद करे [आकृति 11.3 (vi)]।

आकृति 11.3 (vi)

6. AB, BC, AD और CD को मिलाइए [आकृति 11.3 (vii)]।

तब, ABCD वांछित चतुर्भुज है।

B
4 cm
6 cm
A
C
8 cm
5.5 cm
5 cm
D

आकृति 11.3 (vii)

टिप्पणी : चतुर्भुज की अनुमानित आकृति खींचकर और उसकी भुजाओं और विकर्ण की मापों को दर्शाने से, रचना के लिए अपनाए जाने वाले चरणों का सुझाव मिलता है। स्पष्ट है कि माप ऐसे होने चाहिए कि त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक हो। उदाहरणार्थ, AB + BC > AC तथा AD + DC > AC अवश्य ही सत्य होना चाहिए। (क्यों?)

उदाहरणार्थ, यदि AB = 5 cm, BC = 3.5 cm, CD = 5 cm, DA = 3 cm तथा AC = 8.5 cm हो, तो चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव नहीं है। यह इस कारण कि AD + CD (3 cm + 5 cm) < AC (8.5 cm) है।

प्रश्नावली 11.1

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 4.5 cm, BC = 4 cm, CD = 6.5 cm, DA = 3 cm और BD = 6.5 cm है।
2. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 3 cm, QR = 5 cm, QS = 5 cm, PS = 4 cm और SR = 4 cm है।
3. भुजा 4.5 cm और एक विकर्ण 6 cm वाले एक समचतुर्भुज की रचना कीजिए।
4. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 3.5 cm, BC = 4 cm और AC = 6.5 cm है।
5. क्या ऐसे चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव है, जिसमें AB = 3 cm, BC = 4 cm, CD = 5.5 cm, DA = 6 cm और BD = 9 cm है? यदि नहीं, तो कारण दीजिए।
6. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 cm, BC = 4 cm, AD = 3 cm, CD = 6 cm और BD = 5 cm है।

11.3 चतुर्भुज की रचना जब उसकी तीन भुजाएँ और दोनों विकर्ण दिए गए हैं

दिया है : चतुर्भुज ABCD की तीन भुजाएँ BC = 4.5 cm, AD = 5.5 cm, CD = 5 cm और दोनों विकर्ण AC = 5.5 cm एवं BD = 7 cm ।

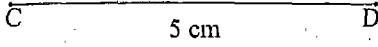
रचना करनी है : इन तीनों भुजाओं और दोनों विकर्णों वाले चतुर्भुज की।

पहले हम चतुर्भुज ABCD की एक अनुमानित आकृति बनाते हैं और तीनों भुजाओं एवं दोनों विकर्णों की मापों को दर्शाते हैं [आकृति 11.4 (i)] ।

आकृति 11.4 (i)

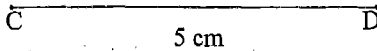
रचना के चरण:

1. CD = 5 cm खींचिए [आकृति 11.4 (ii)] ।

C 5 cm D

आकृति 11.4 (ii)

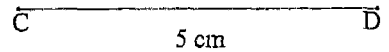
2. C को केंद्र मानकर और CB (= 4.5 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए [आकृति 11.4 (iii)]।

B

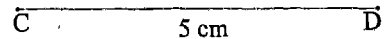
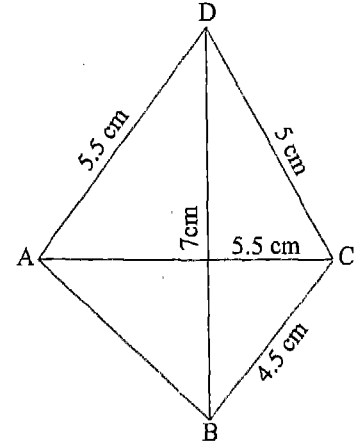
C 5 cm D

आकृति 11.4 (iii)

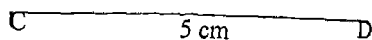
3. D को केंद्र मानकर और BD (= 7 cm) त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप खींचिए जो चरण 2 के चाप को B पर काटे [आकृति 11.4 (iv)] ।

B

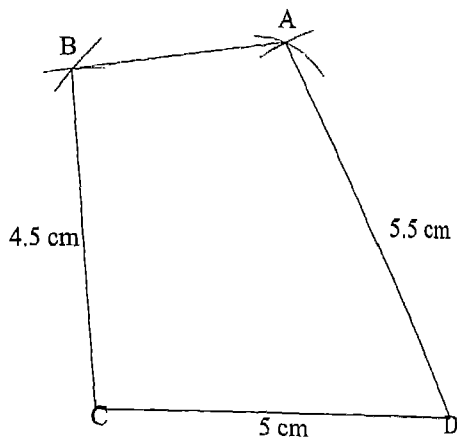
C 5 cm D

आकृति 11.4 (iv)

4. C को केंद्र मानकर और AC (= 5.5 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप CD के उसी ओर खींचिए जिस ओर B है [आकृति 11.4 (v)] ।

C 5 cm D

आकृति 11.4 (v)

5. D को केंद्र मानकर और AD (= 5.5 cm) त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो चरण 4 वाले चाप को A पर काटे [आकृति 11.4 (vi)] ।

आकृति 11.4 (vi)

6. DA, AB और BC को मिलाइए [आकृति 11.4 (vii)] ।

तब, ABCD वांछित चतुर्भुज है।

आकृति 11.4 (vii)

टिप्पणी : 1. चतुर्भुज ABCD की अनुमानित आकृति बनाने और विभिन्न मापों को दर्शाने से हम देखते हैं कि Δ ADC और Δ BDC की रचना के लिए सभी माप ज्ञात हैं और इनमें CD एक उभयनिष्ठ भुजा है। इससे रचना के चरणों का सुझाव मिलता है। स्पष्ट है कि ये लंबाइया ऐसी होनी चाहिए कि $CB + BD > CD$ और $CA + AD > CD$ हो। (क्यों?)

2. विकर्णों को दिखाना आवश्यक नहीं है। वांछित आकृति चतुर्भुज ABCD है, जिसमें केवल चार रेखाखंड AB, BC, CD और DA सम्मिलित हैं।

प्रश्नावली 11.2

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 4 cm, BC = 3 cm, AD = 2.5 cm, AC = 4.5 cm और BD = 4 cm है।

2. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें BC = 7.5 cm, AC = AD = 6 cm, CD = 5 cm और BD = 10 cm है।

3. क्या चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव है, जिसमें AB = 3 cm, CD = 3 cm, DA = 7.5 cm, AC = 8 cm और BD = 4 cm है? यदि नहीं, तो कारण दीजिए।

4. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 7 cm, AD = 6 cm, AC = 7 cm, BD = 7.5 cm और BC = 4 cm है।

5. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = AD = 3 cm, BC = 2.5 cm, AC = 4 cm और BD = 5 cm है।

6. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें QR = 7.5 cm, RP = PS = 6 cm, RS = 5 cm और QS = 10 cm है।

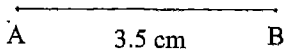
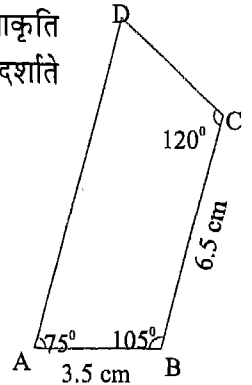
11.4 दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोण दिए होने पर चतुर्भुज की रचना

दिया है : चतुर्भुज ABCD की दो आसन्न भुजाएँ AB = 3.5 cm, BC = 6.5 cm तथा तीन कोण $\angle A = 75°$, $\angle B = 105°$ और $\angle C = 120°$ है।

रचना करनी है : इन दो आसन्न भुजाओं और तीन कोणों वाले चतुर्भुज की।

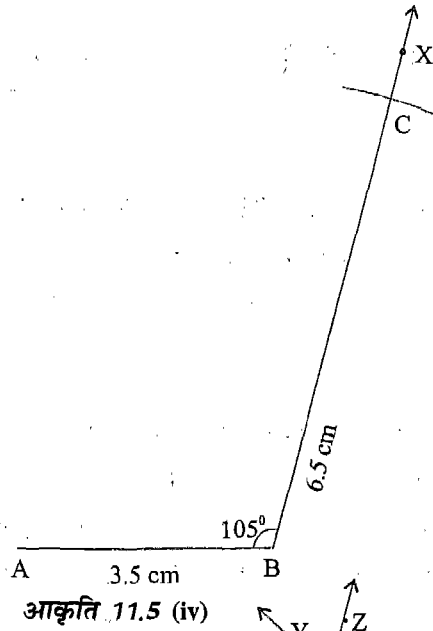
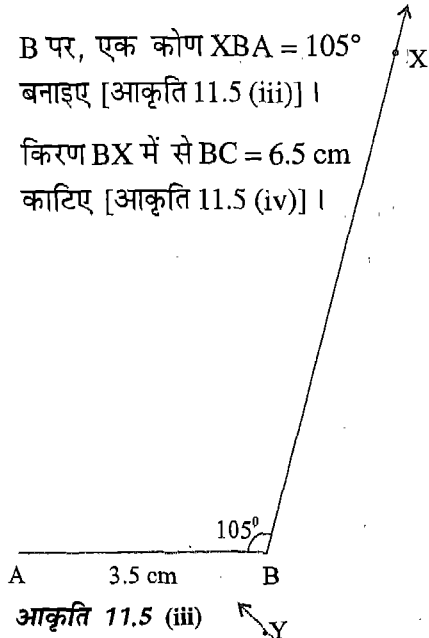
पहले हम हाथ से चतुर्भुज ABCD की एक अनुमानित आकृति बनाते हैं तथा दोनों आसन्न भुजाओं और तीनों कोणों की मापों को दर्शाते हैं [आकृति 11.5 (i)]।

रचना के चरण :

1. AB = 3.5 cm खींचिए [आकृति 11.5 (ii)] ।

आकृति 11.5 (ii)

आकृति 11.5 (i)

2. B पर, एक कोण $XBA = 105°$ बनाइए [आकृति 11.5 (iii)]।

3. किरण BX में से $BC = 6.5$ cm काटिए [आकृति 11.5 (iv)]।

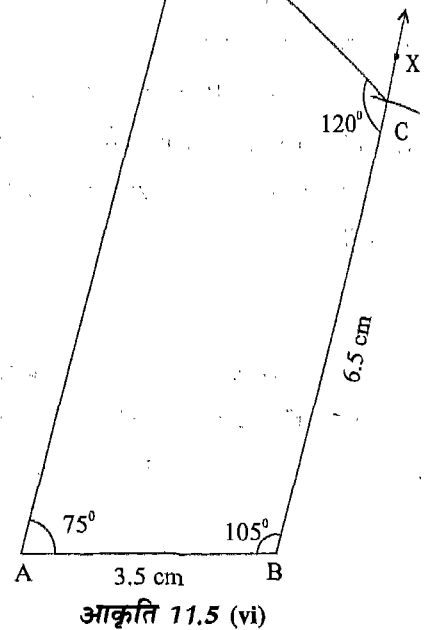
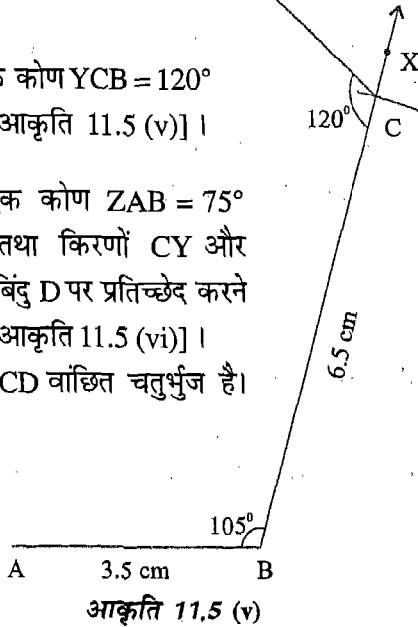
आकृति 11.5 **(iii)**

आकृति 11.5 **(iv)**

4. C पर, एक कोण $YCB = 120°$ बनाइए [आकृति 11.5 (v)]।

5. A पर, एक कोण $ZAB = 75°$ बनाइए तथा किरणों CY और AZ को बिंदु D पर प्रतिच्छेद करने दीजिए [आकृति 11.5 (vi)]।

तब, ABCD वांछित चतुर्भुज है।

आकृति 11.5 **(v)**

आकृति 11.5 **(vi)**

टिप्पणी : हम जानते हैं कि एक चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 होता है। अतः, चतुर्भुज की संभव रचना के लिए उसके तीन कोणों (यहाँ $\angle A, \angle B$ और $\angle C$) का योग $360°$ से कम होना चाहिए।

उदाहरणार्थ, उस चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव नहीं है जिसमें BC = 9.5 cm, $\angle A = 75°$, $\angle B = 150°$, AB = 6 cm और $\angle C = 140°$ है। इसका कारण है कि यहाँ $\angle A + \angle B + \angle C (= 75° + 150° + 140°) > 360°$ है।

प्रश्नावली 11.3

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5.5 cm, BC = 4 cm, $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$ और $\angle C = 105°$ है।
2. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 3.5 cm, QR = 6.5 cm, $\angle P = 100°$, $\angle R = 110°$ और $\angle S = 75°$ है। [*संकेत:* $\angle Q = 360° - (100° + 110° + 75°)$]
3. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 6 cm, BC = 5 cm, $\angle A = 55°$, $\angle B = 110°$ और $\angle D = 90°$ है।
4. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें BC = 5.5 cm, CD = 4 cm, $\angle A = 70°$, $\angle B = 110°$ और $\angle D = 85°$ है।
5. क्या उस चतुर्भुज ABCD की रचना करना संभव है, जिसमें AB = 5 cm, BC = 7.5 cm, $\angle A = 80°$, $\angle B = 140°$ और $\angle C = 145°$ है? यदि नहीं, तो कारण दीजिए।
6. 4.5 cm और 6 cm भुजाओं वाले आयत की रचना कीजिए।
7. एक समांतर चतुर्भुज की रचना कीजिए, जिसकी दो भुजाएँ और कोण क्रमशः 4 cm, 5.5 cm और $70°$ हैं।

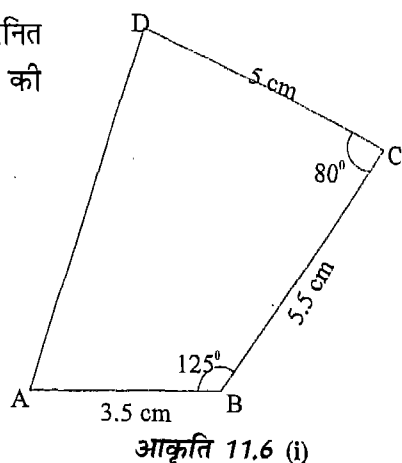
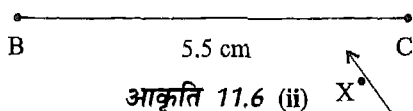
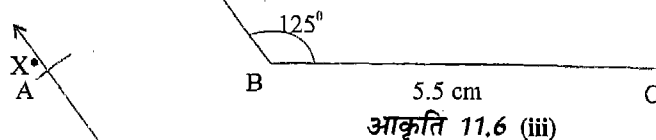
11.5 चतुर्भुज की रचना जब तीन भुजाएँ और दो अंतर्गत कोण दिए गए हों

दिया है : चतुर्भुज ABCD की तीन भुजाएँ AB = 3.5 cm, BC= 5.5 cm, CD = 5 cm तथा उनके दो अंतर्गत कोण $\angle B = 125°$ और $\angle C = 80°$ ।

रचना करनी है : इन तीनों भुजाओं और दो अंतर्गत कोणों वाले चतुर्भुज की।

पहले हम हाथ से चतुर्भुज ABCD की एक अनुमानित आकृति बनाते हैं तथा तीनों भुजाओं और अंतर्गत कोणों की मापों को दर्शाते हैं [आकृति 11.6 (i)]।

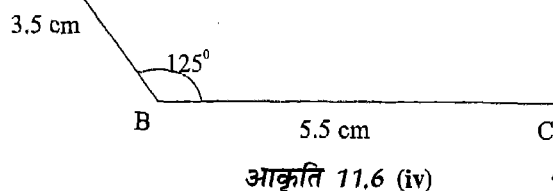
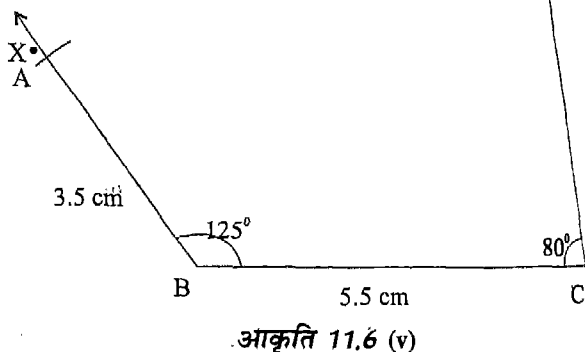
रचना के चरण :

1. BC = 5.5 cm खींचिए [आकृति 11.6(ii)] ।

2. $\angle XBC = 125°$ बनाइए [आकृति 11.6 (iii)]।

3. B को केंद्र मानकर और AB = 3.5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो किरण BX को A पर प्रतिच्छेद करे [आकृति 11.6 (iv)] ।

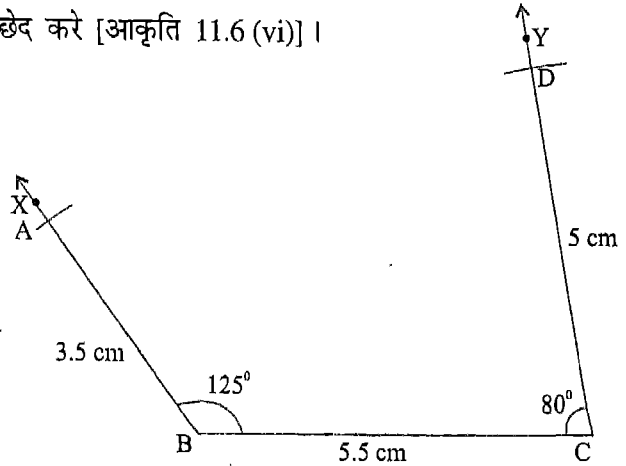
4. C पर, $\angle YCB = 80°$ बनाइए [आकृति 11.6 (v)] ।

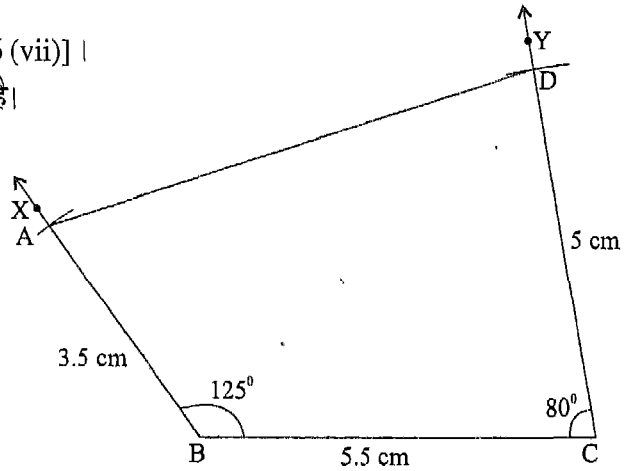
आकृति 11.6 (i)

आकृति 11.6 (ii)

आकृति 11.6 (iii)

आकृति 11.6 (iv)

आकृति 11.6 (v)

5. C को केंद्र मानकर और CD = 5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो किरण CY को D पर प्रतिच्छेद करे [आकृति 11.6 (vi)]।

आकृति 11.6 (vi)

6. AD को मिलाइए [आकृति 11.6 (vii)]।
तब, ABCD वांछित चतुर्भुज है।

आकृति 11.6 (vii)

टिप्पणी : उपर्युक्त चारों स्थितियों के अतिरिक्त भी चतुर्भुज की रचना की जा सकती है, जब कि उसके पाँच उपयुक्त भाग दिए हों। उदाहरणार्थ, यदि चतुर्भुज की चार भुजाएँ और एक कोण दिया हो, तो चतुर्भुज की रचना सरलता से की जा सकती है। परंतु यदि चतुर्भुज के चारों कोण और एक भुजा दी हुई हो, तो चतुर्भुज की रचना अद्‌वितीय रूप से नहीं की जा सकती।

प्रश्नावली 11.4

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 4.5 cm, BC = 3.5 cm, CD = 5 cm, $\angle B = 45°$ और $\angle C = 150°$ है।

2. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 3.5 cm, QR = 2.5 cm, RS = 4 cm, $\angle Q = 75°$ और $\angle R = 120°$ है।

3. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = BC = 3 cm, AD = 5 cm, $\angle A = 90°$ और $\angle B = 105°$ है।

4. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें $\angle Q = 45°$, $\angle R = 90°$, QR = 5 cm, PQ = 4 cm और RS = 3 cm है।

5. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = AD = 5 cm, CD = 5.5 cm, $\angle A = 90°$ और $\angle D = 120°$ है।

6. एक समलंब ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB || CD, AB = 8 cm, BC = 6 cm, CD = 4 cm और $\angle B = 60°$ है।

   [*संकेत* : तथ्य AB || CD का प्रयोग करके $\angle C$ ज्ञात कीजिए।]

याद रखने योग्य बातें

1. किसी चतुर्भुज की अद्‌वितीय रूप से रचना करने के लिए उसके कम से कम पाँच भागों की मापों की जानकारी आवश्यक है।

2. चतुर्भुज के पाँच भागों की माप निम्नलिखित स्थितियों में उसकी रचना करने के लिए पर्याप्त हैं :

   (i) चार भुजाएँ और एक विकर्ण
   (ii) तीन भुजाएँ और दोनों विकर्ण
   (iii) दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोण
   (iv) तीन भुजाएँ और दो अंतर्गत कोण
   (v) चारों भुजाएँ और एक कोण

3. चतुर्भुज की पाँच भागों की माप उसकी रचना करने में पर्याप्त होने के लिए यह आवश्यक है कि जहाँ अनुकूल हों, वे निम्न को भी संतुष्ट करें:

   (i) त्रिभुज का असमिका गुण, अर्थात् त्रिभुज की दो भुजाओं का योग उसकी तीसरी भुजा से अधिक होता है।

   (ii) चतुर्भुज के कोणों का योग गुण।

4. अन्य पर्याप्त मापों वाले चतुर्भुजों की भी रचना की जा सकती है (उपर्युक्त पाँचों सरल स्थितियों के अतिरिक्त), जहाँ पाँच से कम भाग दिए हों, परंतु भागों में अन्य संबंध दिए हुए हों (जैसे चतुर्भुज का समांतर चतुर्भुज या आयत होना, इत्यादि)।

5. यह सदैव सुविधाजनक रहता है कि पहले चतुर्भुज की एक अनुमानित आकृति बना ली जाए और दी हुई मापों को दर्शाया जाए।

अध्याय

12

वृत्त

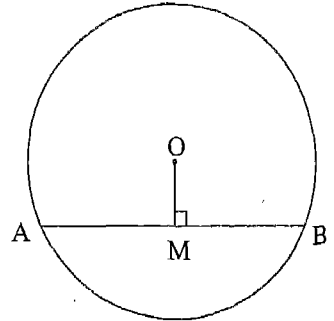
12.1 भूमिका

आप, अपनी पिछली कक्षाओं से, वृत्त एवं संबंधित संकल्पनाओं; जैसे केंद्र, त्रिज्या, व्यास, चाप, अर्धवृत्त, जीवा, वृत्तखंड इत्यादि से पहले ही परिचित हैं। कक्षा VII में, आप वृत्त के निम्नलिखित दो गुणों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं :

1. अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।
2. एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।

इस अध्याय में, हम वृत्त के कुछ और गुणों के बारे में अध्ययन करेंगे। ये गुण केंद्र से जीवा पर डाले गए लंबों, जीवाओं और चापों द्वारा केंद्र या वृत्त के किसी बिंदु पर (अंतरित) बनाए गए कोणों तथा एक चक्रीय चतुर्भुज के कोणों से संबंधित हैं।

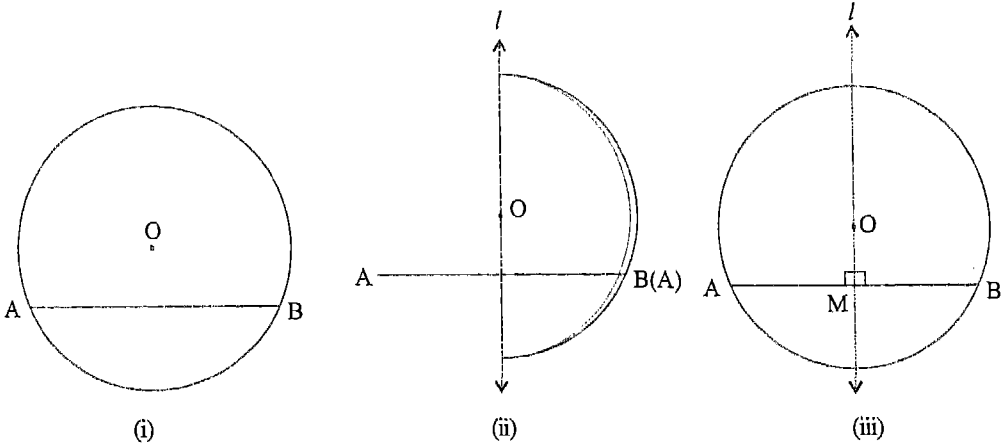
12.2 केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब

क्रियाकलाप 1: केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। साथ ही, इस वृत्त की एक जीवा AB भी खींचिए। $OM \perp AB$ इस प्रकार खींचिए कि M, जीवा AB पर स्थित हो (आकृति 12.1)। भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याएँ लेकर और उनसे दो वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। सुविधा की दृष्टि से, इन तीनों स्थितियों में, केंद्र, जीवा और लंब को क्रमशः O, AB और OM से नामांकित कीजिए। दूसरे शब्दों में, *तीनों आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए।* वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

आकृति 12.1

प्रत्येक स्थिति में, AM और BM, को मापिए तथा अंतर AM – BM ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

वृत्त	AM	BM	AM – BM
1			
2			
3			

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में अंतर AM – BM या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में AM = BM है।

क्रियाकलाप 2 : एक अक्स कागज लीजिए और उस पर केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की जीवा AB भी खींचिए [आकृति 12.2 (i)]।

आकृति 12.2

अब वृत्त को स्वयं वृत्त पर इस प्रकार मोड़िए कि बिंदु A बिंदु B पर पड़े। रेखा l के अनुदिश मोड़ का निशान (crease) प्राप्त करने के लिए कागज को दबाइए [आकृति 12.2 (ii)]। ध्यान दीजिए कि रेखा l केंद्र O से होकर जाती है तथा जीवा AB का एक भाग स्वयं उसी के भाग पर इस प्रकार पड़ता है कि दोनों भाग (एक दूसरे को) परस्पर पूर्णतया ढक लेते हैं।

अब कागज को खोल लीजिए तथा रेखा l और AB के प्रतिच्छेद बिंदु को M से अंकित कीजिए [आकृति. 12.2 (iii)]। अब चूँकि OM स्वयं अपने पर पड़ता है तथा AM, BM के

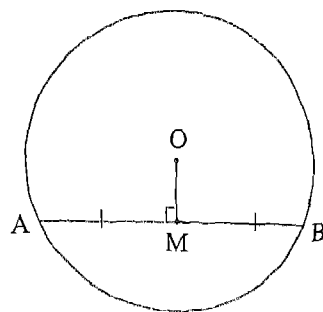
अनुदिश पड़ता है, इसलिए

$$\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ \text{ है, अर्थात् } OM \perp AB \text{ है।}$$

साथ ही, मुड़ी हुई स्थिति में, चूँकि AM, BM के संपाती है, इसलिए AM = BM है।

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलाप निम्न गुण प्रदर्शित करते हैं :

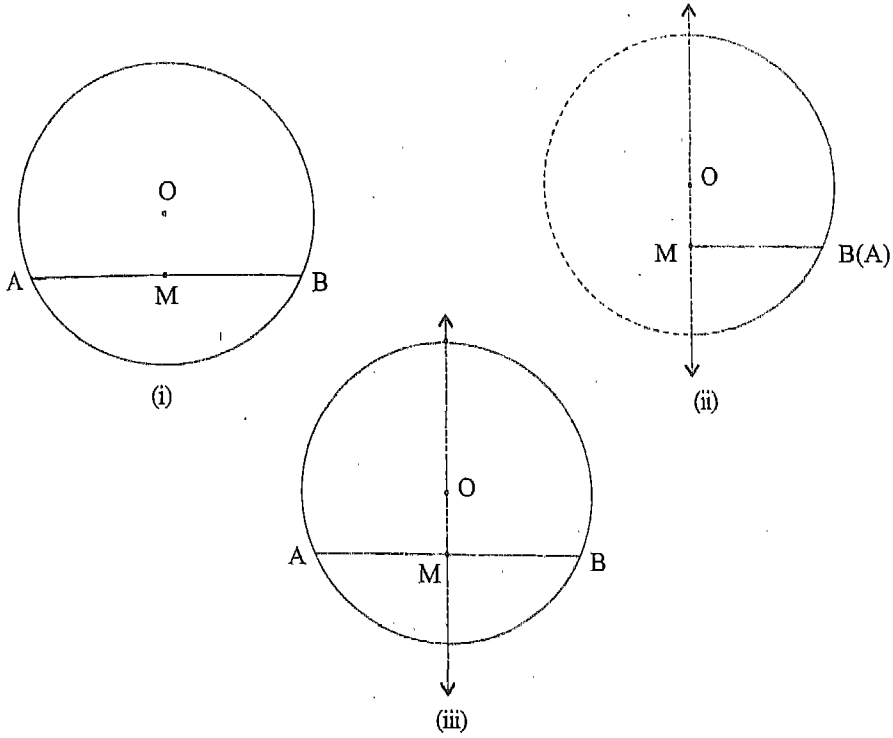
वृत्त में, उसके केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

क्रियाकलाप 3: केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इसकी एक जीवा AB भी खींचिए। AB को M पर समद्विभाजित कीजिए तथा O और M को मिलाइए (आकृति 12.3)। भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं और केंद्रों के दो और वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए। प्रत्येक स्थिति में, $\angle OMA$ को मापिए तथा अंतर $90^\circ - \angle OMA$ ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

आकृति 12.3

वृत्त	$\angle OMA$	$90^\circ - \angle OMA$
1		
2		
3		

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर $90^\circ - \angle OMA$ या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में, $\angle OMA = 90^\circ$ है, अर्थात् $OM \perp AB$ है।

ध्यान दीजिए कि यही परिणाम $\angle OMB$ को मापकर भी प्राप्त किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 4 : एक अक्स कागज लीजिए और उस पर केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की एक जीवा AB खींचिए और उसका मध्य-बिंदु M ज्ञात कीजिए [आकृति 12.4 (i)]।

आकृति 12.4

M और O को मिलाइए। अब रेखा MO के अनुदिश कागज को मोड़िए ताकि बिंदु A बिंदु B पर पड़े तथा AB का एक भाग उसके अन्य भाग पर पड़े [आकृति 12.4 (ii)]।

अब कागज को खोलिए [आकृति 12.4 (iii)]। आप क्या देखते हैं? क्या $\angle OMB$ पर $\angle OMA$ पड़ता है ? आप देखेंगे कि वह $\angle OMB$ पर ही पड़ता है। इस प्रकार,

$$\angle OMA = \angle OMB = 90°$$

अर्थात् $OM \perp AB$

क्रियाकलाप 3 और 4 निम्नलिखित गुण प्रदर्शित करते हैं :

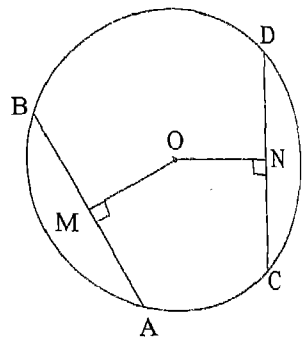
एक वृत्त में, किसी जीवा के मध्य-बिंदु को केंद्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।

टिप्पणी : आप सरलता से देख सकते हैं कि उपर्युक्त गुण, पिछले गुण का *विलोम* है।

12.3 समान जीवाएँ और उनकी केंद्र से दूरियाँ

एक वृत्त में, हम जितनी चाहें जीवाएँ खींच सकते हैं। कुछ जीवाएँ अन्य जीवाओं से लंबी होती हैं। याद कीजिए कि केंद्र से होकर जाने वाली जीवा, अर्थात् वृत्त का व्यास उसकी सबसे लंबी जीवा होती है। जैसे-जैसे हम जीवा को केंद्र से दूर ले जाते हैं; उसकी लंबाई कम होती जाती है।

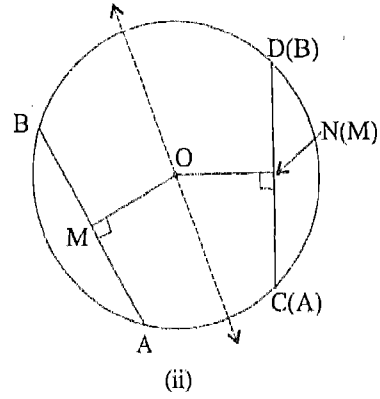
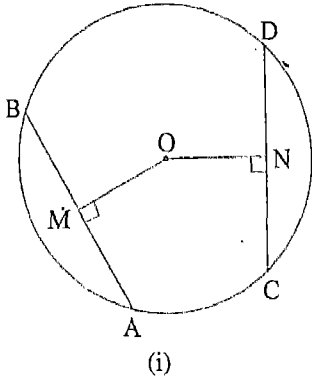
माना कि हमें एक वृत्त की दो समान (बराबर) जीवाएँ प्राप्त हैं। हम केंद्र से इनकी दूरियों के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या वे केंद्र से समान (बराबर) दूरी पर हैं? दूसरी ओर, मान लीजिए कि हमें दो जीवाएँ ऐसी प्राप्त हैं कि वे केंद्र से समान (बराबर) दूरी पर हैं। क्या ये जीवाएँ समान (बराबर) हैं? इन प्रश्नों का उत्तर प्राप्त करने के लिए, आइए कुछ क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 5 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए तथा उसकी दो जीवाएँ AB और CD इस प्रकार खींचिए कि AB = CD हो (आकृति 12.5)। O से AB और CD पर $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ खींचिए ताकि M और N क्रमशः AB और CD पर स्थित हों। भिन्न-भिन्न केंद्रों और त्रिज्याओं को लेकर तथा उनसे दो और वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

आकृति 12.5

प्रत्येक स्थिति में, OM और ON को मापिए तथा अंतर OM – ON ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

वृत्त	OM	ON	OM – ON
1			
2			
3			

आप क्या देखतें हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर OM – ON या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में OM = ON है।

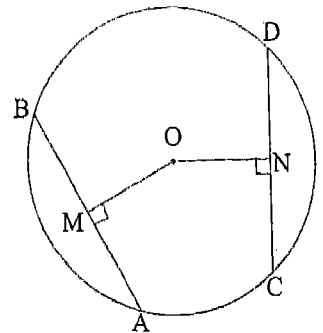
क्रियाकलाप 6 : एक अक्स कागज लीजिए और उस पर केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की दो समान (बराबर) जीवाएँ AB और CD खींचिए। केंद्र O से OM ⊥ AB और ON ⊥ CD इस प्रकार खींचिए कि M और N क्रमश: AB और CD पर स्थित हों [आकृति 12.6 (i)]। बिंदु O से होकर जाती हुई रेखा के अनुदिश कागज को इस प्रकार मोड़िए कि बिंदु A बिंदु C पर पड़े तथा बिंदु B बिंदु D पर पड़े [आकृति 12.6 (ii)]। M का क्या होता है? क्या वह N पर पड़ता है? हाँ, वह N पर ही पड़ता है। इस प्रकार, OM = ON है।

(i)

(ii)

आकृति 12.6

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलाप निम्न गुण प्रदर्शित करते हैं :

वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

क्रियाकलाप 7 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए तथा दो समान रेखाखंड OM और ON इस प्रकार खींचिए कि OM और ON की लंबाइयाँ वृत्त की त्रिज्या से कम हों। M से होकर एक जीवा AB खींचिए तथा N से होकर एक जीवा CD खींचिए कि OM ⊥ AB हो और ON ⊥ CD हो (आकृति 12.7)। भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याएँ लेकर दो और वृत्त खींचिए तथा इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से नामांकित कीजिए।

आकृति 12.7

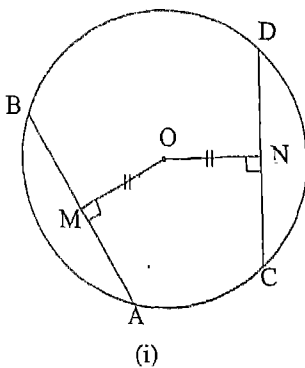
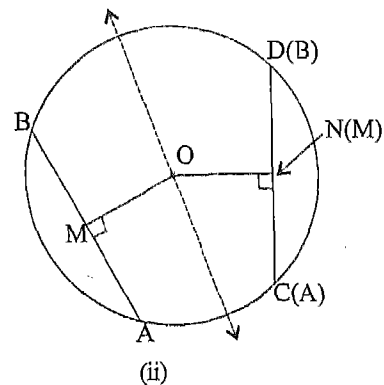
अब AB और CD को मापिए तथा प्रत्येक स्थिति में अंतर AB – CD ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

वृत्त	जीवा AB	जीवा CD	AB – CD
1			
2			
3			

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर AB – CD या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में,

AB = CD है, अर्थात् जीवाएँ समान हैं।

क्रियाकलाप 8 : एक अक्स कागज लीजिए और उस पर केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। अब दो समान रेखाखंड OM और ON इस प्रकार खींचिए कि OM (= ON) की लंबाई वृत्त की त्रिज्या से कम हो। M और N से होकर क्रमशः जीवाएँ AB और CD इस प्रकार खींचिए कि OM $\perp$ AB और ON $\perp$ CD हो [आकृति 12.8 (i)]।

अब कागज को केंद्र O से होकर जाती हुई रेखा के अनुदिश इस प्रकार मोड़िए कि बिंदु M बिंदु N पर पड़े [आकृति 12.8 (ii)] । आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि बिंदु A, बिंदु C पर पड़ता है तथा B, बिंदु D पर पड़ता है। इस प्रकार, AB = CD है।

(i)

(ii)

आकृति 12.8

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलाप निम्न गुण को प्रदर्शित करते हैं :

वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ समान (बराबर) होती हैं।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि यह गुण पिछले गुण का *विलोम* है। अब इन गुणों को स्पष्ट करने के लिए, हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : 10 cm त्रिज्या वाले वृत्त में एक जीवा केंद्र से 6 cm की दूरी पर है। इस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए AB त्रिज्या 10 cm वाले वृत्त की एक जीवा है जो केंद्र O से 6 cm की दूरी पर है। मान लीजिए $OM \perp AB$ है (आकृति 12.9)।

इस प्रकार, $OA = 10$ cm और $OM = 6$ cm है।

अब पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OA^2 = AM^2 + OM^2$$

या $$AM^2 = OA^2 - OM^2$$

$$= (10^2 - 6^2)\text{cm}^2$$

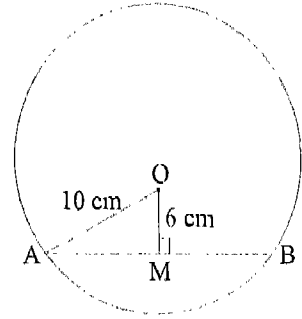
$$= 64\ \text{cm}^2$$

आकृति 12.9

या $$AM = 8\ \text{cm}$$

अब, $AB = 2\ AM$ (केंद्र से डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।)

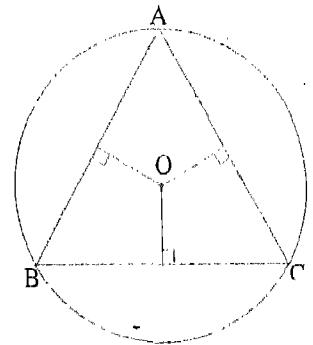
अर्थात् $AB = 2 \times 8$ cm $= 16$ cm

इस प्रकार, वांछित जीवा की लंबाई 16 cm है।

उदाहरण 2 : Δ ABC की भुजाएँ उसके परिवृत्त के केंद्र O से समदूरस्थ हैं (आकृति 12.10)। Δ ABC किस प्रकार का त्रिभुज है?

हल : AB = BC (केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ समान होती हैं।)

इसी प्रकार, BC = CA

इसी प्रकार, AB = BC = CA

अतः, Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

आकृति 12.10

उदाहरण 3: AB और CD केंद्र O वाले वृत्त की दो समान जीवाएँ हैं (आकृति 12.11)। AB और CD को बढ़ाने पर ये वृत्त के बाहर बिंदु S पर मिलती हैं। $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ है, जहाँ M और N क्रमश: AB और CD पर स्थित हैं।

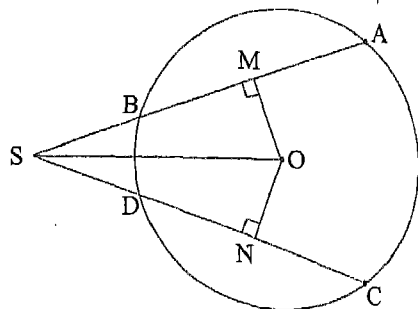
निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

(i) OM = ON

(ii) Δ OMS $\cong \Delta$ ONS

(iii) MS = NS

(iv) AM = CN

(v) AS = CS

आकृति 12.11

हल : (i) OM = ON (समान जीवाएँ केंद्र O से समदूरस्थ होती हैं।)

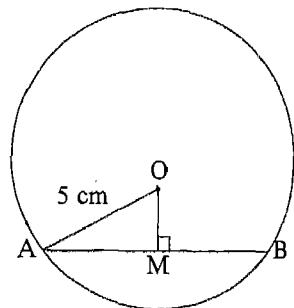
(ii) $\Delta OMS \cong \Delta ONS$ (RHS से, क्योंकि $\angle OMS = \angle ONS = 90°$, OS = OS और OM = ON)

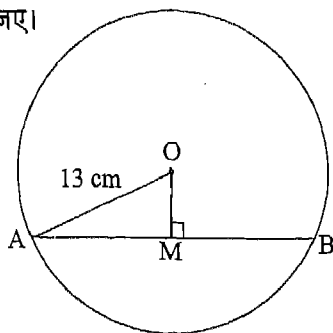
(iii) MS = NS [सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग (Corresponding parts of congruent triangles – CPCT)]

(iv) AM = CN (M और N क्रमश: समान जीवाओं AB और CD के मध्य-बिंदु हैं।)

(v) AS = CS (AS = AM + MS तथा CS = CN + NS है।)

प्रश्नावली 12.1

1. AB केंद्र O और त्रिज्या 5 cm वाले वृत्त की एक जीवा है (आकृति 12.12)। यदि $OM \perp AB$ तथा AB = 8 cm है, तो OM की लंबाई ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.12

2. AB केंद्र O और त्रिज्या 13 cm वाले वृत्त की एक जीवा है (आकृति 12.13)। यदि $OM \perp AB$ तथा OM = 5 cm है, तो जीवा AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.13

3. केंद्र O और त्रिज्या 7.5 cm वाले वृत्त की एक जीवा की लंबाई 9 cm है। इस जीवा की केंद्र से दूरी ज्ञात कीजिए।

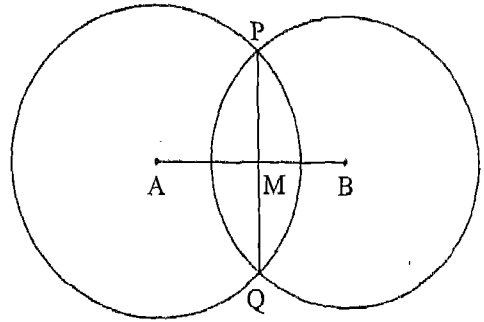
4. त्रिज्या 13 cm वाले वृत्त में एक जीवा केंद्र से 12 cm की दूरी पर खींची गई है। इस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

5. वृत्त की एक जीवा 6 cm लंबी है तथा केंद्र से 4 cm की दूरी पर स्थित है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

6. A, B और C किसी वृत्त पर स्थित तीन बिंदु है जिसका केंद्र अंकित नहीं किया गया है। आप केंद्र को किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

[*संकेत:* यदि M जीवा AB का मध्य-बिंदु है तथा O वृत्त का केंद्र है, तो $OM \perp AB$ होगा।]

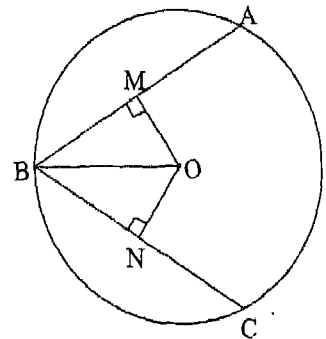
7. केंद्र A और B वाले दो वृत्त एक-दूसरे को बिंदु P और Q पर प्रतिच्छेदित करते हैं तथा M रेखाखंड PQ का मध्य-बिंदु है (आकृति 12.14)। निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

(i) $AM \perp PQ$
(ii) $BM \perp PQ$
(iii) A, M और B संरेख हैं

आकृति 12.14

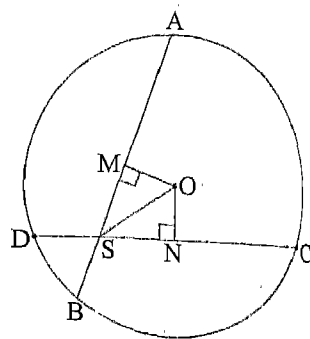
8. AB और BC केंद्र O वाले वृत्त की दो समान जीवाएँ हैं (आकृति 12.15)। $OM \perp AB$ और $ON \perp BC$ है, जहाँ M और N क्रमशः AB और BC पर स्थित हैं। O और B को मिलाया जाता है। निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

(i) $OM = ON$

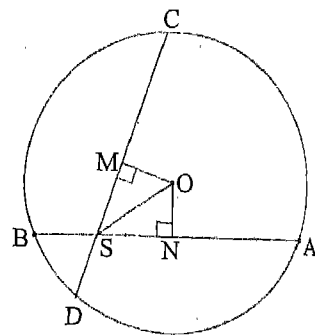
(ii) $\Delta OMB \cong \Delta ONB$

(iii) BO कोण ABC को समद्विभाजित करती है

आकृति 12.15

9. AB और CD केंद्र O वाले वृत्त की दो समान जीवाएँ हैं जो एक-दूसरे को बिंदु S पर प्रतिच्छेदित करती हैं (आकृति 12.16)। $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ है, जहाँ M और N क्रमश: AB और CD पर स्थित हैं। O और S को मिलाया जाता है। निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

    (i) $OM = ON$
    (ii) $\Delta\ OMS \cong \Delta\ ONS$
    (iii) $MS = NS$
    (iv) $AS = CS$
    (v) $BS = DS$

आकृति 12.16

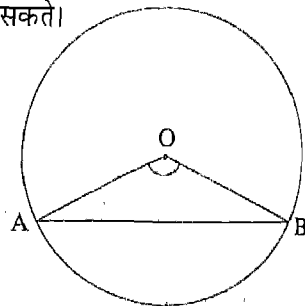
10. केंद्र O वाले वृत्त की जीवाएँ AB और CD बिंदु S पर प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति 12.17)। $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ है, जहाँ M और N क्रमश: AB और CD पर स्थित हैं। OM और ON को मिलाया जाता है। यदि $\angle OSM = \angle OSN$ हो, तो निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

    (i) $\Delta OSM \cong \Delta OSN$
    (ii) $OM = ON$
    (iii) $AB = CD$

आकृति 12.17

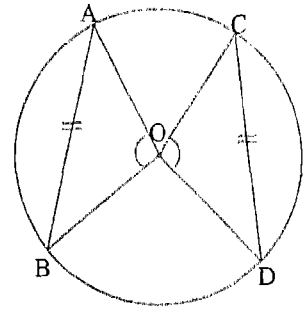
11. बताइए कि निम्न कथन सत्य (T) हैं या असत्य (F) :

    (i) वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।
    (ii) केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ असमान हो सकती हैं।
    (iii) एक वृत्त में, केंद्र को जीवा के मध्य बिंदु से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।
    (iv) कोई भी तीन संरेख बिंदु एक वृत्त पर स्थित नहीं हो सकते।

12.4 समान जीवाओं द्वारा केंद्र पर बनाए गए कोण

आकृति 12.18 में, AB केंद्र O वाले वृत्त की एक जीवा है। $\angle AOB$ जीवा AB द्वारा केंद्र O पर बनाया गया (अंतरित) कोण है। हमारी रुचि यह जानने में हो सकती है कि क्या जीवा AB की लंबाई और उसके द्वारा केंद्र पर बनाए गए कोण में कोई संबंध हो सकता है। आइए इसकी जाँच करें।

आकृति 12.18

आकृति 12.19

क्रियाकलाप 9 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए तथा इसकी दो समान जीवाएँ AB और CD खींचिए। OA, OB, OC और OD को मिलाइए (आकृति 12.19)।

भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याओं वाले दो अन्य वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए। ∠AOB और ∠COD को मापिए तथा प्रत्येक स्थिति में अंतर ∠AOB – ∠COD ज्ञात कीजिए।

अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

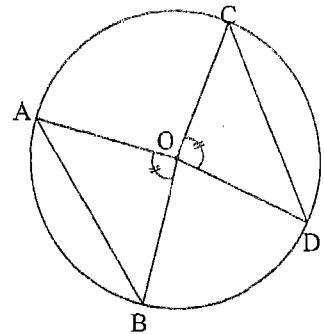
वृत्त	∠AOB	∠COD	∠AOB – ∠COD
1			
2			
3			

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर ∠AOB – ∠COD या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में, ∠AOB = ∠COD है।

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण बनाती (अंतरित करती) हैं।

आकृति 12.20

क्रियाकलाप 10 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की चार त्रिज्याएँ OA, OB, OC और OD इस प्रकार खींचिए कि ∠AOB = ∠COD हो। AB और CD को मिलाइए (आकृति 12.20)।

भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याओं वाले दो वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

AB और CD को मापिए तथा प्रत्येक स्थिति में अंतर AB – CD ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

वृत्त	AB	CD	AB – CD
1			
2			
3			

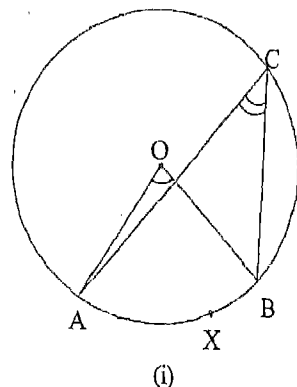
आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर AB – CD या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में AB = CD है।

इस क्रियाकलाप से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

केंद्र पर समान कोण बनाने वाली जीवाएँ समान होती हैं।

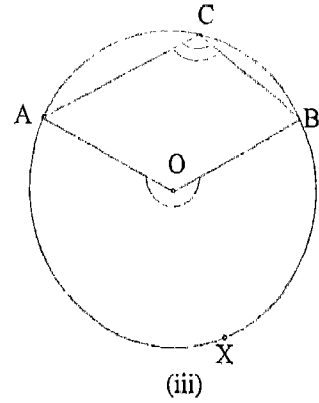
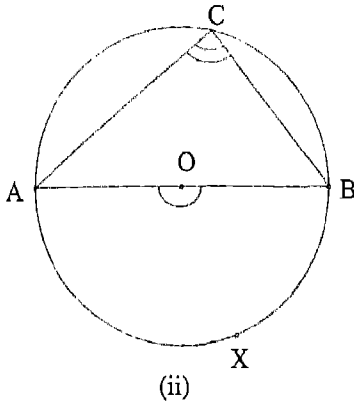
टिप्पणी: ध्यान दीजिए कि यह गुण पिछले गुण का *विलोम* है।

12.5 एक चाप द्वारा वृत्त के केंद्र और उसके शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर बनाए गए कोण

आकृति 12.21 (i) को देखिए। AXB केंद्र O वाले वृत्त का एक चाप है, ∠AOB चाप AXB द्वारा केंद्र पर बनाया गया कोण है तथा ∠ACB इसी चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु C पर बनाया गया कोण है। ध्यान दीजिए कि आकृति 12.21 (ii) में AXB एक अर्धवृत्त है और केंद्र पर इसके द्वारा बनाया गया कोण AOB एक ऋजु कोण है, जबकि आकृति 12.21 (iii) में AXB एक दीर्घ चाप है तथा इसके द्वारा केंद्र O पर बनाया गया कोण AOB एक प्रतिवर्ती कोण है।

आकृति 12.21

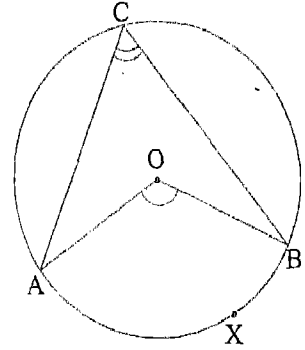
हमारी यह जानने में रुचि हो सकती है कि क्या ∠AOB और ∠ACB में कोई संबंध विद्यमान है। आइए इसकी जाँच करें।

(ii)

(iii)

आकृति 12.21

क्रियाकलाप 11 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इसका एक चाप AXB लीजिए और वृत्त के शेष भाग पर कोई बिंदु C लीजिए। OA, OB, CA और CB को मिलाइए (आकृति 12.22)।

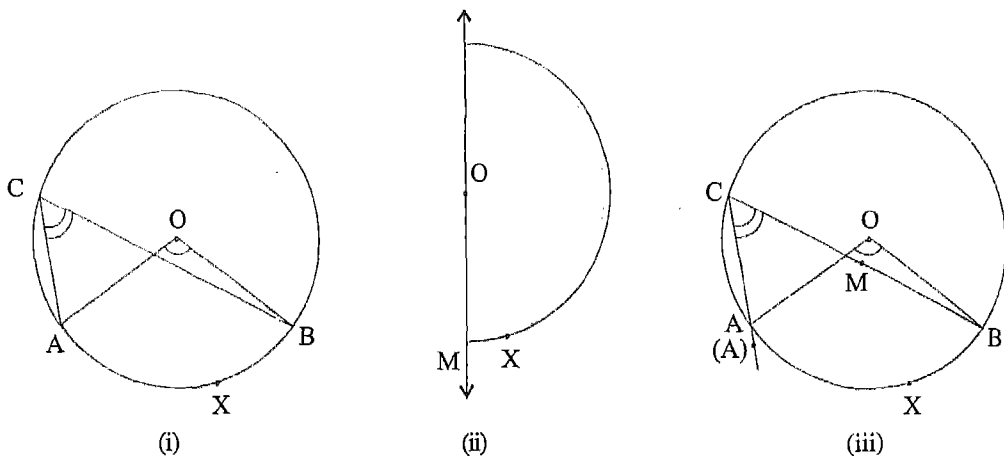
आकृति 12.22

भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याओं वाले दो और वृत्त खींचकर इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। वृत्तों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

$\angle AOB$ और $\angle ACB$ को मापिए तथा प्रत्येक स्थिति में अंतर $\angle AOB - 2\angle ACB$ ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए:

वृत्त	$\angle AOB$	$\angle ACB$	$2\angle ACB$	$\angle AOB - 2\angle ACB$
1				
2				
3				

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर $\angle AOB - 2\angle ACB$ या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार, सभी स्थितियों में $\angle AOB = 2\angle ACB$ है।

क्रियाकलाप 12 : एक अक्स कागज लीजिए और उस पर केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इसका कोई चाप AXB लीजिए और वृत्त के शेष भाग पर कोई बिंदु C अंकित कीजिए [आकृति 12.23 (i)]। AC और BC को मिलाकर $\angle ACB$ तथा OA और OB को मिलाकर $\angle AOB$ प्राप्त कीजिए।

अब कागज को O से होकर जाती हुई एक रेखा OM के अनुदिश इस प्रकार मोड़िए कि बिंदु A बिंदु B पर पड़े [आकृति 12.23 (ii)]। इस स्थिति में, $\angle AOM$, $\angle BOM$ पर पड़ेगा, अर्थात् $\angle AOM = \angle BOM$ होगा। (इसका अर्थ है कि $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \angle AOB$ है) अब कागज को खोलने के बाद, $\angle AOM$ (या $\angle BOM$) की एक अक्स प्रतिलिपि बनाइए तथा उसे $\angle ACB$ पर रखिए। आप क्या देखते हैं?

आकृति 12.23

आप देखेंगे कि $\angle AOM$, $\angle ACB$ को पूर्णतया ढक लेता है [आकृति 12.23 (iii)]।

इसी प्रकार, $\angle ACB = \angle AOM \; (= \angle BOM)$.

अर्थात्, $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

या $\angle AOB = 2 \angle ACB$

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलापों से निम्न गुण प्रदर्शित होता है :

वृत्त के किसी चाप द्वारा केंद्र पर बनाया गया कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है।

टिप्पणियाँ 1 : चाप AXB द्वारा वृत्त के केंद्र O पर बनाया गया कोण ∠AOB चाप AXB का *केंद्रीय कोण* (*central angle*) कहलाता है तथा चाप AXB केंद्रीय कोण AOB के संगत *अंत:खंडित चाप* (*intercepted arc*) कहलाता है।

2. अर्धवृत्त की स्थिति में $\angle ACB = 90°$ होता है।

अब इन गुणों को स्पष्ट करने के लिए, हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 4 : आकृति 12.24 में, केंद्र O वाले वृत्त के अंतर्गत ABCD एक वर्ग है। ∠AOB, ∠BOC, ∠COD और ∠DOA ज्ञात कीजिए।

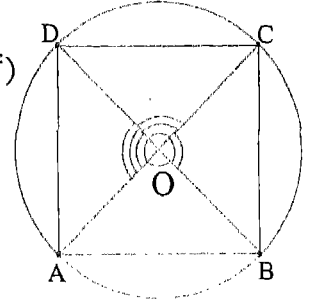
हल : AB = BC = CD = DA (वर्ग की भुजाएँ बराबर होती हैं)

अत:, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA$

(समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण बनाती हैं)

इसलिए, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$

$= \angle DOA$

$= \frac{1}{4} \times 360° = 90°$

आकृति 12.24

उदाहरण 5 : केंद्र O वाले वृत्त के अंतर्गत एक Δ ABC है (आकृति 12.25)। साथ ही, ∠AOB = 120° और ∠BOC = 150° है।

ज्ञात कीजिए: (i) ∠BAC (ii) ∠ACB (iii) ∠ABC

हल : (i) $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$

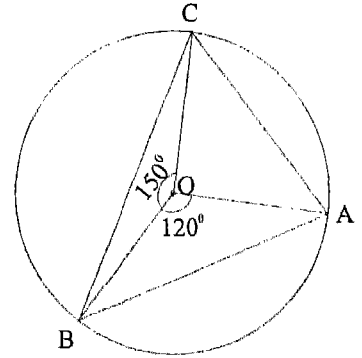
(केंद्र पर बनाया गया कोण शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है)

$= \frac{1}{2} \times 150° = 75°$

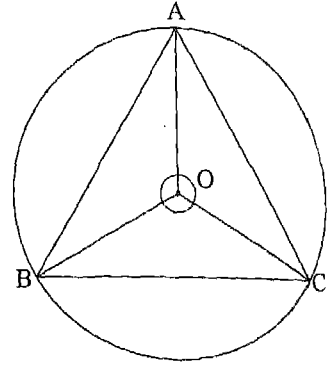
आकृति 12.25

(ii) इसी प्रकार, $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

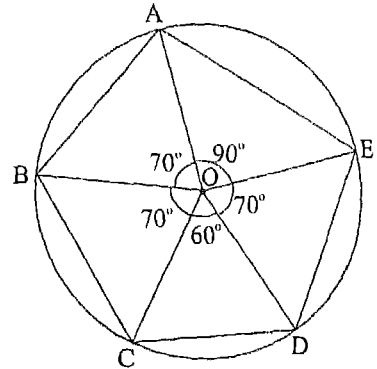
$= \frac{1}{2} \times 120° = 60°$

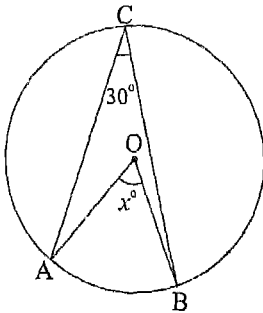
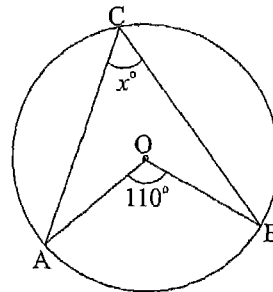
(iii) $\angle ABC = 180° - (75° + 60°)$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है)

$= 45°$

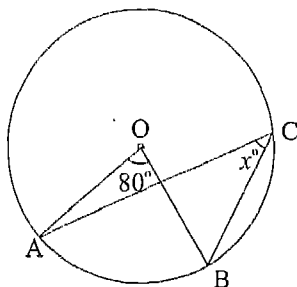
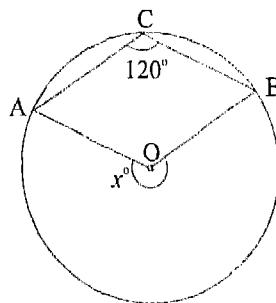
प्रश्नावली 12.2

1. केंद्र O वाले वृत्त के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज ABC है (आकृति 12.26)। ∠BOC, ∠COA और ∠AOB ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.26

2. आकृति 12.27 में, एक पंचभुज (पाँच भुजाओं वाली एक बंद आकृति) ABCDE केंद्र O वाले वृत्त के अंतर्गत बना है।

   (i) क्या AB = AE है? क्यों?
   (ii) क्या AE = DE है? क्यों?
   (iii) क्या AB = DE है? क्यों?
   (iv) क्या DE = CD है? क्यों?
   (v) क्या BC = DE है? क्यों?
   (vi) क्या BC = DC है? क्यों?
   (vii) क्या AB = BC है? क्यों?

आकृति 12.27

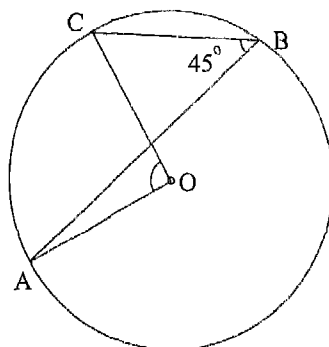
3. आकृति 12.28 में, O वृत्त का केंद्र है। प्रत्येक स्थिति के लिए x का मान ज्ञात कीजिए।

(i)

(ii)

आकृति 12.28

(iii)

(iv)

आकृति 12.28

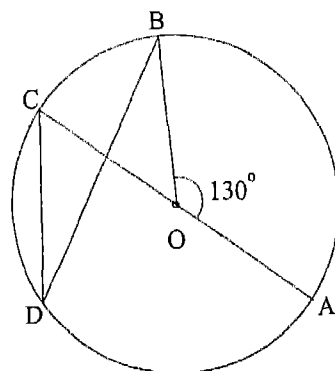
4. आकृति 12.29 में, O वृत्त का केंद्र है तथा $\angle ABC = 45°$ है।

   (i) $\angle AOC$ ज्ञात कीजिए।

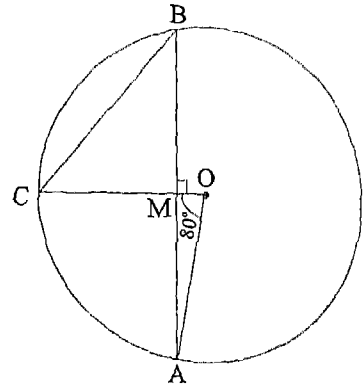
   (ii) क्या $OA \perp OC$ है?

आकृति 12.29

5. आकृति 12.30 में, AC केंद्र O वाले वृत्त का एक व्यास है। यदि $\angle AOB = 130°$ है, तो ज्ञात कीजिए :

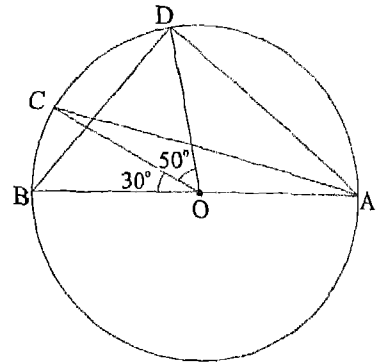
   (i) $\angle BOC$

   (ii) $\angle BDC$

आकृति 12.30

6. केंद्र O वाले वृत्त में AB एक जीवा है और $OM \perp AB$ है तथा वृत्त से बिंदु C मिलती है (आकृति 12.31) । यदि $\angle AOC = 80°$ है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) $\angle ABC$
(ii) $\angle MCB$

आकृति 12.31

7. आकृति 12.32 में, केंद्र O वाले वृत्त का एक व्यास AB है। यदि $\angle BOC = 30°$ और $\angle COD = 50°$ है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) $\angle BAC$
(ii) $\angle CAD$
(iii) $\angle AOD$
(iv) $\angle ABD$

आकृति 12.32

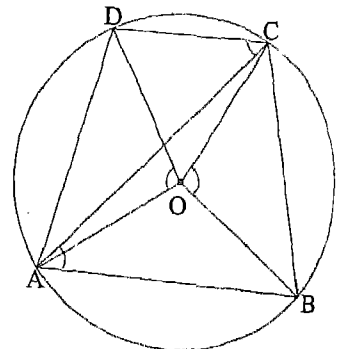
8. केंद्र O वाले वृत्त के अंतर्गत एक समलंब ABCD ($AB \parallel DC$ के साथ) बना हुआ है (आकृति 12.33)। विकर्ण AC को मिलाया गया है तथा OA, OB, OC और OD को भी मिलाया गया है।

(i) क्या $\angle BAC = \angle DCA$ है? क्यों?

(ii) क्या $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ है? क्यों?

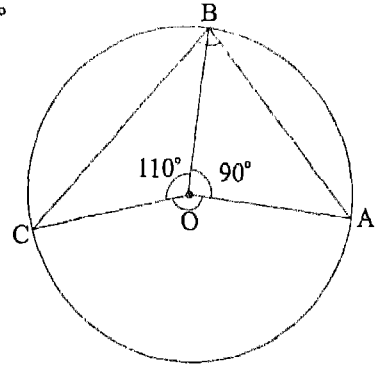
(iii) क्या $\angle DCA = \frac{1}{2} \angle DOA$ है? क्यों?

(iv) क्या $\angle BOC = \angle DOA$ है? क्यों?

(v) क्या $BC = AD$ है? क्यों?

आकृति 12.33

9. आकृति 12.34 में, $\angle AOB = 90°$ और $\angle BOC = 110°$ है, जहाँ O वृत्त का केंद्र है। ज्ञात कीजिए :

   (i) $\angle AOC$

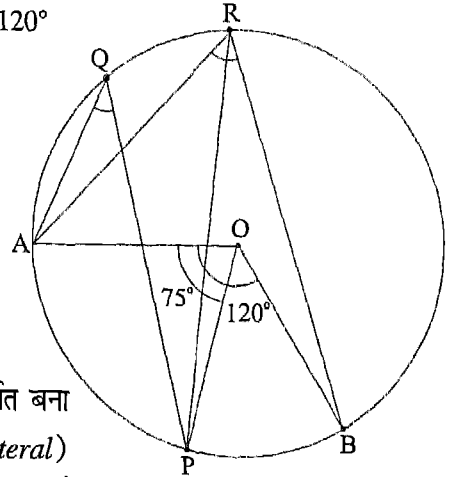
   (ii) $\angle ABC$

आकृति 12.34

10. केंद्र O वाले वृत्त के लघु चाप AB पर स्थित एक बिंदु P है (आकृति 12.35)। यदि $\angle AOB = 120°$ और $\angle AOP = 75°$ है, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) $\angle ARB$

   (ii) $\angle AQP$

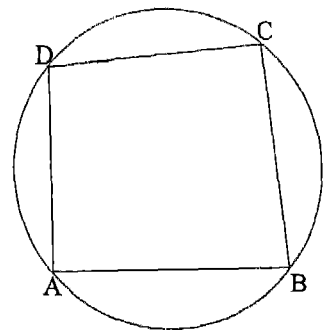
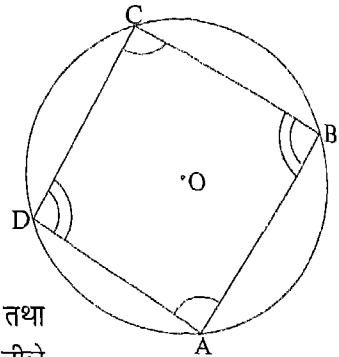
   (iii) $\angle ARP$

   (iv) $\angle BRP$

आकृति 12.35

12.6 चक्रीय चतुर्भुज और उसके कोण

आकृति 12.36 में, चतुर्भुज ABCD एक वृत्त के अंतर्गत बना हुआ है। यह एक *चक्रीय चतुर्भुज* (*cyclic quadrilateral*) कहलाता है। दूसरे शब्दों में, *वह चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हों, चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है।* ये चारों शीर्ष A, B, C, और D एक वृत्तीय बिंदु या *चक्रीय बिंदु* (*concyclic points*) कहलाते हैं।

आकृति 12.36

हम जानते हैं कि चतुर्भुज ABCD के कोण A, B, C और D इस अर्थ में परस्पर संबंधित हैं कि इन चारों का योग 360^0 होता है। इस तथ्य को दृष्टिगत रखते हुए कि चतुर्भुज ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज भी है, उसके कोणों के मध्य कोई अन्य संबंध भी विद्यमान हो सकते हैं। आइए इन संबंधों की जाँच करें।

क्रियाकलाप 13 : केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए और इसके अंतर्गत एक चतुर्भुज ABCD बनाइए (आकृति 12.37)। भिन्न-भिन्न केंद्र और त्रिज्याएँ लेकर दो और वृत्त खींचिए तथा इस क्रियाकलाप को दोहराइए। इन आकृतियों को एक ही प्रकार से नामांकित कीजिए। चतुर्भुजों को संख्याओं 1, 2 और 3 से क्रमांकित कीजिए।

आकृति 12.37

प्रत्येक स्थिति में, $\angle A, \angle B, \angle C$ और $\angle D$ को मापिए तथा योग $\angle A + \angle C$ और $\angle B + \angle D$ ज्ञात कीजिए। अपने प्रेक्षणों को नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी के रूप में लिखिए :

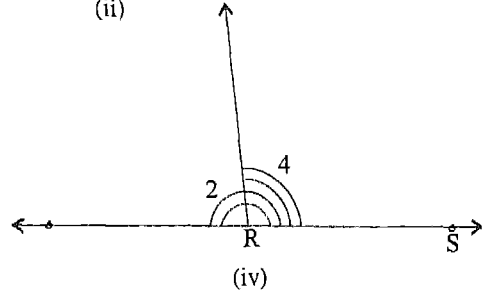
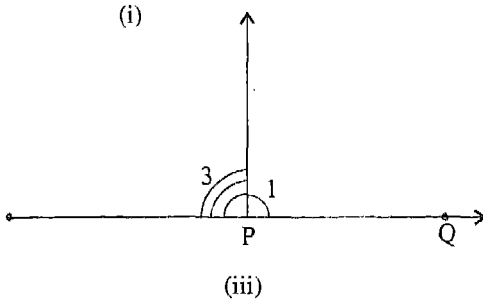
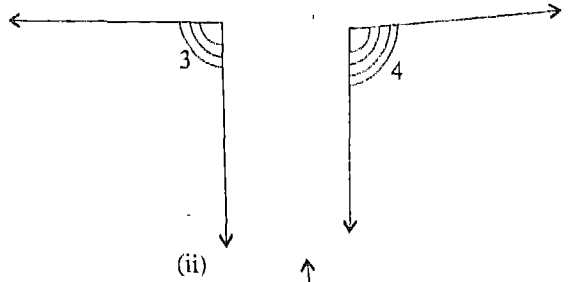
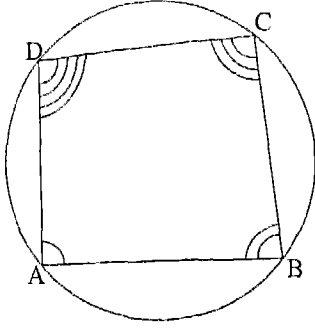
चतुर्भुज	$\angle A$	$\angle C$	$\angle A + \angle C$	$\angle B$	$\angle D$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						

आप क्या देखतें हैं? आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में, योग $\angle A + \angle C$ या तो 180° के बराबर है या 180° से थोड़ा अधिक या थोड़ा कम है। योग $\angle B + \angle D$ के बारे में भी यही परिणाम प्राप्त होता है। इस प्रकार, प्रत्येक स्थिति में,

$\angle A + \angle C = 180°$ और $\angle B + \angle D = 180°$ है।

क्रियाकलाप 14 : एक गत्ते पर एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त के अंतर्गत एक चतुर्भुज ABCD बनाइए [आकृति 12.38 (i)]।

एक अक्स कागज और एक कैंची की सहायता से, एक अन्य गत्ते से चतुर्भुज ABCD के कोणों A, B, C और D के बराबर क्रमशः कोण 1, 2, 3 और 4 काट लीजिए [आकृति 12.38 (ii)]।

अब एक रेखा PQ खींचिए तथा $\angle 1$ और $\angle 3$ को इस प्रकार रखिए कि इनमें से प्रत्येक का शीर्ष P पर रहे और $\angle 1$ की एक भुजा किरण PQ के अनुदिश रहे तथा उसकी दूसरी भुजा $\angle 3$ की एक भुजा के साथ, बिना किसी अतिव्याप्तता (overlapping) के, संपाती हों [आकृति 12.38 (iii)]। $\angle 3$ की दूसरी भुजा के बारे में आप क्या देखतें हैं? आप देखेंगे कि $\angle 3$ की दूसरी भुजा रेखा QP के अनुदिश स्थित है (किरण PQ के विपरीत)। इस प्रकार, $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ अर्थात् $\angle A + \angle C = 180°$ है।

आकृति 12.38

इसी प्रकार, $\angle 2$ और $\angle 4$ को लेकर यह देखा जा सकता है कि

$\angle 2 + \angle 4 = 180°$ [आकृति 12.38 (iv)]

अर्थात् $\angle B + \angle D = 180°$ है।

उपर्युक्त दोनों क्रियाकलाप एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का निम्न गुण प्रदर्शित करते हैं :

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं।

टिप्पणी : उपर्युक्त से यह निष्कर्ष निकलता है कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के युग्मों के कोणों के योग परस्पर बराबर हैं। उदाहरणार्थ, आकृति 12.39 के चक्रीय चतुर्भुज ABCD के लिए, $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$ है।

इस गुण को स्पष्ट करने के लिए, आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 6 : एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD की भुजा AB को बिंदु E तक बढ़ाया गया है (आकृति 12.39)। यदि $\angle ADC = 120°$ है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) $\angle ABC$ (ii) $\angle CBE$

आकृति 12.39

हल : (i) $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

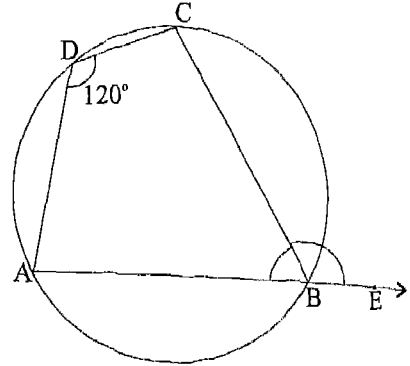
(चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

अर्थात् $\angle ABC + 120° = 180°$

या $\angle ABC = 60°$

(ii) $\angle ABC + \angle CBE = 180°$ (रैखिक युग्म)

अर्थात् $60° + \angle CBE = 180°$

या $\angle CBE = 180° - 60° = 120°$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि चक्रीय चतुर्भुज का एक बाह्य कोण सम्मुख अंत: कोण के बराबर है।

उदाहरण 7 : आकृति 12.40 में, $\angle FDE = 85°$ और $\angle C = 70°$ है। चतुर्भुज ABCD के निम्न कोण ज्ञात कीजिए : (i) $\angle A$ (ii) $\angle D$ (iii) $\angle B$

हल : (i) $\angle C = 70°$ (दिया है)

अत:, $\angle A + 70° = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

या $\angle A = 180° - 70° = 110°$

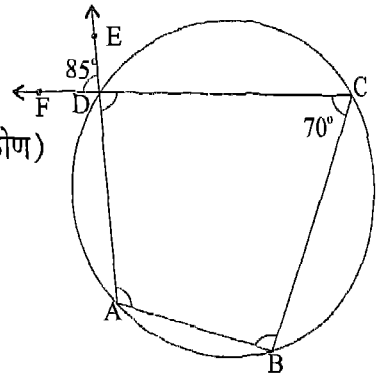
(ii) $\angle ADC = \angle FDE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

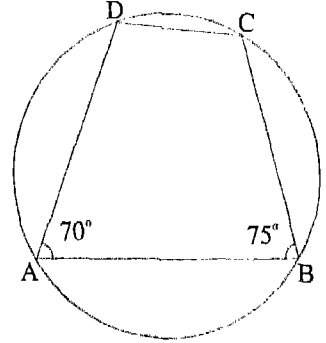
$= 85°$

(iii) $\angle B + \angle ADC = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

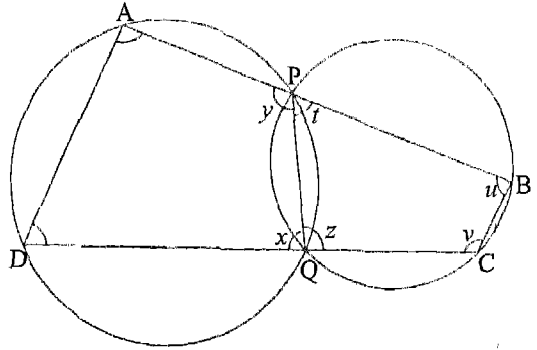
आकृति 12.40

अर्थात् $\angle B + 85° = 180°$

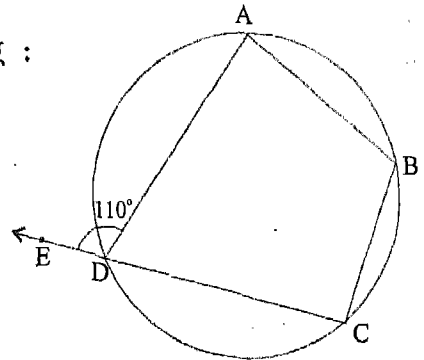
या $\angle B = 180° - 85° = 95°$

प्रश्नावली 12.3

1. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें $\angle A = 70°$ और $\angle B = 75°$ है (आकृति 12.41)। इस चतुर्भुज के $\angle C$ और $\angle D$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.41

2. दो वृत्त बिंदुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं। इन दोनों वृत्तों के अंतर्गत क्रमशः दो चतुर्भुज APQD और PQCB बने हुए हैं, जैसा कि आकृति 12.42 में दर्शाया गया है। यदि $\angle A = 95°$ और $\angle D = 65°$ हो, तो निम्न के मान ज्ञात कीजिए :

   (i) x (ii) y (iii) z
   (iv) t (v) u (vi) v

आकृति 12.42

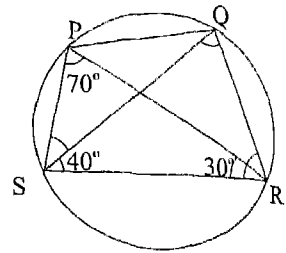
3. आकृति 12.43 में, $\angle ADE = 110°$ है। ज्ञात कीजिए :

   (i) $\angle ADC$
   (ii) $\angle ABC$

आकृति 12.43

4. आकृति 12.44 में, $\angle SPR = 70°$, $\angle RSQ = 40°$ और $\angle SRP = 30°$ है। ज्ञात कीजिए :

(i) $\angle PSQ$

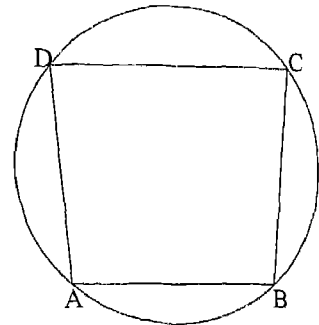
(ii) $\angle PQR$

(iii) $\angle QRS$

आकृति 12.44

5. ABCD एक चक्रीय समलंब है (ऐसा समलंब जिसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हों), जिसमें AB ∥ DC है (आकृति 12.45)। निम्न कथनों के लिए कारण दीजिए :

(i) $\angle A + \angle D = 180°$

(ii) $\angle B + \angle D = 180°$

(iii) $\angle A = \angle B$

आकृति 12.45

6. एक वृत्त के अंतर्गत एक समांतर चतुर्भुज ABCD बना हुआ है।

(i) क्या $\angle A = \angle C$ है? क्यों?

(ii) क्या $\angle A + \angle C = 180°$ है? क्यों?

(iii) क्या $\angle A = \angle C = 90°$ है? क्यों?

(iv) क्या $\angle B = \angle D = 90°$ है? क्यों?

(v) क्या ABCD एक आयत है? क्यों?

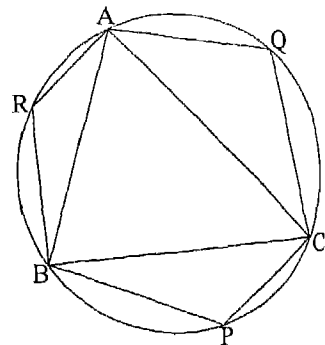
7. Δ ABC एक वृत्त के अंतर्गत बना हुआ है तथा बिंदु P, Q और R वृत्त पर आकृति 12.46 में दर्शाए अनुसार लिए गए हैं। ज्ञात कीजिए :

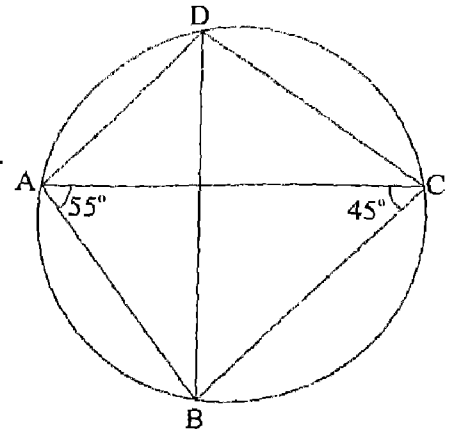
(i) $\angle P + \angle BAC$

(ii) $\angle Q + \angle ABC$

(iii) $\angle R + \angle ACB$

(iv) $\angle P + \angle Q + \angle R + \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$

(v) $\angle P + \angle Q + \angle R$

आकृति 12.46

अंतर्गत चतुर्भुज ABCD बना हुआ
12.47)। यदि $\angle BAC = 55°$ और
है, तो ज्ञात कीजिए :

आकृति 12.47

याद रखने योग्य बातें

, केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।
जीवा के मध्य-बिंदु को केंद्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।
ान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।
रस्थ जीवाएँ समान होती हैं।
ान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण बनाती हैं।
जीवाएँ, जो केंद्र पर समान कोण बनाती हैं, समान होती हैं।
द्वारा वृत्त के केंद्र पर बनाया गया कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग
सी बिंदु पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है।
वारा केंद्र पर बनाया गया कोण उस चाप का केंद्रीय कोण कहलाता है तथा
केंद्रीय कोण के संगत अंतःखंडित चाप कहलाता है।
जसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं एक चक्रीय चतुर्भुज कहलाता
ारों शीर्ष एकवृत्तीय या चक्रीय बिंदु कहलाते हैं।
ज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं।

अध्याय

13

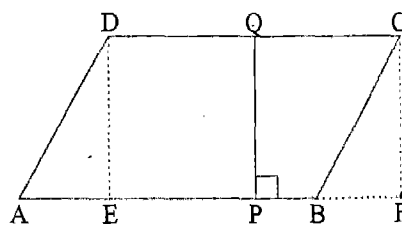
क्षेत्रफल

13.1 भूमिका

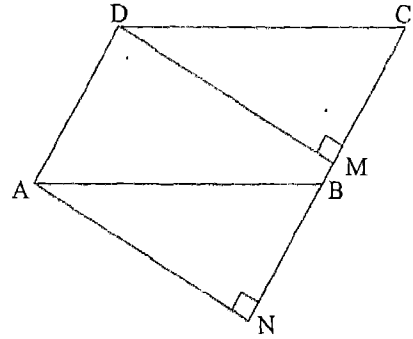
याद कीजिए कि तल में बनी आकृति को *समतल (plane)* आकृति कहते हैं। रेखाओं या वक्रों या दोनों से बनी समतल आकृति में यदि मुक्त सिरे न हों, तो इसे *संवृत* या बंद (*closed*) आकृति कहा जाता है। यदि यह आकृति अपने आप को न काटे, तो इसे *सरल (simple)* आकृति कहते हैं। केवल रेखाखंडों से बनी आकृति *सरल रेखात्मक या रेखीय* (rectilinear) कहलाती है। किसी सरल संवृत आकृति से घिरा तल का भाग *समतल क्षेत्र (plane region)* कहलाता है। समतल क्षेत्र का परिमाण इस क्षेत्र का *क्षेत्रफल (area)* कहलाता है।

आप पहले से ही जानते हैं कि वर्ग और आयत जैसी रेखीय आकृतियों के क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किए जाते हैं। इस अध्याय में, हम कुछ और रेखीय आकृतियों, समांतर चतुर्भुज, त्रिभुज तथा समलंब (trapezium) का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखेंगे। हम वृत्त नामक एक अरेखीय आकृति का क्षेत्रफल निकालना भी सीखेंगे। वृत्त से आप परिचित ही हैं। जैसा कि आप जानते हैं, वृत्त मानव की सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण खोंजों में से एक है। हमारे दैनिक जीवन में इसके व्यापक परिणाम हैं। हम वृत्त के व्यास और इसकी परिधि को जोड़ने वाला एक अति रोचक गुण भी प्राप्त करेंगे।

13.2 समांतर चतुर्भुज : पुनर्विलोकन

याद कीजिए कि समांतर चतुर्भुज चार रेखाखंडों (जो इसकी भुजाएँ कहलाती हैं) से बनी एक सरल बंद आकृति है जिसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर होती है। आकृति 13.1 में एक समांतर चतुर्भुज ABCD दिखाया गया है। AB और DC इस समांतर चतुर्भुज की दो सम्मुख भुजाएँ हैं और AB ∥ DC है। उसी प्रकार, AD ∥ BC है।

आकृति 13.1

आइए, भुजा AB को आधार मानें। सामान्यतया, आधार को क्षैतिज और साथ ही इसके समांतर दूसरी भुजा के नीचे की ओर खींचा जाता है। एक रेखाखंड लीजिए जिसका एक सिरा P आधार पर और दूसरा सिरा Q आधार की सम्मुख भुजा पर हो। यदि PQ, AB पर लंब हो, तो PQ समांतर रेखाओं AB और DC के बीच की लघुतम दूरी या मात्र दूरी है। हम कहते हैं कि *PQ आधार AB के संगत, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई है।* ऊँचाई को ऊपर वाले शीर्षों में से किसी एक से आधार पर डाले गए लंब से दिखाने का प्रचलन है। इस प्रकार, AB को आधार लिए जाने पर ऊँचाई रेखाखंड DE या CF से दिखाई जा सकती है (आकृति 13.1) यद्यपि समांतर चतुर्भुज की किसी भी भुजा को आधार समझा जा सकता है।

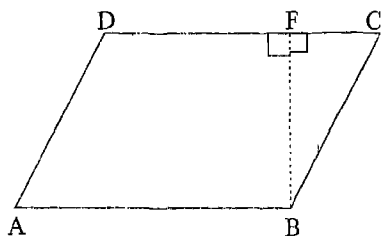
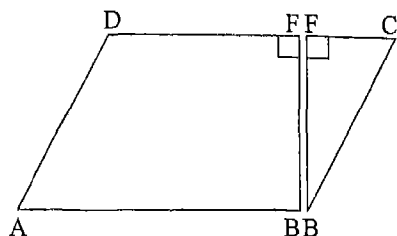
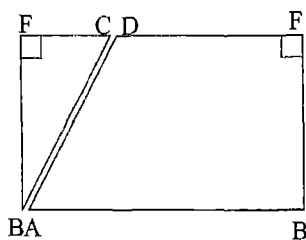
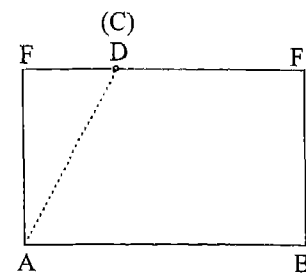
ध्यान दीजिए कि यदि आप समांतर भुजाओं के दूसरे जोड़े में से किसी एक भुजा को आधार बनाते हैं, तो समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई बदल जाएगी। इस प्रकार, यदि आकृति 13.1 के समांतर चतुर्भुज में BC को आधार माना जाए, तो ऊँचाई AN या DM होगी (आकृति 13.2)।

आकृति 13.2

अध्याय के शेष भाग में, *आधार* शब्द का प्रयोग समांतर चतुर्भुज के आधार और आधार की लंबाई, दोनों के लिए किया जाएगा। साथ ही, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई दिखाने वाले रेखाखंड के लिए हम शब्द *शीर्षलंब* (*altitude*) का प्रयोग करेंगे। इस प्रकार, आकृति 13.1 में यदि AB और DC में से किसी एक को आधार माना जाए, तो DE और CF दो शीर्षलंब होंगे। सदा की भाँति, AB आदि का प्रयोग रेखाखंड AB के लिए और इसकी लंबाई के लिए भी किया जाएगा। आधार और ऊँचाई के संदर्भ में हम प्राय: *संगत* शब्द को छोड़ देंगे।

13.3 समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

अब हम कागज काटने के एक ऐसे क्रियाकलाप का वर्णन करेंगे जिससे किसी दिए गए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में सहायता मिलेगी।

क्रियाकलाप 1 : मोटे कागज के एक टुकड़े पर कोई समांतर चतुर्भुज ABCD बनाइए। AB को आधार मानिए। एक शीर्षलंब BF खींचिए। तब $BF \perp DC$ जिससे कि कोण DFB

और कोण BFC दोनों समकोण हुए [आकृति 13.3 (i)]। BC, CF और FB के अनुदिश काटकर त्रिभुज BCF को अलग कर लीजिए [आकृति 13.3(ii)]। त्रिभुजाकार टुकड़े को उठाकर आकृति 13.3 (iii) में दिखाए अनुसार दूसरे टुकड़े के बाईं ओर रखिए। अब त्रिभुजाकार टुकड़े को दूसरे टुकड़े की ओर इतना सरकाइए कि BC, AD को पूर्णतया ढक ले (के संपाती हो जाए) [आकृति 13.3 (iv)]।

आकृति 13.3

नया टुकड़ा समांतर चतुर्भुज के काटे गए टुकड़ों को आपस में बिना अतिव्यापन और बिना रिक्त स्थान छोड़े, जोड़कर बनाया गया है। अत:, दोनों टुकड़ों के क्षेत्रफल समान हैं। अब आकृति 13.3 (iv) में दिखाया गया अंतिम टुकड़ा स्पष्टत: भुजाओं AB और BF वाला एक आयत है। अब,

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

= AB × BF

= समांतर चतुर्भुज ABCD का आधार × उसकी ऊँचाई

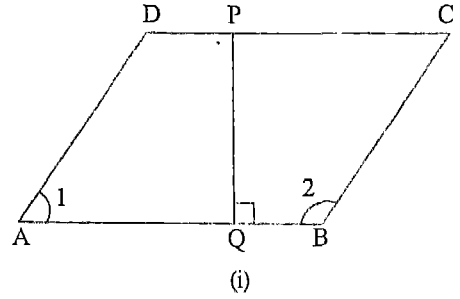
अत:, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = AB × BF

= आधार × ऊँचाई

क्योंकि AB दिए गए समांतर चतुर्भुज का आधार और BF उसका शीर्षलंब या उसकी ऊँचाई है।

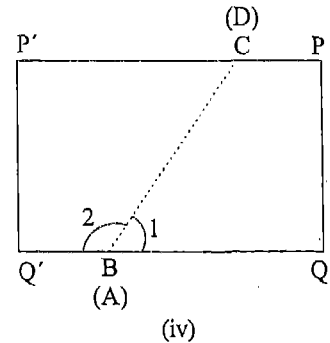
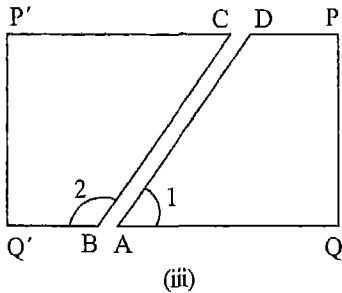
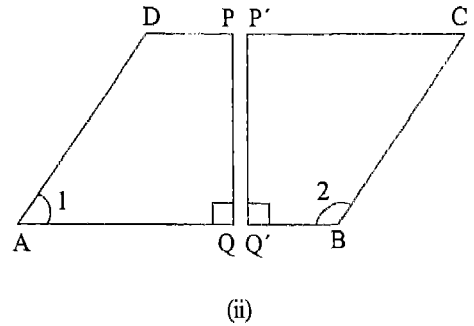
इस क्रियाकलाप को कई अन्य समांतर चतुर्भुजों पर दोहराइए और सत्यापित कीजिए कि प्रत्येक दशा में समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके आधार और उसकी ऊँचाई के गुणनफल के बराबर होता है।

क्रियाकलाप 2 : एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए। समांतर चतुर्भुज की एक अक्स प्रतिलिपि बनाइए और एक कड़े कागज (या किसी पुराने ग्रीटिंग कार्ड) पर इसका अक्स खींचिए। DC पर एक बिंदु P लीजिए। AB पर लंब PQ खींचिए [आकृति 13.4(i)] । तब PQ दिए गए समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई है।

(i)

कागज/कार्ड से समांतर चतुर्भुज को काट लीजिए और PQ के अनुदिश भी काट लीजिए। इससे दिया गया समांतर चतुर्भुज दो चतुर्भुजों AQPD तथा Q′BCP′ [आकृति 13.4 (ii)] में विभक्त हो जाता है। सीधे हाथ वाला टुकड़ा Q′BCP′ लेकर इसे दूसरे टुकड़े AQPD की बाईं ओर रखिए [आकृति 13.4 (iii)] । बायाँ टुकड़ा दाएँ टुकड़े की ओर इतना सरकाइए कि BC, AD के संपाती हो जाए [आकृति 13.4(iv)]।

(ii)

(iii)

(iv)

आकृति 13.4

समांतर रेखाओं के गुणों से, $\angle 1 +$ 2 = 180° है। इस प्रकार, आकृति 13.4 (iv) में 1 तथा 2 एक रैखिक युग्म बनाते हैं। अतः, Q′BQ (या Q′AQ), अर्थात् Q′Q एक रेखा है।

यहाँ से एक आयत प्राप्त होता है जिसका आधार AB और जिसकी ऊँचाई PQ क्रमश: दिए हुए समांतर चतुर्भुज के आधार और उसकी ऊँचाई के बराबर हैं।

क्योंकि कोई अतिव्याप्ति नहीं हुई है और न ही कोई रिक्त स्थान छोड़े गए हैं, अत: दिए गए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल वही है जो इस आयत का। परंतु हमें ज्ञात है कि किसी आयत का क्षेत्रफल उसकी लंबाई (आधार) और चौड़ाई (ऊँचाई) का गुणनफल होता है। यहाँ से, दिए गए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके आधार और उसकी ऊँचाई के गुणनफल के समान हुआ। इससे भी वही निष्कर्ष निकला जो ऊपर क्रियाकलाप 1 से निकला था।

यह परिणाम तर्कीय युक्तियों से भी सिद्ध किया जा सकता है। अत:, हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होते हैं :

I. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

II. समांतर चतुर्भुज का आधार = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

III समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

उदाहरण 1 : आधार 20 cm और संगत ऊँचाई 5 cm वाले समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र है :

क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

यहाँ, आधार = 20 cm और ऊँचाई = 5 cm है। अत:, क्षेत्रफल = 20 cm × 5 cm = 100 cm^2

उदाहरण 2 : भुजा 6.5 cm और शीर्षलंब 4 cm वाले एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : याद कीजिए कि समचतुर्भुज ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। अत:, समचतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र वही है जो समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का। अत:, समचतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र है :

क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

यहाँ, आधार = भुजा = 6.5 cm और ऊँचाई = शीर्षलंब की लंबाई = 4 cm

अत:, समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 6.5 cm × 4 cm = 26 cm^2

उदाहरण 3: क्षेत्रफल 400 cm^2 और ऊँचाई 8 cm वाले समांतर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$$\text{आधार} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$$

यहाँ, क्षेत्रफल = 400 cm^2 और ऊँचाई = 8 cm

अत:, $\text{आधार} = \frac{400}{8}$ cm = 50 cm

प्रश्नावली 13.1

1. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 12 cm और संगत ऊँचाई 7 cm है।
2. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 12 dm और संगत ऊँचाई 5 dm है।
3. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 28.5 cm और संगत शीर्षलंब 10 cm है।
4. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल वर्ग मीटरों में ज्ञात कीजिए जिसके आधार और शीर्षलंब निम्नलिखित हैं :

   (i) आधार = 12 dm, शीर्षलंब = 100 dm, (ii) आधार = 124 cm, शीर्षलंब = 10 dm

   (iii) आधार = 9 m, शीर्षलंब = 90 cm, (iv) आधार = 15 cm, शीर्षलंब = 9 cm
5. भुजा 6 cm और शीर्षलंब 4 cm वाले एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. भुजा 6.5 cm और शीर्षलंब 40 dm वाले एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. उस समांतर चतुर्भुज का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा 6.5 cm और जिसका क्षेत्रफल 26 cm^2 है।
8. उस समांतर चतुर्भुज का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा 10 cm और जिसका क्षेत्रफल 0.5 m^2 है।
9. क्षेत्रफल 390 cm^2 और ऊँचाई 26 cm वाले समांतर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए।
10. उस समांतर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 560 m^2 और जिसका शीर्षलंब 1400 cm है।
11. क्षेत्रफल 420 cm^2 और परिमाप 140 cm वाले समचतुर्भुज का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।

12. एक समांतर चतुर्भुज की दो भुजाएँ 20 cm और 25 cm हैं। यदि भुजा 25 cm के संगत शीर्षलंब 10 cm हो, तो दूसरी भुजा के संगत शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।

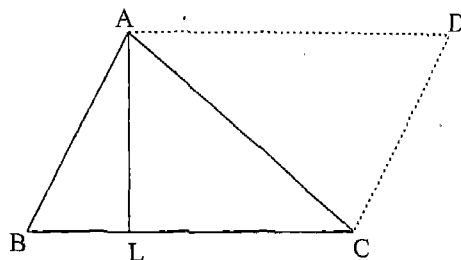
[*संकेत :* पहले क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।]

13. एक समांतर चतुर्भुज के आधार और संगत शीर्षलंब क्रमशः 10 cm और 12 cm हैं। यदि दूसरा शीर्षलंब 8 cm हो, तो समांतर भुजाओं के दूसरे युग्म की भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

14. एक भवन के फर्श पर बने फूलदार डिज़ाइन में 2800 टाइलें हैं। प्रत्येक टाइल शीर्षलंब 3 cm और आधार 5 cm वाले समांतर चतुर्भुज के आकार की है। 50 पैसे प्रति dm^2 की दर से डिज़ाइन को पॉलिश करने का व्यय ज्ञात कीजिए।

13.4 त्रिभुज का क्षेत्रफल

अब कागज काटने का एक ऐसा क्रियाकलाप बताया जाएगा जिससे दिए गए किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में सहायता मिलेगी।

क्रियाकलाप 3 : एक त्रिभुज ABC बनाइए। माना कि AL आधार BC के संगत शीर्षलंब है (आकृति 13.5)। A और C से होकर क्रमशः BC और BA के समांतर रेखाएँ खींचिए जो बिंदु D पर मिलें।

आकृति 13.5

क्योंकि BA ‖ CD और AD ‖ BC है, अतः ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। साथ ही, AL आधार BC के संगत एक शीर्षलंब है। यहाँ से,

समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= BC \times AL$ (1)

अब रेखाखंडों AC, CD और DA के अनुदिश कागज को काटिए। इससे त्रिभुज CDA समांतर चतुर्भुज ABCD से अलग हो जाएगा। अब समांतर चतुर्भुज आरंभिक ABC बनकर रह जाता है। CDA को ABC पर इस प्रकार रखिए कि C तो A पर आए, A आए C पर और D, AC के उसी ओर हो जिस ओर B है। आप देखेंगे कि D वास्तव में B के ऊपर आता है। यदि निम्नलिखित तथ्यों पर ध्यान दें, तो यह बात आश्चर्यजनक नहीं लगेगी :

1. एकांतर कोण BAC और ACD बराबर हैं (BA ‖ CD और AC इन्हें काटती है।)। इसका अर्थ यह हुआ कि CD पड़ती है AB पर।

2. AB = DC है। इसका अर्थ यह कि D पड़ता है B पर। अब यह स्पष्ट हो जाता है कि Δ CDA, Δ ABC को ठीक पूरा-पूरा ढक लेता है। इसका अर्थ यह है कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हैं। क्योंकि समांतर चतुर्भुज केवल इन दो त्रिभुजों से ही बना हुआ है,

अतः समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = Δ CDA का क्षेत्रफल + Δ ABC का क्षेत्रफल

= 2 × (Δ ABC का क्षेत्रफल)

(Δ ABC का क्षेत्रफल = Δ CDA का क्षेत्रफल)

या Δ ABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल)

$= \frac{1}{2}(BC \times AL)$ [(1) से]

$= \frac{1}{2}(b \times h)$,

जहाँ b, Δ ABC का आधार और h इसकी ऊँचाई या शीर्षलंब है। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होते हैं :

I. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार) × (शीर्षलंब) = $\frac{1}{2}$ (आधार) × (ऊँचाई)

II. त्रिभुज का आधार = $\frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}} = \frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{शीर्षलंब}}$

III. त्रिभुज की ऊँचाई (शीर्षलंब) = $\frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल समान आधार और ऊँचाई वाले समांतर चतुर्भुज का आधा होता है।

उदाहरण 4 : आधार 24 cm और ऊँचाई 14 cm वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालिए।

हल : त्रिभुज का क्षेत्रफल A होता है :

$$A = \frac{1}{2}(b \times h)$$

यहाँ $b = 24$ cm और $h = 14$ cm है।

अतः, $A = \frac{1}{2}(24 \times 14)\ cm^2 = 168\ cm^2$

उदाहरण 5 : आधार 80 cm और क्षेत्रफल 0.08 m^2 वाले त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि आधार cm में दिया गया है, अत: पहले हम क्षेत्रफल को भी cm^2 में बदल लेंगे। (हम आधार को भी m में बदल सकते थे, परंतु तब हमें दशमलवों में काम करना पड़ता।)

अब,

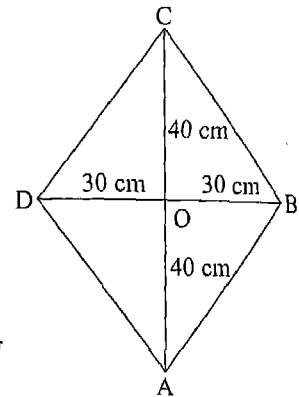
$$1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$$

अत:, $$0.08 \text{ m}^2 = 0.08 \times 10000 \text{ cm}^2 = 800 \text{ cm}^2$$

ऊपर के सूत्र III का प्रयोग करने पर,

$$\text{त्रिभुज की ऊँचाई} = \frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}} = \frac{2 \times 800}{80} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

उदाहरण 6 : विकर्णों 80 cm और 60 cm वाले एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : याद कीजिए कि समचतुर्भुज ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है जिसके विकर्ण एक-दूसरे को समकोणों पर काटते हैं। आइए, समचतुर्भुज के शीर्षों को A, B, C और D कहें। विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदु को O कहिए (आकृति 13.6)। अब हम समचतुर्भुज को चार समकोण त्रिभुजों OBC, OCD, ODA और OAB से बना हुआ समझ सकते हैं।

आकृति 13.6

ध्यान दीजिए कि यदि हम समकोण त्रिभुज OBC में OB तथा OC में से एक को आधार मानें, तो दूसरा इसका शीर्षलंब होगा। अत:, इस त्रिभुज का क्षेत्रफल है :

$$\frac{1}{2} \times OB \times OC = \frac{1}{2} \times 30 \times 40 \text{ cm}^2 = 600 \text{ cm}^2$$

ध्यान दीजिए कि शेष तीन त्रिभुज क्षेत्रफल में इस त्रिभुज के समान हैं। अत:, दिए हुए समचतुर्भुज का क्षेत्रफल है :

$$4 \times 600 \text{ cm}^2 = 2400 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 7 : उस समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा 20 cm है।

हल: एक समबाहु त्रिभुज ABC लीजिए जिसमें AB = BC = CA = 20 (cm में) है। CD AB खींचिए जो AB को D पर मिले (आकृति 13.7)। तब D, AB का मध्य-बिंदु होगा।

$\therefore$ $AD = DB = 10$ (cm में)

चूँकि DBC एक समकोण त्रिभुज है, अत: पाइथागोरस प्रमेय द्वारा,

$BC^2 = DB^2 + DC^2$

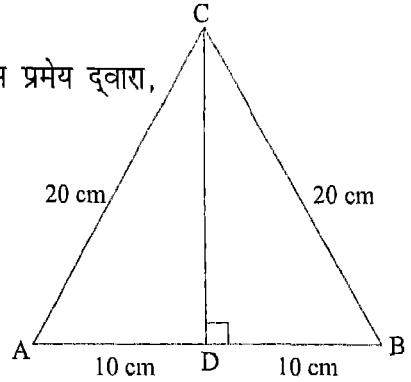
या $20^2 = 10^2 + DC^2$

या $DC^2 = 400 - 100$

या $DC = \sqrt{300} = \sqrt{3 \times 100} = 10\sqrt{3}$

अब, ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times 20 \times 10\sqrt{3}\ cm^2 = 100\sqrt{3}\ cm^2$$

C, A, D, B, 20 cm, 20 cm, 10 cm, 10 cm

आकृति 13.7

प्रश्नावली 13.2

1. आधार 18 cm और संगत ऊँचाई 7 cm वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. आधार 120 dm और ऊँचाई 75 dm वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. आधार 24 cm और शीर्षलंब 1.5 dm वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. नीचे दिए गए आधार और शीर्षलंबों वाले त्रिभुजों के क्षेत्रफल वर्ग मीटरों में ज्ञात कीजिए :

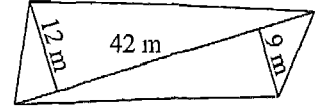
   (i) आधार = 12 dm, शीर्षलंब = 10 dm (ii) आधार = 62 cm, शीर्षलंब = 50 cm

   (iii) आधार = 8 m, शीर्षलंब = 80 cm (iv) आधार = 1500 cm, शीर्षलंब = 90 dm
5. आधार 60 cm और क्षेत्रफल 600 cm^2 वाले त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
6. क्षेत्रफल 65 cm^2 और आधार 13 cm वाले त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
7. आधार 6.5 cm और क्षेत्रफल 26 cm^2 वाले त्रिभुज का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।
8. शीर्षलंब 10 cm और क्षेत्रफल 0.5 m^2 वाले त्रिभुज का आधार ज्ञात कीजिए।
9. क्षेत्रफल 3.9 m^2 और ऊँचाई 260 cm वाले त्रिभुज का आधार ज्ञात कीजिए।
10. उस समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालिए जिसकी प्रत्येक भुजा 30 cm है।
11. भुजाओं 8 dm वाले समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
12. उस समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी समान भुजाओं की लंबाई 40 cm है।

13. समचतुर्भुज के आकार वाली उस टाइल का क्षेत्रफल निकालिए जिसके विकर्ण हैं:
    (i) 24 cm और 10 cm (ii) 50 cm और 100 cm (iii) 20 cm और 28 cm

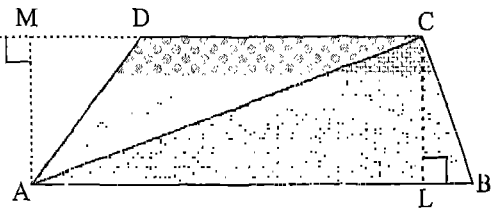
14. एक खेत का कर्ण 50 m और एक भुजा 40 m वाले समकोण त्रिभुज के आकार में है। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. एक खेत त्रिभुजाकार है। यदि उसका क्षेत्रफल 2 ha हो और उसका आधार 200 m लंबा हो, तो उसका शीर्षलंब ज्ञात कीजिए। [*संकेत* : 1 ha = 10000 m^2]

16. चतुर्भुज के आकार वाले किसी खेत के एक विकर्ण की लंबाई 42 m है। इस विकर्ण से अन्य दो शीर्षों की लांबिक दूरियाँ 12 m और 9 m हैं (आकृति 13.8)। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 13.8

17. Δ ABC का क्षेत्रफल P वर्ग मात्रक है।
    (i) D, AB का मध्य-बिंदु है। त्रिभुजों ADC और DBC के क्षेत्रफल निकालिए और दिखाइए कि दोनों बराबर हैं।
    [*संकेत* : यदि आधार AB के संगत त्रिभुज ABC की ऊँचाई h हो, तो $P = \frac{1}{2} h \times AB$ होगा।]
    (ii) बिंदु E और F, AB को तीन बराबर भागों में बाँटते हैं। त्रिभुजों AEC, EFC और FBC के क्षेत्रफल निकालिए और दिखाइए कि ये तीनों बराबर हैं।
    (iii) बताइए कि किसी त्रिभुज ABC को समान क्षेत्रफल वाले n त्रिभुजों में कैसे विभक्त किया जा सकता है।

13.5 समलंब का क्षेत्रफल

याद कीजिए कि समलंब ऐसा चतुर्भुज होता है जिसकी दो सम्मुख भुजाएँ एक-दूसरे के समांतर होती हैं। आकृति 13.9 में, एक समलंब ABCD दिखाया गया है। भुजाएँ AB और DC समांतर हैं। इन समांतर भुजाओं में से किसी को भी समलंब का आधार माना जा सकता है। इन भुजाओं (आधारों) के बीच की दूरी समलंब की ऊँचाई या उसका शीर्षलंब होती है। आकृति 13.9 में, CL और AM दो शीर्षलंब हैं।

आकृति 13.9

आइए, विकर्ण AC खींचें। इससे समलंब दो त्रिभुजों ABC और ACD में बँट जाता है। आइए, आधारों AB और DC को क्रमशः b_1 और b_2 से व्यक्त करें और ऊँचाई को h कहें।

समलंब ABCD का क्षेत्रफल = Δ ABC का क्षेत्रफल + Δ ACD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} AB \times CL + \frac{1}{2} DC \times AM$$

$$= \frac{1}{2} b_1 \times h + \frac{1}{2} b_2 \times h$$

$$= \frac{1}{2} h \times (b_1 + b_2)$$

अतः समलंब का क्षेत्रफल उसकी ऊँचाई और दोनों आधारों के योग के गुणनफल का आधा है। क्षेत्रफल को A से व्यक्त करने पर, हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है :

समलंब का क्षेत्रफल A = $\frac{1}{2}$ $h \times (b_1 + b_2)$, जहाँ h ऊँचाई, और b_1, b_2 दोनों आधार हैं।

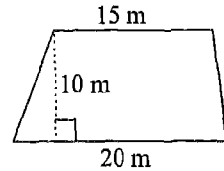
उदाहरण 8 : एक समलंब की समांतर भुजाएँ 20 m और 15 m लंबी हैं। इन भुजाओं के बीच की दूरी 10 m है। इस समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 13.10

हल : समलंब का क्षेत्रफल होता है:

$$A = \frac{1}{2} h \times (b_1 + b_2)$$

यहाँ, $b_1 = 20$ m, $b_2 = 15$ m और $h = 10$ m है।

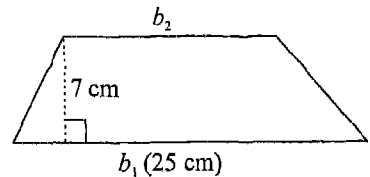
$\therefore \quad A = \frac{1}{2} \times 10\ (20 + 15)\ m^2 = 175\ m^2$

उदाहरण 9 : ऊँचाई 7 cm वाले एक समलंब का क्षेत्रफल 140 cm² है। यदि समांतर भुजाओं में से एक 25 cm हो, तो दूसरी समांतर भुजा ज्ञात कीजिए।

आकृति 13.11

हल : हम जानते हैं: $A = \frac{1}{2} h \times (b_1 + b_2)$

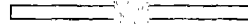
यहाँ, A = 140 cm², $h = 7$ cm और $b_1 = 25$ cm है।

ऊपर के सूत्र में ये मान रखने पर,

$$140\ cm^2 = \frac{1}{2} \times 7\ cm \times (25\ cm + b_2)$$

या $\quad 40 \text{ cm} = 25 \text{ cm} + b_2$

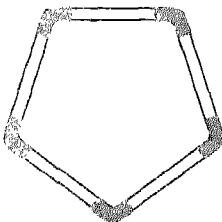
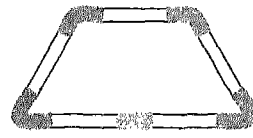
या $\quad b_2 = 15 \text{ cm}$

अतः दूसरी समांतर भुजा की लंबाई 15 cm है।

***मित्रों के साथ मिलकर कीजिए* 1** : I. एक दियासलाई की डिबिया लीजिए। इसमें से कुछ तीलियाँ निकालकर उनके सिरों पर लगा फॉस्फोरसीय मसाला हटा दीजिए। साइकिलों की मरम्मत करने वाली दुकान से एक मीटर रबर नलिका (valve tube) खरीदकर ले आइए। नलिका को लगभग 1.5 cm लंबे छोटे-छोटे टुकड़ों में काट लीजिए। अब इनमें से एक टुकड़ा और दियासलाई की दो तीलियाँ लीजिए। अब नलिका के एक सिरे में एक तीली और दूसरे सिरे में दूसरी तीली इस प्रकार लगाइए कि दोनों तीलियाँ नलिका के भीतर एक-दूसरे को स्पर्श करे (आकृति 13.12)। यह दो तीलियों को जोड़ने की विधि है। अब पाँच तीलियाँ और चार टुकड़े नलिका के लीजिए। इनको आकृति 13.13 के अनुसार जोड़िए।

आकृति 13.12

आकृति 13.13

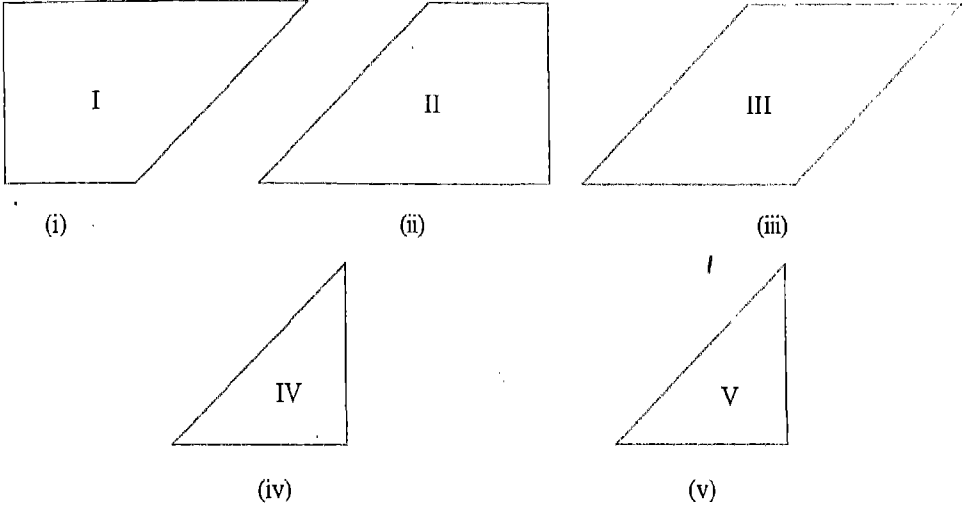
नलिका का एक और टुकड़ा लीजिए। ऊपर दिखाए गए सिरों A और B को नलिका के एक-एक सिरे में रखिए जिससे कि एक पाँच भुजाओं वाली आकृति (*पंचभुज*) [आकृति 13.14 (i)] बन जाए। अब जोड़ A-B पर थोड़ा दबाव डालकर आकृति को एक समलंब में रूपांतरित कीजिए [आकृति 13.14 (ii)]। एक तीली की लंबाई को एक मात्रक मानिए। (आप चाहें तो इस मात्रक को कोई अच्छा सा मनचाहा नाम भी दे सकते हैं।) आपने जो मात्रक लिया है उसके पदों में इस समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i)

(ii)

आकृति 13.14

II. तीन तीलियाँ लेकर एक त्रिभुज बनाइए (आकृति 13.15)। क्या यह त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है? अब 6 या 9 तीलियों से त्रिभुज बनाइए। क्या ये त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है? इन त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 13.15

मित्रों के साथ मिलकर कीजिए 2 : आकृति 13.16 में, दो समलंब, दो समकोण त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज, दिखाए गए हैं। इन आकृतियों की अक्स प्रतिलिपियाँ बनाइए। इनकी सहायता से, किसी गत्ते के टुकड़े (या एक पुराने ग्रीटिंग कार्ड) में से ये आकृतियाँ काट लीजिए।

आकृति 13.16

I. प्रत्येक आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

II. टुकड़ों को, बिना एक-दूसरे पर चढ़ाए और बीच-बीच में बिना खाली स्थान छोड़े, इस प्रकार रखिए कि अंग्रेजी भाषा का अक्षर 'T' (Capital) बन जाए। यदि आप इन टुकड़ों से 'T' न बना पाएँ, तो अध्याय के अंत में दी गई आकृति 13.28 देखें।

III. इन टुकड़ों से कुछ अन्य आकृतियाँ बनाने का प्रयास कीजिए।

प्रश्नावली 13.3

1. आधार 15 cm और ऊँचाई 8 cm वाले एक समलंब का क्षेत्रफल निकालिए, यदि दिए गए आधार के समांतर भुजा की लंबाई 9 cm हो।

2. समांतर भुजाओं 16 dm और 22 dm तथा ऊँचाई 12 dm वाले एक समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. आधारों 24 cm और 16.4 cm तथा शीर्षलंब 1.5 dm वाले एक समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. नीचे दिए गए आधारों और शीर्षलंब वाले समलंबों के क्षेत्रफल वर्ग मीटरों में निकालिए :
   (i) आधार = 12 dm और 20 dm, शीर्षलंब = 10 dm
   (ii) आधार = 28 cm और 3 dm, शीर्षलंब = 25 cm
   (iii) आधार = 8 m और 60 dm, शीर्षलंब = 40 dm
   (iv) आधार = 150 cm और 30 dm, शीर्षलंब = 9 dm

5. उस समलंब की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसके आधारों की लंबाइयों का योग 60 cm है और जिसका क्षेत्रफल 600 cm^2 है।

6. उस समलंब का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए जिसके आधारों की लंबाइयों का योग 6.5 cm है और जिसका क्षेत्रफल 26 cm^2 है।

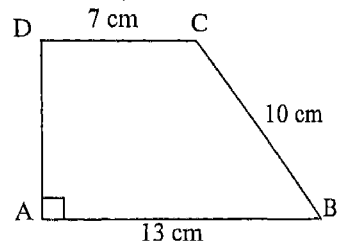
7. उस समलंब की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 65 cm^2 है और जिसके आधार 13 cm और 26 cm हैं।

8. उस समलंब के आधारों का योग ज्ञात कीजिए जिसका शीर्षलंब 11 cm है और क्षेत्रफल 0.55 m^2 है।

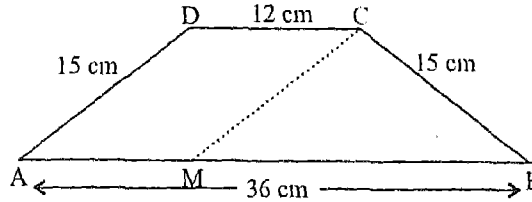
9. उस समलंब के आधारों का योग ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 4.2 m^2 है और जिसकी ऊँचाई 280 cm है।

10. एक समलंब का क्षेत्रफल 105 cm^2 है और उसकी ऊँचाई 7 cm है। समांतर भुजाओं में से एक यदि दूसरी से 6 cm अधिक लंबी हो, तो दोनों समांतर भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

11. एक समलंब का क्षेत्रफ़ल 180 cm^2 है और उसकी ऊँचाई 12 cm है। यदि समांतर भुजाओं में से एक, दूसरी की दुगुनी हो, तो दोनों समांतर भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

12. संलग्न आकृति 13.17 में, AB || DC और DA ⊥ AB है। साथ ही, DC = 7 cm, CB = 10 cm और AB = 13 cm है। चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
[*संकेत :* C से AB पर लंब डालिए जो इसे M पर मिले। ΔCMB से CM ज्ञात कीजिए।]

आकृति 13.17

13. एक समलंब की समांतर भुजाएँ DC और AB क्रमश: 12 cm और 36 cm (आकृति 13.18) हैं। इसकी दोनों असमांतर भुजाओं में से प्रत्येक की लंबाई 15 cm है। समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

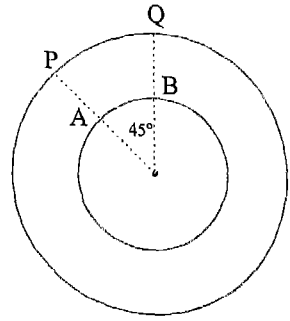
[*संकेत* : C से DA के समांतर एक रेखा खींचिए जो AB से M पर मिले। समद्विबाहु त्रिभुज CMB का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।]

आकृति 13.18

13.6 वृत्त की परिधि

चाँदी के एक आभूषण-निर्माता को एक दिए गए माप की 100 चाँदी की चूड़ियाँ बनानी है। उसे इस कार्य के लिए आवश्यक चाँदी का तार क्रय करना है। यह जानने के लिए कि कितने तार की आवश्यकता होगी, उसे चूड़ी की वृत्ताकार लंबाई ज्ञात करनी होगी। आप जानते ही हैं कि cm, dm, m या km जैसे किसी मानक मात्रक का प्रयोग कर सीधी लंबाइयों को कैसे मापा जाता है। परंतु क्या आप जानते हैं कि वृत्त के अनुदिश, जैसे कि ऊपर चूड़ी के संदर्भ में, लंबाई कैसे मापी जाती है? वृत्ताकार वस्तुएँ हमारे दैनिक जीवन में इतनी बहुलता से देखने को मिलती हैं कि वृत्त के अनुदिश लंबाई मापना एक महत्त्वपूर्ण समस्या है। जैसा कि आप जानते हैं, रेखीय आकृतियों में चारों ओर की लंबाई को उनका संगत परिमाप कहा जाता है। इसी प्रकार, हम वृत्त के अनुदिश लंबाई को उसका परिमाप कह सकते थे। परंतु वृत्त के परिमाप को एक विशेष नाम दिया गया है जिसे *परिधि* (*circumference*) कहते हैं।

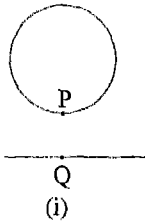
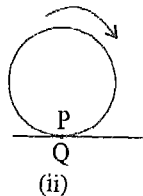
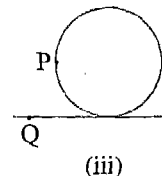
किसी वृत्त के अनुदिश लंबाई या उसके परिमाप को उसकी परिधि कहते हैं।

अब हम यह जानने का प्रयास करेंगे कि किसी वृत्त की परिधि कैसे मापी जाती है। बाद में, हम एक सूत्र प्राप्त करेंगे जिससे किसी दिए गए वृत्त की परिधि का एक सन्निकट (लगभग) मान निकाला जा सके। ध्यान दीजिए कि वृत्त को उसका सबसे बड़ा चाप माना जा सकता है। अत:, हम यदि चापों की लंबाइयाँ मापने की कोई विधि ज्ञात कर सकते तो हम परिधि भी ज्ञात कर सकते थे।

आप जानते हैं कि जैसे-जैसे वृत्त के किसी चाप द्वारा उसके केंद्र पर अंतरित (subtended) कोण में वृद्धि होती है, वैसे-वैसे ही चाप की लंबाई भी बढ़ती जाती है। आपको लगेगा कि इस तथ्य से हमें वृत्त की परिधि ज्ञात करने में सहायता मिलेगी। परंतु आकृति 13.19 को देखिए। इसमें एक ही केंद्र वाले दो वृत्त दिखाए गए हैं। छोटे वाले वृत्त का चाप AB केंद्र पर 45° का कोण अंतरित करता है। बड़े वृत्त का चाप PQ भी केंद्र पर 45° का कोण अंतरित करता है। परंतु स्पष्टतः ये दोनों चाप बराबर नहीं हैं। इस प्रकार, केवल केंद्र पर अंतरित कोण का ज्ञान हमें चाप को मापनें में, और इसलिए वृत्त की परिधि को मापने में भी, कोई सहायता नहीं दे सकता।

आकृति 13.19

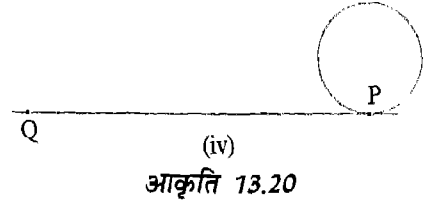
यह अनुमान करने के लिए कि परिधि मापने में वास्तव में क्या सहायक हो सकता है, हम मापने के कुछ क्रियाकलाप करेंगे।

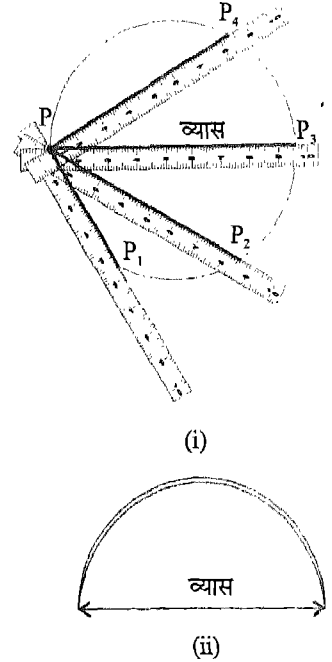
क्रियाकलाप 4 : एक वृत्त लीजिए। जैसा कि पहले भी कहा गया, हम इसे सीधी लंबाई की भाँति नहीं माप सकते। कागज के मोटे पन्ने पर या गत्ते के टुकड़े पर वृत्त की एक अक्स प्रतिलिपि बनाइए। कागज को वृत्त के अनुदिश काट लीजिए जिससे कि आपको एक चक्रिका (disc) प्राप्त हो जाए। इस चक्रिका के घेरे पर एक बिंदु P चिह्नित कीजिए। ध्यान दीजिए कि यह घेरा ही वास्तव में वृत्त है और इस घेरे के अनुदिश लंबाई ही इस वृत्त की परिधि है।

अब कागज के पन्ने पर एक रेखा खींचिए। इस पर एक बिंदु Q चिह्नित कीजिए [आकृति 13.20 (i)]। चक्रिका को ऊर्ध्वाधर पकड़िए और रेखा पर इस प्रकार रखिए कि बिंदु P बिंदु Q पर आए [आकृति 13.20 (ii)]। अब चक्रिका को रेखा पर दक्षिणावर्त (घड़ी की सूइयों के चलने की दिशा में) धीरे-धीरे इस प्रकार लुढ़काइए कि यह फिसले नहीं, बस घूमे [आकृति 13.20 (iii)]। लुढ़काने की क्रिया तब तक कीजिए जब तक कि बिंदु P पुनः रेखा पर न आ जाए [आकृति 13.20 (iv)]।

आकृति 13.20

क्योंकि चक्रिका फिसली नहीं है, अतः इसके घेरे के अनुदिश दूरी QP या PQ के बराबर है। इस प्रकार, लंबाई QP या PQ ही दिए गए वृत्त की परिधि है।

आकृति 13.20

आप चक्रिका के घेरे के अनुदिश ठीक एक बार धागा लपेटकर और फिर प्रयुक्त धागे की लंबाई मापकर भी परिधि ज्ञात कर सकते थे। इस कार्य के लिए बोतलों के ढक्कन, बेलनाकार डिब्बे, बोतलों की गरदनें और लकड़ी की चक्रिकाएँ सुविधाजनक हो सकती हैं।

13.7 व्यास और परिधि में संबंध

आपने अनुभव किया होगा कि वृत्त की परिधि मापने की ऊपर बताई गई विधि कुछ जटिल है। अब हम एक अन्य क्रियाकलाप बताएँगे जिससे त्रिज्या या व्यास दिए होने पर, सीधे-सीधे परिधि के परिकलन के लिए सूत्र बनाने में सहायता मिलेगी। ज्ञात केंद्र वाला वृत्त दिया होने पर, केंद्र से होकर जाने वाली जीवा (जिसके सिरे वृत्त पर होंगे) वृत्त का व्यास होती है। यदि केंद्र ज्ञात न हो, तो आप व्यास को एक बड़ी-से-बड़ी जीवा के रूप में प्राप्त कर सकते हैं। संभवतः आप एक पटरी (ruler) को वृत्त के ऊपर सरकाने से प्राप्त विभिन्न जीवाओं की लंबाइयाँ देख-देख कर व्यास ज्ञात कर सकते थे [आकृति 13.21 (i)] । एक अधिक परिशुद्ध विधि यह होगी कि आप वृत्त की एक अक्स प्रतिलिपि बनाकर इसे बीच से इस प्रकार मोड़ें कि एक अर्धवृत्त प्राप्त हो जाए। इस अर्धवृत्त के दो सिरों के बीच की सीधी दूरी व्यास होगी [आकृति 13. 21 (ii)] ।

आकृति 13.21

क्रियाकलाप 5 : अलग-अलग मापों की चार चक्रिकाएँ लीजिए। इनको P, Q, R और S कहिए। जैसा ऊपर बताया गया है, उस प्रकार प्रत्येक चक्रिका के व्यास (d) और परिधि (c) को माप लीजिए। अनुपात $\frac{c}{d}$ का दो दशमलव स्थानों तक शुद्ध परिकलन कर आगे दी गई

सारणी को भरिए :

चक्रिका	परिधि (c)	व्यास (d)	अनुपात $\left(\frac{c}{d}\right)$
P			
Q			
R			
S			

आप देखेंगे कि अंतिम स्तंभ में लिखे $\frac{c}{d}$ के मानों में यदि कोई अंतर है भी तो किंचित मात्र ही है। अब $\frac{c}{d}$ के चारों मानों का योग कर लीजिए। $\frac{c}{d}$ का माध्य मान निकालने के लिए (योगफल को) चार से भाग दीजिए। यह मानते हुए कि आपके माप और परिकलन किसी सीमा तक परिशुद्ध ही थे, माध्य मान, दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध, 3.14 होगा। यदि आप अन्य वृत्तों पर प्रयोग करेंगे तब भी यह परिणाम सत्य रहेगा। वास्तव में, आपने वृत्तों से संबद्ध निम्नलिखित दो महत्त्वपूर्ण परिणामों का सत्यापन किया है :

I. वृत्तों की परिधि (c) और उनके व्यासों (d) का अनुपात $\left(\frac{c}{d}\right)$ वही होता है, अर्थात् सभी वृत्तों के लिए अचर होता है।

II. किसी वृत्त की परिधि का उसके व्यास से अनुपात दो दशमलव स्थानों तक शुद्ध 3.14 होता है।

13.8 संख्या π

हमने अभी-अभी देखा कि किसी वृत्त की परिधि उसके व्यास से एक अचर अनुपात में होती है। इस अचर अनुपात को ग्रीक अक्षर π (pi) से व्यक्त करते हैं। इस अक्षर को *पाई* बोला जाता है। इस प्रकार, यदि c और d क्रमशः वृत्त की परिधि और उसके व्यास को व्यक्त करे, तो $\frac{c}{d} = \pi$ होता है। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होते हैं:

परिधि $= \pi \times$ व्यास अर्थात् $c = \pi d$ (I)

परिधि $= \pi \times 2 \times$ त्रिज्या $= 2\pi \times$ त्रिज्या अर्थात् $c = 2\pi r$ (II)

I और II से हमें निम्न संबंध भी प्राप्त होते हैं :

$$d = \frac{c}{\pi} \text{ और } r = \frac{c}{2\pi} \qquad \text{(III)}$$

याद कीजिए कि 3.14, π का केवल एक सन्निकट मान है। इसलिए *सूत्र* I *अथवा* II *से परिकलित परिधि का मान भी एक सन्निकट मान ही है।* हम इस तथ्य की पुनरावृत्ति नहीं करेंगे किंतु आपको इसे कभी भूलना नहीं चाहिए। आप संभवत: सोच रहे होंगे कि π के दो दशमलव तक शुद्ध मान का प्रयोग करने की अपेक्षा इसका यथार्थ मान ज्ञात कर लेना अधिक अच्छा होगा। दुर्भाग्यवश, ऐसा संभव नहीं है। आप π का मान ट्रिलियन स्थानों तक क्यों न निकाल लें, यह तब भी सन्निकट मान ही रहेगा । आश्चर्य का कोई कारण नहीं! गणितज्ञों ने सिद्ध कर दिया है कि π परिमेय संख्या नहीं है। अत: इसे सांत (परिमित) अथवा असांत आवर्ती दशमलव के रूप में नहीं लिखा जा सकता।

π के विषय में इस तथ्य के कारण कुछ रोचक कार्य किए गए हैं। संपूर्ण विश्व में, व्यक्तियों ने प्रयास किया है कि वे अधिक-से-अधिक स्थानों तक π के मान का परिकलन करने में दूसरों को पराजित करें। सितंबर 1999 में टोक्यो विश्वविद्यालय के डॉ. कानादा (Kanada) ने π के 206,158,430,000 दशमलव अंकों का परिकलन किया। सितंबर 2002 में उन्होंने अपने दल के सहयोग से π के 1.2411 ट्रिलियन अंकों (पहले की तुलना में छ: गुने से भी अधिक) का परिकलन कर अपना ही विश्व-कीर्तिमान तोड़ डाला। कुछ व्यक्तियों को यह कार्य अनुपयोगी प्रतीत हो सकता है, परंतु एक नियत अवधि में एक समान विधि से π के अधिक-से-अधिक अंकों का परिकलन कराना विभिन्न कंप्यूटर की शक्ति के परीक्षण का माध्यम है। π के मान में एक सौ अस्सी दशमलव अंक (दशमलव बिंदु के बाद के अंक) नीचे दिए गए हैं :

1415926535	8979323846	2643383279	5028841971
6939937510	5820974944	5923078164	0628620899
8628034825	3421170679	8214808651	3282306647
0938446095	5058223172	5359408128	4811174502
8410270193	8521105559		

यहाँ से π के 3, 4, 5 और 6 दशमलव स्थानों तक शुद्ध मान क्रमश: हैं :

3.142, 3.1416, 3.14159 और 3.141593

प्राचीन काल के गणितज्ञों ने π के विभिन्न निकटतम मानों का प्रयोग किया। बेबीलोनियावासी π के अत्यंत स्थूल (rough) मान 3 का प्रयोग करते थे। आरंभिक यूनानी मान $\frac{22}{7}$ का प्रयोग करते थे। आर्किमिडीज़ (250 ईसा पूर्व के लगभग) ने सिद्ध किया कि π का मान $3\frac{1}{7}$ और $3\frac{10}{71}$ के बीच कुछ होता है। भारतीय गणितज्ञ आर्यभट (476 - 550) ने π का मान $\frac{62832}{20000}$ बताया, जो चार दशमलव स्थानों तक शुद्ध बैठता था। इससे पूर्व के सभी मान कम परिशुद्ध थे।

परिकलन में सुविधा की दृष्टि से जब तक अन्यथा न कहा जाए, हम π का मान $\frac{22}{7}$ लेंगे।

उदाहरण 10 : व्यास 35 cm वाले एक वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $c = \pi d$ होता है।

यहाँ, $d = 35$ cm है। अत: $\pi = \frac{22}{7}$ लेने पर,

$$c = \frac{22}{7} \times 35 \text{ cm} = 110 \text{ cm}$$

अत:, वृत्त की परिधि 110 cm है।

उदाहरण 11 : साइकिल के उस पहिए की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 3.7 dm है। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

हल : हम जानते हैं कि $c = 2\pi r$ होता है।

यहाँ, $r = 3.7$ dm है। $\pi = 3.14$ लेने पर,

$$c = 2 \times 3.14 \times 3.7 \text{ dm} = 23.236 \text{ dm}$$

अत:, साइकिल के पहिए की परिधि 23.236 dm है।

उदाहरण 12 : गारे के वृत्ताकार गड्ढे का व्यास ज्ञात कीजिए यदि उसकी परिधि 220 cm है।

हल : हम जानते हैं कि $d = \frac{c}{\pi}$ होता है। यहाँ, $c = 220$ cm है। $\pi = \frac{22}{7}$ लेने पर,

$$d = \frac{220}{\frac{22}{7}} \text{ cm} = \frac{220 \times 7}{22} \text{ cm} = 70 \text{ cm}$$

अर्थात्, गारे के गड्ढे का व्यास 70 cm है।

उदाहरण 13 : हमारे पास ठीक उतनी रस्सी है जो त्रिज्या 100 m वाले एक वृत्ताकार क्षेत्र को घेरने के लिए पर्याप्त है। दिखाइए कि उपर्युक्त रस्सी से केवल 7 मी अधिक लंबी रस्सी से 101 मी त्रिज्या वाले वृत्ताकार क्षेत्र को घेरा जा सकता है।

हल : आइए, पहले यह ज्ञात करें कि 100 m त्रिज्या वाले वृत्ताकार क्षेत्र को घेरने के लिए कितनी रस्सी की आवश्यकता है। सूत्र $c = 2\pi r$ से वांछित रस्सी की लंबाई $2\pi \times 100$ m हुई। इसका अर्थ हुआ कि हमारे पास 200π m लंबी रस्सी है।

इसी प्रकार, 101 m त्रिज्या वाले वृत्त को घेरने के लिए आवश्यक रस्सी की लंबाई $2\pi \times 101$ m या 202π m है।

दोनों रस्सियों की लंबाइयों में अंतर = 202π m – 200π m = 2π m या $\frac{44}{7}$ m जो 7 m से कम है। इस प्रकार, पहली रस्सी से 7 m अधिक लंबी रस्सी से हम बड़े वृत्त को घेर सकते हैं।

प्रश्नावली 13.4

जब तक कि अन्यथा न कहा जाए, $\pi = 3.14$ का प्रयोग तभी कीजिए जब मान दशमलव संख्याओं में दिए गए हों।

1. उस वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसका व्यास है:
   (i) 14 cm (ii) 11 dm (iii) 20 m
2. उस वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या है:
   (i) 2.5 cm (ii) 1.50 dm (iii) 0.25 m
3. उस वृत्त का व्यास निकालिए जिसकी परिधि है:
   (i) 12.56 cm (ii) 88 dm (iii) 15.70 m
4. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि है:
   (i) 6.28 cm (ii) 2200 dm (iii) 308 m
5. एक सिक्के का व्यास 2 cm है। उसकी परिधि ज्ञात कीजिए।
6. खाने की किसी प्लेट की परिधि 75.36 cm है। उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
7. समान केंद्र वाले दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 350 m और 490 m हैं। इनकी परिधियों में कितना अंतर है?
8. किसी साइकिल के पहिए का व्यास 70 cm है। ज्ञात कीजिए कि 110 m की दूरी तय करने में पहिया कितनी बार घूम जाएगा।

9. घास के मैदान में पानी की फुहार छोड़ने वाला यंत्र सभी दिशाओं में 7 m की दूरी तक पानी फेंकता है। भीगी घास के बाहरी घेरे की लंबाई ज्ञात कीजिए।

10. एक कोल्हू का बैल 3 m लंबी रस्सी से बँधा हुआ है। 14 चक्करों में वह कितनी दूरी तय करता है?.

11. पतले तार का एक वृत्ताकार टुकड़ा भुजा 6.25 cm वाले वर्ग में रूपांतरित किया जाता है। यदि इसकी लंबाई न कम हो और न अधिक, तो वृत्ताकार तार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

12. दो पहियों की त्रिज्याओं में अनुपात 3:4 है। इनकी परिधियों में क्या अनुपात है?

13. पतले तार का एक टुकड़ा भुजा 31.4 dm वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार में है। तार में कमी हुए बिना, इसे एक छल्ले के आकार में मोड़ा गया है। छल्ले का व्यास ज्ञात कीजिए।

14. व्यास 150 cm वाले किसी कुँए के चारों ओर पत्थर की एक मेड़ बनी है। यदि इस मेड़ के बाहरी घेरे की लंबाई 660 cm हो, तो इस मेड़ की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

15. एक वृत्ताकार तालाब के अनुदिश 90 cm चौड़ी एक पटरी बनी हुई है। एक व्यक्ति पटरी के बाहरी किनारे के अनुदिश 66 cm लंबे डग भरता हुआ चल रहा है। 400 डगों में वह एक चक्कर पूरा कर लेता है। तालाब की त्रिज्या कितनी है?

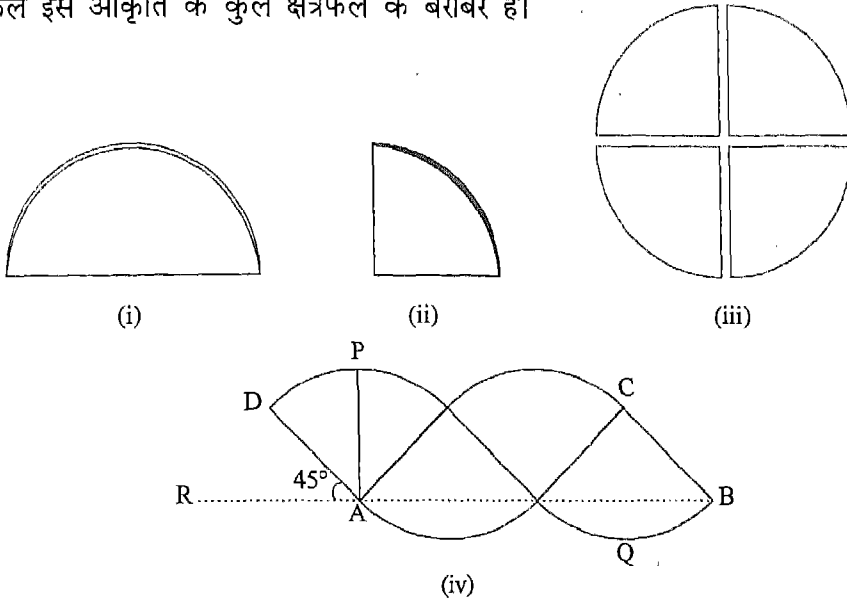
[*संकेत :* तालाब की त्रिज्या = पटरी के बाहरी किनारे की त्रिज्या – पटरी की चौड़ाई]

16. चंद्रमा पृथ्वी से लगभग 384000 km दूर है। पृथ्वी के परितः चंद्रमा का परिपथ लगभग वृत्ताकार है। पृथ्वी के परितः एक पूरे चक्कर में चंद्रमा के परिपथ की परिधि ज्ञात कीजिए। [$\pi = 3.14$ लीजिए।]

17. पहली तीन विषम संख्याओं 1, 3 और 5 से बनी संख्या 113355 लीजिए। इसके प्रथम तीन अंकों (113) को हर और शेष तीन अंकों को अंश मानते हुए एक अन्य संख्या $\frac{355}{113}$ बनाइए। इस संख्या का दशमलव निरूपण कीजिए। इस दशमलव निरूपण का π से क्या संबंध है?

13.9 वृत्त का क्षेत्रफल

जैसा कि आप जानते हैं, वृत्त रेखीय आकृति नहीं है। किंतु यह एक सरल, संवृत, परिमित समतल आकृति है। अतः वृत्त में एक समतल क्षेत्र अंतर्निहित (घिरा) होता है। वृत्त में अंतर्निहित क्षेत्र के परिमाण को वृत्त का *क्षेत्रफल* कहते हैं। अब हम एक ऐसा क्रियाकलाप करेंगे जिससे हमें वृत्त के क्षेत्रफल के लिए एक सूत्र प्राप्त करने में सहायता मिलेगी।

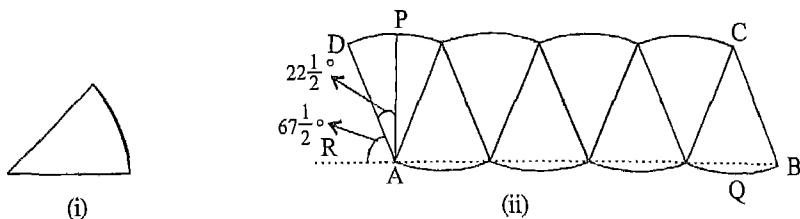
क्रियाकलाप 4 : एक अक्स कागज पर त्रिज्या r वाला कोई वृत्त खींचिए। वृत्त को काटकर एक चक्रिका प्राप्त कीजिए। इस चक्रिका के आधे भाग को शेष आधे भाग पर मोड़िए [आकृति 13.22 (i)] जिससे कि दोनों भाग एक-दूसरे पर संपाती हो जाएँ (को ठीक-ठीक ढक लें)। व्यास (जो प्राप्त अर्धवृत्तीय आकृति का सीधा किनारा है) के अनुदिश दबाकर मोड़ की रेखा प्राप्त कीजिए। पुनः मोड़कर वृत्त का चौथा भाग प्राप्त कीजिए [आकृति 13.22 (ii)]। किनारे वाली त्रिज्याओं पर दबाव डालकर मोड़ की रेखाएँ प्राप्त कीजिए। चक्रिका को खोलिए। मोड़ की रेखाओं पर काटकर चारों चतुर्थांशों को पृथक कीजिए [आकृति 13.22 (iii)]। इन चारों चतुर्थांशों को [आकृति 13.22 (iv)] के अनुसार रखिए। वृत्त का क्षेत्रफल इस आकृति के कुल क्षेत्रफल के बराबर है।

आकृति 13.22

ध्यान दीजिए कि :

(i) रेखाखंड AD और BC दोनों ही दिए गए वृत्त की त्रिज्या के बराबर हैं।

(ii) A और B के बीच के वक्ररेखीय (curvilinear) भाग की लंबाई परिधि की आधी और इसलिए, πr के बराबर है। इसी प्रकार, D और C के बीच का वक्ररेखीय भाग भी πr के बराबर है। P और D के बीच के वक्ररेखीय भाग की लंबाई चौथाई परिधि की आधी है। अतः, यह परिधि का आठवाँ भाग है।

(iii) $\angle PAD = 45^\circ$ और $\angle RAD = 45^\circ$ है।

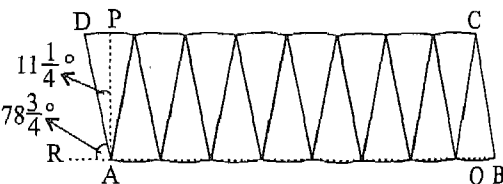
पुनः समान त्रिज्या वाला एक वृत्त लेकर पहले की भाँति इसे वृत्त के चतुर्थांश में मोड़ लीजिए। चतुर्थांश को मोड़कर वृत्त का अष्टांश (आठवाँ भाग) प्राप्त कीजिए। मोड़ की रेखा प्राप्त करने के लिए दबाइए [आकृति 13.23 (i)]। चक्रिका को खोलिए। मोड़ की रेखाओं पर काटकर आठों भाग अलग कर लीजिए। इनको आकृति 13.23 (ii) के अनुसार रखिए। वृत्त का क्षेत्रफल इस आकृति के कुल क्षेत्रफल के बराबर है।

आकृति 13.23

ध्यान दीजिए :

(i) रेखाखंड AD और BC दोनों ही दिए गए वृत्त की त्रिज्या के बराबर हैं।

(ii) A और B के बीच के वक्ररेखीय भाग की लंबाई परिधि की आधी और इसलिए, πr के बराबर है। इसी प्रकार, D और C के बीच का वक्ररेखीय भाग भी πr के बराबर है। P और D के बीच की वक्ररेखीय लंबाई घटकर परिधि के सोलहवें भाग के बराबर रह गई है। इस प्रकार, D अब P के अधिक निकट है। इसी प्रकार, अब B भी Q के अधिक निकट है। तात्पर्य यह है कि रेखाखंड DC और AB अपने-अपने बीच की वक्ररेखीय लंबाई (πr) के निकट आते जा रहे हैं।

(iii) $\angle PAD = 22\frac{1}{2}^\circ$ और $\angle RAD = 67\frac{1}{2}^\circ$ हो गया है। अतः, $\angle PAD$ घट रहा है और बढ़ रहा है।

पुनः समान त्रिज्या वाला एक वृत्त लेकर पहले की भाँति इसे वृत्त के सोलहवें भागों में मोड़ लीजिए। दबाव डालकर मोड़ की रेखा प्राप्त कीजिए। इन सोलह भागों को काटकर आकृति 13.24 की भाँति रखिए। वृत्त का क्षेत्रफल इस आकृति के कुल क्षेत्रफल के बराबर है।

आकृति 13.24

ध्यान दीजिए :

(i) रेखाखंड AD और BC दोनों ही दिए गए वृत्त की त्रिज्या के बराबर हैं।

(ii) पिछली स्थिति की तुलना में, D अब P के अधिक निकट है। इसी प्रकार, B भी अब Q के पहले से अधिक निकट है। तात्पर्य यह है कि DC और AB, πr के और निकट आते जा रहे हैं।

(iii) $\angle PAD = 11\frac{1}{4}°$ और $\angle RAD = 78\frac{3}{4}°$ हो गया है। इस प्रकार, $\angle PAD$ घटता जा रहा है और $\angle RAD$ बढ़ता ही जा रहा है।

ऊपर के प्रक्रम की पुनरावृत्ति कर, वृत्त को अधिकाधिक भागों में बाँटकर और भागों को आस-पास रखकर ऐसी आकृति प्राप्त की जा सकती है, जिसमें

(i) दो भुजाएँ (AD तथा BC) वृत्त की त्रिज्या के बराबर हैं।

(ii) AB और DC तथा   में अंतर अत्यंत न्यून है।

(iii) $\angle PAD$ इतना छोटा है कि इसे शून्य माना जा सकता है। $\angle RAD$, 90^0 के इतने निकट है कि इसे 90^0 का कोण समझा जा सकता है।

फलस्वरूप, दिए गए वृत्त के टुकड़ों को आस-पास रखने पर प्राप्त होने वाली आकृति, लंबाई और चौड़ाई क्रमशः r और r वाले आयत ABCD के लगभग संपाती होती है। अतः,

दिए गए वृत्त का क्षेत्रफल = टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल = आयत ABCD का क्षेत्रफल

$$= \pi r \times r = \pi r^2$$

इस प्रकार, त्रिज्या r वाले वृत्त के क्षेत्रफल A के लिए, हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:

$$A = \pi r^2 \text{ या वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi\,(\text{त्रिज्या})^2$$

यहाँ से निम्नलिखित सूत्र भी प्राप्त होता है :

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad \text{या त्रिज्या} = \sqrt{\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}}$$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि ऊपर के सूत्रों से ज्ञात किए क्षेत्रफल A या त्रिज्या r के मान केवल सन्निकट मान होते हैं। क्योंकि π का मान कुछ भी क्यों न ले लिया जाए, यह एक सन्निकट मान ही होगा। इस तथ्य का उल्लेख हम पुनः-पुनः नहीं करेंगे। समस्त व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए π का कोई सन्निकट मान पर्याप्त होता है। साथ ही, व्यापक रूप से हम शब्द सन्निकट का प्रयोग करेंगे ही नहीं और मात्र वाक्यांश *वृत्त का क्षेत्रफल* ही प्रयोग में लाएँगे।

उदाहरण 14 : त्रिज्या 1.20 cm वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [$\pi = 3.14$ लीजिए।]

हल : हम जानते हैं कि वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

यहाँ, $r = 1.20$ cm है। $\pi = 3.14$ लेने पर,

वृत्त का क्षेत्रफल $= 3.14 \times (1.20)^2$ cm^2 $= 4.52$ cm^2, दो दशमलव स्थान तक शुद्ध

अतः, वृत्त का वांछित क्षेत्रफल 4.52 cm^2 है।

उदाहरण 15 : क्षेत्रफल 5544 cm^2 वाले वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{\dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}}$

यहाँ, क्षेत्रफल $= 5544$ cm^2 है। $\pi = \dfrac{22}{7}$ लेते हुए,

$$\text{वृत्त की त्रिज्या (cm में)} = \sqrt{\frac{5544}{\frac{22}{7}}} = \sqrt{\frac{5544 \times 7}{22}} = \sqrt{252 \times 7}$$

$$= \sqrt{6 \times 6 \times 7 \times 7} = 42$$

इस प्रकार, वृत्त की त्रिज्या 42 cm है।

उदाहरण 16 : एक वृत्ताकार कालीन का व्यास 1.4 m है। यह मध्य में चितकबरा है और किनारे पर इसमें 20 cm चौड़ी धारीदार किनारी है (आकृति 13.25)। धारीदार किनारे वाले भाग का क्षेत्रफल निकटतम cm^2 तक ज्ञात कीजिए।

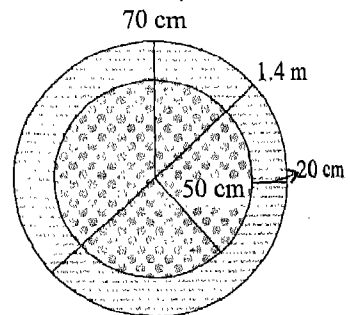
हल : कालीन की त्रिज्या = कालीन के व्यास का आधा $= \dfrac{1}{2} \times 1.4 \text{ m} = 0.7 \text{ m} = 70 \text{ cm}$

चितकबरे भाग की त्रिज्या = कालीन की त्रिज्या – धारीदार किनारी की चौड़ाई

$$= 70 \text{ cm} - 20 \text{ cm} = 50 \text{ cm}$$

अब कालीन का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \dfrac{22}{7} \times 70 \times 70$ cm^2

$$= 15400 \text{ cm}^2$$

चितकबरे भाग का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \dfrac{22}{7} \times 50 \times 50$ cm^2

आकृति 13.25

$$= \frac{55000}{7} \text{ cm}^2$$

$$= 7857 \text{ cm}^2 \text{ (निकटतम cm}^2 \text{ तक)}$$

अत:, धारीदार किनारी वाले भाग का क्षेत्रफल (निकटतम cm^2 तक)

= कालीन का क्षेत्रफल – चितकबरे भाग का क्षेत्रफल

$= 15400 \text{ cm}^2 - 7857 \text{ cm}^2 = 7543 \text{ cm}^2$

उदाहरण 17 : 880 cm परिधि वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि परिधि c, संबंध $c = 2\pi r$ से प्राप्त होती है, जहाँ r त्रिज्या है। यहाँ $c = 880$ cm, जिससे

$$880 = 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times r \qquad \left[\pi = \frac{22}{7} \text{ लेकर}\right]$$

या $$r = \frac{880 \times 7}{2 \times 22} = 140$$

अत:, दिए गए वृत्त की त्रिज्या 140 cm है। अब त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल A है:

$$A = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 140^2 \text{ cm}^2$$

$$= 22 \times 140 \times 20 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{22 \times 140 \times 20}{10000} \text{ m}^2 \qquad [\text{क्योंकि } 1\text{m}^2 = 10000 \text{ cm}^2]$$

$$= \frac{616}{100} \text{ m}^2 = 6.16 \text{ m}^2$$

इस प्रकार, दिए गए वृत्त का क्षेत्रफल 6.16 m^2 है।

टिप्पणी : प्राय: उत्तर को उन्हीं मात्रकों में लिखा जाता है जो प्रश्न में दिए गए हों। परंतु यदि संख्याएँ बड़ी हों, तो उत्तर को बड़े मात्रकों में बदला जा सकता है।

***मित्रों के साथ मिलकर कीजिए* 3 :** A पर समकोण वाला कोई समकोण त्रिभुज ABC बनाइए। भुजाओं AB, BC और CA पर अर्धवृत्त बनाइए (आकृति 13.26)।

(i) AB और AC को आधार मानकर बने अर्धवृत्तों

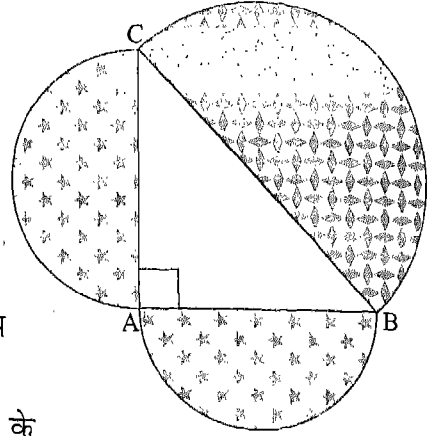
आकृति 13.26

(i) AB और AC को आधार मानकर बने अर्धवृत्तों के क्षेत्रफलों का योग निकालिए।

(ii) कर्ण पर बने अर्धवृत्त का क्षेत्रफल निकालिए।

(iii) ऊपर (i) और (ii) में क्या संबंध दिखाई देता है? यह क्रियाकलाप अन्य समकोण त्रिभुजों के लिए भी कीजिए।

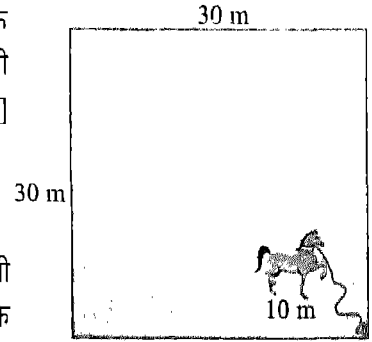
(iv) अपने अवलोकित परिणाम को पाइथागोरस प्रमेय की भाँति अभिव्यक्त कीजिए।

(v) ऊपर जैसे क्रियाकलाप, (i) से (iv) तक, अर्धवृत्तों के स्थान पर समबाहु त्रिभुज लेकर कीजिए।

प्रश्नावली 13.5

1. उस वृत्त का क्षेत्रफल निकालिए जिसकी त्रिज्या है:
   (i) 21 cm (ii) 49 dm (iii) 217 cm
2. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास है:
   (i) 20 cm (ii) 9.8 dm (iii) 200 cm
3. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल है:
   (i) 154 cm^2 (ii) 616 dm^2 (iii) 12474 cm^2
4. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल है:
   (i) 1386 cm^2 (ii) $\frac{2200}{7}$ dm^2 (iii) cm^2
5. का मान 3.14 लेते हुए, उस वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल है:
   (i) 314 cm^2 (ii) 7850 dm^2 (iii) 4710 cm^2
6. 10 cm व्यास वाली एक प्लेट का क्षेत्रफल निकालिए।
7. एक बैल किसी खंभे से 10 m लंबी रस्सी से बँधा हुआ है। बैल इस प्रकार चल रहा है कि रस्सी तनी हुई रहती है। रस्सी जितनी भूमि के ऊपर से जाती है, उस भूमि का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. एक उल्कापिंड एक गाँव के पास गिरता है। इसके गिरने से 200 m व्यास का एक वृत्ताकार गड्ढा बन जाता है। भूमि के प्रभावित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. किसी 30 m × 30 m वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने में गड़े खंभे से कोई घोड़ा 10 m लंबी एक रस्सी से बँधा हुआ है (आकृति 13.27)। [$\pi = 3.14$ लीजिए।]

   (i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें घोड़ा घास चर सकता है।

   (ii) यदि रस्सी 10 m लंबी होने के स्थान पर 20 m लंबी होती, तो यह ज्ञात कीजिए कि चरे जाने वाले भाग के क्षेत्रफल में कितनी वृद्धि होती।

आकृति 13.27

10. ऊपर के प्रश्न के भाग (i) में, यदि खंभा मैदान के एक किनारे (भुजा) के लगभग मध्य में गड़ा होता, तो क्षेत्रफल क्या होता?

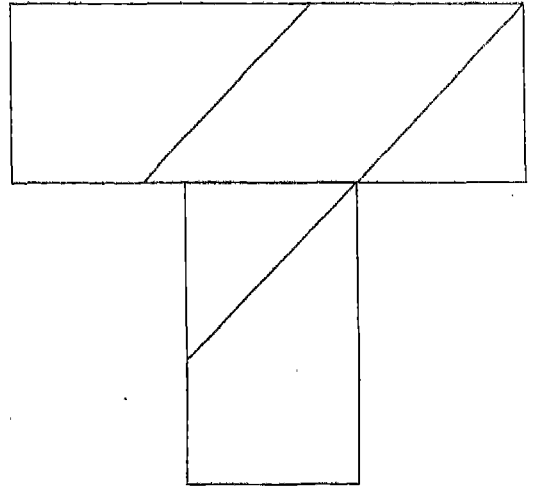
11. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि भुजा 11 m वाले वर्ग के परिमाप के बराबर है।

12. 88 cm परिमाप वाले वर्ग और 88 cm परिधि वाले वृत्त में से किसका क्षेत्रफल अधिक है?

13. भुजाओं 30 cm और 40 cm वाली, धातु की एक आयताकार शीट में से जितनी बड़ी से बड़ी वृत्ताकार शीट काटी जा सकती थी, काट ली गई है। शेष शीट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

14. 150 cm व्यास वाले एक कुएँ के चारों ओर 30 cm चौड़ी एक मेड़ बनी हुई है। मेड़ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. दो वृत्तों के क्षेत्रफल 25:36 के अनुपात में हैं। इनकी परिधियों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

16. एक वृत्त की त्रिज्या दुगुनी कर दी गई। प्राप्त वृत्त के क्षेत्रफल का दिए गए वृत्त के क्षेत्रफल से क्या अनुपात है?

आकृति 13.28

याद रखने योग्य बातें

1. किसी समतल क्षेत्र का परिमाण उसका क्षेत्रफल कहलाता है।
2. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × शीर्षलंब (ऊँचाई) या $A = b \times h$
3. त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × शीर्षलंब (ऊँचाई) या $A = \frac{1}{2} b \times h$
4. समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधारों का योग) × शीर्षलंब (ऊँचाई) या $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \times h$
5. वृत्त का परिमाप उसकी परिधि कहलाता है।
6. किसी वृत्त की परिधि (c) और उसके व्यास (d) का अनुपात $\frac{c}{d}$ सभी वृत्तों के लिए एक अचर संख्या होती है।
7. वृत्त की परिधि और उसके व्यास का अचर अनुपात $\frac{c}{d}$ यूनानी अक्षर π से व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार, $\frac{c}{d} = \pi$ लिखा जाता है। दो दशमलव स्थानों तक π का शुद्ध मान 3.14 है।
8. संख्या π एक परिमेय संख्या नहीं है। π का एक बहु-प्रयुक्त परिमेय सन्निकट मान $\frac{22}{7}$ है।
9. वृत्त की परिधि $= 2\pi \times$ (त्रिज्या) या $c = 2\pi r$
10. वृत्त की परिधि $= \pi \times$ (व्यास) या $c = \pi d$
11. वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi \times$ (त्रिज्या)^2 या $A = \pi r^2$
12. वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{\text{क्षेत्रफल} \div \pi}$ या $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

अध्याय

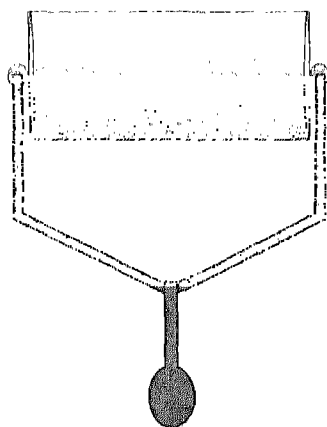
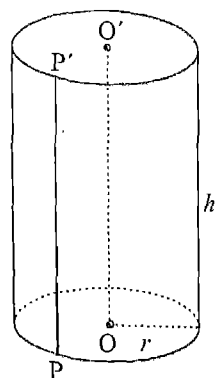
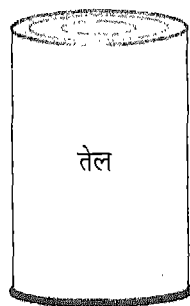
पृष्ठीय क्षेत्रफल

14.1 भूमिका

आप पृष्ठीय क्षेत्रफल की संकल्पना से अपनी पिछली कक्षाओं से ही परिचित हैं। कक्षा VII में, आप दो सरलतम त्रिविमीय आकृतियों (ठोस आकृतियों) घनाभों एवं घनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों के बारे में पढ़ चुके हैं। याद कीजिए कि लंबाई l, चौड़ाई b एवं ऊँचाई h मात्रकों वाले घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $2(lb + bh + hl)$ वर्ग मात्रक होता है तथा भुजा (कोर) l मात्रक वाले घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $6l^2$ वर्ग मात्रक होता है। इस अध्याय में, हम तीन सुपरिचित ठोस आकृतियों–बेलन, शंकु एवं गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफलों के बारे में अध्ययन करेंगे। चूँकि इन ठोस वस्तुओं का पृष्ठ प्रायः वक्रीय होता है, इसलिए जब हम इनके पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं, तो कुछ कठिनाइयाँ आती हैं। इन कठिनाइयों को दूर करने के लिए, हम एक तुल्य समतलीय क्षेत्र ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं जो संबंधित वक्रीय पृष्ठों के क्षेत्रफल निकालने में सहायक होते हैं।

इन ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों के सूत्र अति उपयोगी हैं, क्योंकि दैनिक जीवन में हमें बेलन, शंकु एवं गोले जैसी वस्तुएँ प्रत्येक स्थान पर मिल जाती हैं। इन सूत्रों में, संख्या π का उपयोग होता है। इस अध्याय में भी हम π का मान $\frac{22}{7}$ ही लेंगे, जब तक कि अन्यथा न कहा जाए।

14.2 लंब वृत्तीय बेलन

टीन का एक गोलाकार डिब्बा, सड़क (या बगीचे) को चौरस करने वाला रोलर (roller), गोल स्तंभ, तार (केबल), जल के पाइप इत्यादि (आकृति 14.1), दैनिक जीवन में मिलने वाली कुछ ऐसी वस्तुएँ हैं, जो हमारे मस्तिष्क में लंब वृत्तीय बेलन (right circular cylinder) की संकल्पना का सुझाव देती हैं, जो एक ज्यामितीय आकृति है।

आकृति 14.1 आकृति 14.2

आकृति 14.2 में, एक लंब वृत्तीय बेलन की रूप-रेखा दी गई है। यह हमें एक लंब वृत्तीय बेलन की उन ज्यामितीय पदों में व्याख्या करने में, सहायता करती है, जिनसे हम पहले से परिचित हैं।

लंब वृत्तीय बेलन के दो समतल सिरे हैं। प्रत्येक समतल सिरा वृत्तीय आकार का है, अर्थात् प्रत्येक सिरा एक वृत्तीय क्षेत्र है। ये दोनों वृत्तीय क्षेत्र परस्पर सर्वांगसम हैं और समांतर हैं। इनमें से प्रत्येक सिरा बेलन का एक *आधार* (*base*) कहलाता है। दोनों समतल सिरों के केंद्रों को जोड़ने वाला रेखाखंड OO′ बेलन की *अक्ष* (*axis*) कहलाती है। ध्यान दीजिए कि OO′ दोनों समतल सिरों में से प्रत्येक में स्थित सभी रेखाखंडों पर लंब है जो O या O′ से होकर जाते हैं। दूसरे शब्दों में, यह इन वृत्तीय सिरों (आधारों) पर *लंब* है। इसी कारण, हम इस आकृति को *लंब वृत्तीय बेलन* (*right circular cylinder*) कहते हैं।

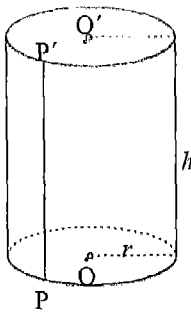
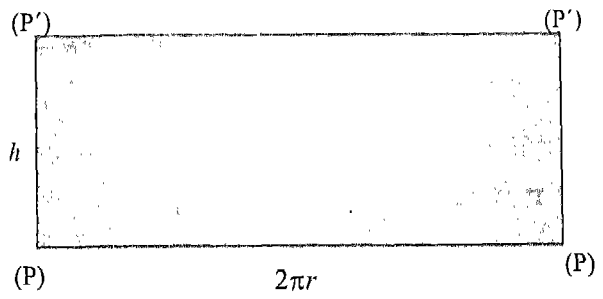
उपर्यक्त दोनों सिरों को मिलाने वाली एक *वक्र* (सपाट नहीं) पृष्ठ है और हम इसे लंब वृत्तीय बेलन की *पार्श्व* (या *पार्श्वीय*) पृष्ठ (*lateral surface*) कहते हैं। ध्यान दीजिए कि निचले सिरे (आधार) के वृत्त के प्रत्येक बिंदु P के लिए ऊपरी सिरे के वृत्त पर एक बिंदु P' ऐसा होता है कि PP' रेखाखंड OO' के समांतर है। जैसे-जैसे P निचले वृत्त के अनुदिश चलता है, रेखाखंड PP' बेलन की पार्श्व (या वक्र) पृष्ठ का निर्माण करता है। वृत्त (आधार) की *त्रिज्या* r तथा रेखाखंड OO' की लंबाई h वे दो लंबाइयाँ हैं जो बेलन की माप (size) का निर्धारण करती हैं। h बेलन की *ऊँचाई* (*height*) कहलाती है। ध्यान दीजिए कि PP' = OO' है।

टिप्पणी : लंब वृत्तीय बेलन की उपर्युक्त व्याख्या हमारे मस्तिष्क में दो भिन्न परंतु संबंधित आकृतियों का आभास कराती हैं। ये हैं: *खोखला बेलन* और *ठोस बेलन* वास्तव में, एक लंब वृत्तीय बेलन से हमारा आशय एक खोखले लंब वृत्तीय बेलन से होता है। यह त्रिविमीय आकाश (space) में बनी वह आकृति है जो बेलन की केवल पार्श्व पृष्ठ से बनती है। लंब वृत्तीय बेलन से आकाश के घिरे भाग को उस बेलन का *अभ्यंतर* (*interior*) कहते हैं। एक लंब वृत्तीय बेलन और उसका अभ्यंतर मिलकर एक *लंब वृत्तीय बेलनाकार क्षेत्र* कहलाता है, जिसे प्राय: एक *ठोस लंब वृत्तीय बेलन* कहा जाता है। सामान्य प्रयोग में, शब्द लंब वृत्तीय बेलन खोखले लंब वृत्तीय बेलन एवं ठोस लंब वृत्तीय बेलन दोनों के लिए ही प्रयोग किया जाता है। व्यावहारिक रूप से, इससे कोई कठिनाई नहीं होगी, क्योंकि यह संदर्भ से स्पष्ट हो जाएगा कि यह शब्द किस अर्थ में प्रयोग किया गया है।

साथ ही, जब तक कि अन्यथा न कहा जाए, हम प्राय: शब्द 'बेलन' का प्रयोग 'लंब वृत्तीय बेलन' के अर्थ में करेंगे।

14.3 लंब वृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए अब एक बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करने का प्रयत्न करें। इसके लिए, हम निम्नलिखित क्रियाकलाप करते हैं:

क्रियाकलाप 1 : आइए ऊँचाई h एवं आधार त्रिज्या r वाले एक लंब वृत्तीय बेलन को लें [आकृति 14.3 (i)] । इस प्रकार, बेलन के प्रत्येक सिरा त्रिज्या r वाला एक वृत्त है। ध्यान दीजिए कि प्रत्येक वृत्तीय किनारे की लंबाई $2\pi r$ है तथा प्रत्येक समतल सिरे का क्षेत्रफल πr^2 है।

आकृति 14.3

आइए अब पार्श्व (वक्र) पृष्ठ पर विचार करें। क्या इसका कोई क्षेत्रफल है? यदि हो, तो इसे कैसे ज्ञात करें। यदि वक्र पृष्ठ को किसी प्रकार सपाट, अर्थात् एक समतल क्षेत्र [आकृति 14.3 (ii)], बना लिया जाए, तो वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करने में कोई कठिनाई नहीं होगी। हम निम्न प्रकार आगे बढ़ते हैं:

हम चौड़ाई h वाली कागज की एक पट्टी लेते हैं, ताकि हम इसे ऊँचाई h वाले बेलन के अनुदिश उसे ढकने के लिए लपेट सकें। वक्र पृष्ठ पर उसे निर्मित करने वाली एक रेखाखंड PP' को अंकित कीजिए। कागज की पट्टी के किनारे को अब PP' के अनुदिश रखिए और उसे मजबूती से पकड़े रहिए। अब पट्टी को बेलन के चारो ओर तब तक लपेटिए जब तक आप PP' पर दुबारा न पहुँच जाएँ। इस स्थिति में, पट्टी को PP' के अनुदिश काट लीजिए। अब कटी हुई पट्टी को हटाकर फैला लीजिए। [आकृति 14.3 (ii)] । आप क्या देखते हैं? यह कटी हुई पट्टी किस आकार की है? यह एक आयत है। इस आयत की चौड़ाई क्या है? स्पष्ट है, यह h है। इस आयत की लंबाई क्या है? ध्यान दीजिए कि इस आयत की लंबाई से बेलन के वृत्तीय सिरे के किनारे को ठीक एक बार लपेटा जा चुका है। साथ ही, वृत्तीय सिरे की त्रिज्या r है। इस प्रकार, आयत की लंबाई त्रिज्या r वाले वृत्त की परिधि के बराबर है। अर्थात्,

आयत की लंबाई $= 2\pi r$

अत:, आयत का क्षेत्रफल $= 2\pi r \times h = 2\pi rh$

यह सरलता से देखा जा सकता है कि

बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = लंबाई $2\pi r$ और चौड़ाई h वाले आयत का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

इस प्रकार, आधार त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

प्रत्येक सिरे का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

तथा संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

ध्यान दीजिए कि संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एक ठोस बेलन का होता है।

टिप्पणी : इन सूत्रों की सत्यता की जाँच, हम एक कागज लेकर और उसे एक बेलन के रूप में मोड़कर भी कर सकते हैं।

अब हम इन सूत्रों का प्रयोग स्पष्ट करने के लिए, कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : आधार त्रिज्या 3 cm और ऊँचाई 5 cm वाले एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल : हमें प्राप्त है:

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh = 2 \times 3.14 \times 3 \times 5 \text{ cm}^2$

$= 94.2 \text{ cm}^2$

उदाहरण 2 : ऊँचाई 14 cm वाले एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 88 cm^2 है। बेलन के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त हैं :

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

अत:, $$88 = 2 \times \frac{22}{7} \times r \times 14$$

या $$r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22 \times 14} = 1$$

इस प्रकार, बेलन के आधार की त्रिज्या 1cm है।

उदाहरण 3 : धातु की एक चादर से ऊँचाई 1 m और आधार व्यास 140 cm वाली एक बंद टंकी बनाई जानी है। इसके लिए कितने वर्ग मीटर धातु की चादर की आवश्यकता होगी?

हल : यहाँ, व्यास = 140 cm

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{140}{2} \text{ cm} = 70 \text{ cm} = \frac{70}{100} \text{ m} = \frac{7}{10} \text{ m}$

ऊँचाई $h = 1$ m

$\therefore$ टंकी का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(h + r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{10}\left(1 + \frac{7}{10}\right) \text{m}^2$$

$$= \frac{2 \times 22 \times 17}{100} \text{m}^2 = 7.48 \text{ m}^2$$

इस प्रकार, वांछित धातु की चादर का क्षेत्रफल 7.48 m^2 है।

उदाहरण 4 : धातु के एक पाइप की आंतरिक और बाहरी त्रिज्याएँ क्रमश: 3 cm और 3.5 cm हैं (आकृति 14.4)। यदि पाइप की लंबाई 56 cm है, तो उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल : पाइप का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh = 2\pi \times 3 \times 56 \text{ cm}^2$ (1)

पाइप का बाहरी वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi \times 3.5 \times 56 \text{ cm}^2$ (2)

दोनों सिरों का क्षेत्रफल $= 2\pi [(3.5)^2 - (3)^2] \text{ cm}^2 = 2\pi \times 6.5 \times 0.5 \text{ cm}^2$ (3)

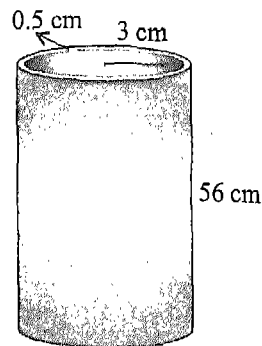
$\therefore$ संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= [(2\pi \times 3 \times 56) + (2\pi \times 3.5 \times 56) + (2\pi \times 6.5 \times 0.5)] \text{ cm}^2$

[(1), (2) और (3) से]

$= \pi (336 + 392 + 6.5) \text{ cm}^2$

$= \pi (734.5) \text{ cm}^2$

$= 3.14 \times 734.5 \text{ cm}^2$

$= 2306.33 \text{ cm}^2$

आकृति 14.4

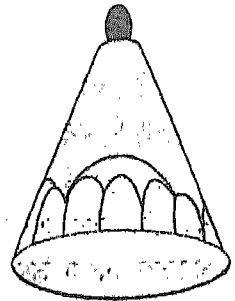
प्रश्नावली 14.1

1. किसी लंब वृत्तीय बेलन की आधार त्रिज्या 8 cm और और ऊँचाई 35 cm है। बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक लंब वृत्तीय बेलन के आधार की परिधि 176 cm है। यदि बेलन की ऊँचाई 1m हो, तो उसका पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक बंद वृत्तीय बेलन के आधार का व्यास 10 cm है और ऊँचाई 15 cm है। बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए) ।
4. एक बंद लंब वृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या 21 cm है और उसकी ऊँचाई 1m है। बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. किसी रोलर का व्यास 84 cm है और उसकी लंबाई 120 cm है। वह एक खेल के मैदान को ठीक एक बार समतल करने के लिए 500 संपूर्ण चक्कर लगाता है। खेल के मैदान का क्षेत्रफल m^2 में ज्ञात कीजिए।

   [*संकेत :* 1 चक्कर में रोलर द्वारा समतल किया गया क्षेत्रफल = रोलर का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल]

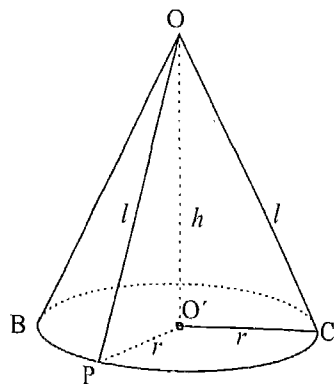
6. एक बेलनाकार स्तंभ का व्यास 50 cm है और उसकी ऊँचाई 3.5 m है। इस स्तंभ की वक्र पृष्ठ पर 12.50 रु प्रति m^2 की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
7. 35 cm ऊँचाई वाले एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 121 cm^2 है। उसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
8. एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4.4 m^2 है। यदि इस बेलन के आधार की त्रिज्या 0.7 m है, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
9. धातु का एक पाइप 77 cm लंबा है। इसके अनुप्रस्थ काट का आंतरिक व्यास 4 cm है तथा बाहरी व्यास 4.8 cm है। ज्ञात कीजिए, उसका
   (i) आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ii) बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
   (iii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल
10. एक वृत्ताकार कुएँ का आंतरिक व्यास 3.5 m है और वह 10 m गहरा है। ज्ञात कीजिए :
   (i) उसका आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
   (ii) 40 रु प्रति m^2 की दर से उसके आंतरिक वक्र पृष्ठ पर प्लास्तर कराने का व्यय
11. एक पाइप का बाहरी व्यास 1 m है और उसकी लंबाई 21 m है। ज्ञात कीजिए :
   (i) उसका बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
   (ii) 25 रु प्रति m^2 की दर से उसके बाहरी वक्र पृष्ठ पर पेंट कराने का व्यय
12. एक बेलनाकार बर्तन, जो ऊपर, से खुला है, का आधार व्यास 21 cm है और ऊँचाई 14 cm है। 5 रु प्रति 100 cm^2 की दर से उसके आंतरिक भाग पर टिन-प्लेटिंग कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

14.4 लंब वृत्तीय शंकु

एक आइसक्रीम शंकु, जोकर की टोपी, एक शंक्वाकार बर्तन, एक शंक्वाकार तंबू इत्यादि (आकृति 14.5) दैनिक जीवन में मिलने वाली कुछ ऐसी वस्तुएँ हैं, जो हमारे मस्तिष्क में लंब वृत्तीय शंकु (right circular cone) की संकल्पना का सुझाव देती हैं, जो एक ज्यामितीय आकृति है।

आकृति 14.5

आकृति 14.6 में, एक लंब वृत्तीय शंकु की रूप-रेखा दी गई है। यह हमें एक लंब वृत्तीय शंकु की उन ज्यामितीय पदों में व्याख्या करने में सहायता करती है, जिनसे हम पहले से ही परिचित हैं। इसे नीचे दिया जा रहा है :

आकृति 14.6

लंब वृत्तीय शंकु का एक *समतल सिरा* है, जो वृत्ताकार है, एक लंबवृत्तीय शंकु का समतल सिरा एक *वृत्तीय क्षेत्र* है। यह सिरा शंकु का *आधार* (*base*) कहलाता है। इस सिरे की त्रिज्या r बेलन के *आधार की त्रिज्या* या केवल *आधार त्रिज्या* (*base radius*) कहलाती है।

इसमें एक कोना (corner) भी है, जो शंकु का वह बिंदु है आकृति 14.6 में O जो उसके आधार से अधिकतम दूरी पर स्थित है। इसे शंकु का *शीर्ष* (*vertex*) कहते हैं। शीर्ष से आधार के वृत्तीय किनारे को मिलाने वाली एक *वक्र पृष्ठ* है। इसे *शंकु की पार्श्व या पार्श्वीय पृष्ठ* (*lateral surface*) भी कहते हैं।

यदि O शीर्ष है और O' आधार का केंद्र है, तो OO' शंकु की *अक्ष* (*axis*) कहलाती है तथा रेखाखंड OO' की लंबाई शंकु की *ऊँचाई* कहलाती है।

ध्यान दीजिए कि OO' आधार पर *लंब* है। इसी कारण, इस ठोस को एक *लंब वृत्तीय शंकु* (*right circular cone*) नाम दिया गया है।

बेलन की स्थिति की तरह, शंकु के आधार की त्रिज्या r तथा उसकी ऊँचाई h से शंकु की *माप* निर्धारित हो जाती है।

आप यह भी देख सकते हैं कि आधार के वृत्तीय किनारे पर स्थित प्रत्येक बिंदु P के लिए, रेखाखंड OP शंकु के वक्र पृष्ठ पर स्थित है। ऐसे रेखाखंडों OP में से प्रत्येक की लंबाई l शंकु की *तिर्यक ऊँचाई* (*slant height*) कहलाती है।

ध्यान दीजिए कि $\Delta OO'P$ एक समकोण त्रिभुज है जिसका समकोण शीर्ष O′ पर है (आकृति 14.6)।

अतः, हमें प्राप्त होता है:

$$l^2 = r^2 + h^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

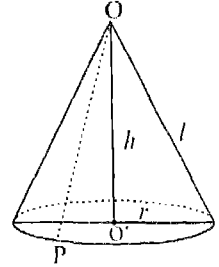
या $$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

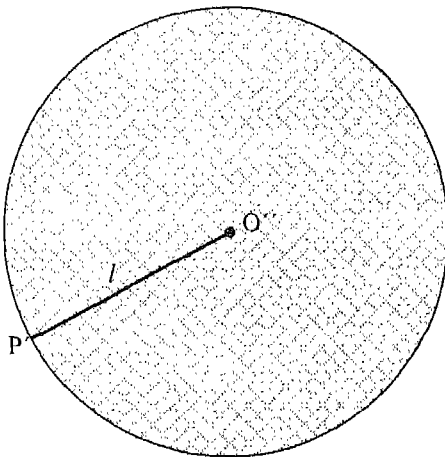
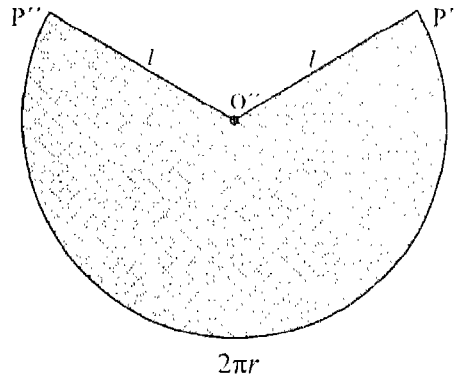
टिप्पणी : जैसा कि बेलन की स्थिति में था, लंब वृत्तीय शंकु की उपर्युक्त व्याख्या हमें दो भिन्न परंतु संबंधित आकृतियों का आभास कराती है। ये हैं : *खोखला शंकु* और *ठोस शंकु*। खोखला शंकु, शंकु की केवल पार्श्व पृष्ठ है, जबकि ठोस शंकु में पार्श्व पृष्ठ के अतिरिक्त शंकु का अभ्यंतर भी सम्मिलित होता है।

साथ ही, जब तक अन्यथा न कहा जाए, हम प्राय: शब्द 'शंकु' का प्रयोग 'लंब वृत्तीय शंकु' के अर्थ में करेंगे।

14.5 लंब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए अब शंकु के पृष्ठीय क्षेत्रफल को निर्धारित करने का प्रयत्न करें। इसके लिए, हम निम्न क्रियाकलाप करते हैं:

क्रियाकलाप 2 : ऊँचाई h और आधार त्रिज्या r वाला एक लंब वृत्तीय शंकु लीजिए [आकृति 14.7 (i)]। स्पष्ट है कि वृत्तीय किनारे की लंबाई $2\pi r$ है तथा आधार का क्षेत्रफल πr^2 है।

आकृति 14.7 (i)

आइए अब पार्श्व पृष्ठ (वक्रपृष्ठ) पर विचार करें। क्या इसका कोई क्षेत्रफल है? इसे कैसे ज्ञात किया जाए? यदि किसी प्रकार वक्र पृष्ठ को सपाट, अर्थात् एक समतल क्षेत्र, बना लिया जाए, तो वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने में कोई कठिनाई नहीं होगी। इसके लिए, हम अग्रलिखित प्रकार से आगे बढ़ते हैं :

आकृति 14.7 (ii)

आकृति 14.7 (iii)

मान लीजिए P वृत्तीय किनारे पर स्थित कोई बिंदु है। मान लीजिए $OP = l$ है। अब एक कागज पर केंद्र O'' और त्रिज्या l लेकर एक वृत्त खींचिए [आकृति 14.7(ii)]। वृत्त के अनुदिश कागज को काट लीजिए। इस प्रकार, हमें केंद्र O'' केंद्र और त्रिज्या l वाली कागज की एक चकती (disc) प्राप्त होती है। इस चकती को त्रिज्या P′O'' के अनुदिश काटिए।

अब हम त्रिज्या O''P′ को OP के अनुदिश इस प्रकार रखते हैं कि O′′ बिंदु O पर तथा P′ बिंदु P पर पड़े। अब O′′ को O पर और P′ को P पर रखते हुए, हम चकती को शंकु के चारों ओर लपेटते हैं। जब हम OP पर वापिस पहुँचते हैं, तो हम चकती का शेष भाग काट देते हैं। इस प्रकार, हमें त्रिज्या l वाले वृत्तीय क्षेत्र का एक भाग प्राप्त होता है [आकृति 14.7 (iii)] जो शंकु की वक्र पृष्ठ को पूर्णतया ढक लेता है।

ध्यान दीजिए कि इस भाग के चाप की लंबाई वृत्तीय किनारे की लंबाई, अर्थात् $2\pi r$ के बराबर है। अब हम वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ऐकिक विधि का प्रयोग करते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

जब चाप की लंबाई $2\pi l$ (अर्थात् चकती की परिधि) है, तो क्षेत्रफल $= \pi l^2$

$\therefore$ जब चाप की लंबाई $2\pi r$ है, तो क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi l^2}{2\pi l} \times 2\pi r = \pi r l$

इस प्रकार, त्रिज्या l वाली चकती के उस भाग का क्षेत्रफल, जो शंकु के वक्र पृष्ठ को पूर्णतया ढक लेता है, $\pi r l$ है। अत:,

$$\text{शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r l$$

साथ ही, *संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल*

$$= \pi r l + \pi r^2$$

$$= \pi r (l + r)$$

ध्यान दीजिए कि संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एक ठोस शंकु का होता है।

टिप्पणी : उपर्युक्त सूत्रों की सत्यता की जाँच एक कागज का वृत्तीय क्षेत्र [आकृति 14.7 (iii)] लेकर और फिर उसे एक शंकु के रूप में मोड़कर भी की जा सकती है। अब हम इन सूत्रों का प्रयोग करने के लिए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 5 : एक शंकु के आधार का व्यास 10.5 cm है और उसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है। इस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आधार का व्यास $= 10.5$ cm

अत:, उसकी त्रिज्या $r = \frac{10.5}{2}$ cm

तिर्यक ऊँचाई $l = 10$ cm (दिया है)

अत:, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl = \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{2} \times 10 \text{ cm}^2$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{105}{20} \times 10 \text{ cm}^2 = 165 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 6 : एक शंकु की ऊँचाई 16 cm तथा उसके आधार की त्रिज्या 12 cm है। इस शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल : यहाँ $h = 16$ cm और $r = 12$ cm है। मान लीजिए शंकु की तिर्यक ऊँचाई l है।

तब, $l^2 = r^2 + h^2$ से हम पाते हैं :

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

अत:, वृक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl = 3.14 \times 12 \times 20 \text{ cm}^2 = 753.6 \text{ cm}^2$

संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2$

$$= 753.6 \text{ cm}^2 + 3.14 \times 144 \text{ cm}^2$$

$$= 753.6 \text{ cm}^2 + 452.16 \text{ cm}^2 = 1205.76 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 7 : किसी शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 308 cm² और उसकी तिर्यक ऊँचाई 14 cm है। ज्ञात कीजिए: (i) आधार की त्रिज्या तथा (ii) उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल।

हल : (i) हमें प्राप्त है :

$$\pi r l = 308$$

या $\frac{22}{7} \times r \times 14 = 308$

या $r = \frac{308 \times 7}{22 \times 14} = 7$

अत:, आधार की त्रिज्या 7 cm है।

(ii) संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2 = (308 + \frac{22}{7} \times 49)\ \text{cm}^2 = (308 + 154)\ \text{cm}^2$

$= 462\ \text{cm}^2$

उदाहरण 8 : एक शंक्वाकार तंबू के आधार की त्रिज्या 12 m है और उसकी ऊँचाई 9 m है। यदि 1 वर्ग मीटर कैनवस का मूल्य 120 रु है, तो इस तंबू को बनाने में लगे कैनवस की लागत ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल: मान लीजिए शंकु की तिर्यक ऊँचाई l है। तब, $l^2 = r^2 + h^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$l = \sqrt{144+81}\ \text{m} = 15\ \text{m}$

अत:, तंबू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl = 3.14 \times 12 \times 15\ \text{m}^2$

$= 565.2\ \text{m}^2$

अत:, तंबू को बनाने के लिए आवश्यक कैनवस $= 565.2\ \text{m}^2$

$\therefore$ 120 रु प्रति m^2 की दर से कैनवस का मूल्य $= 120 \times 565.2$ रु $= 67824$ रु

प्रश्नावली 14.2

1. उस लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है तथा आधार त्रिज्या 7 cm है।
2. एक लंब वृत्तीय शंकु के आधार का व्यास 14 cm है तथा उसकी तिर्यक ऊँचाई 9 cm है। ज्ञात कीजिए : (i) उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल। (ii) उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल।
3. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि उसकी तिर्यक ऊँचाई 60 cm है तथा उसके आधार की त्रिज्या 25 cm है ($\pi = 3.14$ लीजिए) ।
4. उस शंकु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 9 dm है तथा आधार का व्यास 24 dm है।
5. एक शंकु के आधार की त्रिज्या 9 cm है और उसकी ऊँचाई 12 cm है। उस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

   [*संकेत :* पहले तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।]
6. एक शंक्वाकार तंबू 10 m ऊँचा है और उसके आधार की त्रिज्या 24 m है। ज्ञात कीजिए :

   (i) तंबू की तिर्यक ऊँचाई।

(ii) तंबू को बनाने में लगे कैनवस का मूल्य, यदि 1 m^2 कैनवस का मूल्य 90 रु है।

7. एक लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 528 cm^2 है। यदि इस शंकु की तिर्यक ऊँचाई 21 cm है, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) आधार की त्रिज्या (ii) उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

8. ऊँचाई 8 m और आधार त्रिज्या 6 m वाले एक शंक्वाकार तंबू बनाने के लिए 3 m चौड़ाई वाली कितनी लंबी त्रिपाल लगेगी? ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

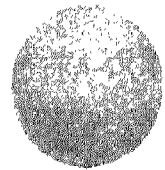
9. एक शंक्वाकार गुंबज की तिर्यक ऊँचाई और आधार व्यास क्रमश: 25 m और 14 m है। 210 रु प्रति 100 m^2 की दर से इसके वक्र पृष्ठ पर सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

10. धातु से बनी एक खुली शंक्वाकार टंकी 4 m गहरी है तथा उसके ऊपरी वृत्तीय सिरे का व्यास 6 m है। इस टंकी को बनाने में लगी धातु की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

11. एक जोकर की टोपी एक लंब वृत्तीय शंकु के आकार की है, जिसकी आधार त्रिज्या 7 cm तथा ऊँचाई 24 cm है। ऐसी 10 टोपियों के बनाने में लगे गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

12. तिर्यक ऊँचाई 12 cm वाले एक आइसक्रीम शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 113.04 cm^2 है। इस शंकु की आधार त्रिज्या ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

14.6 गोला

एक फुटबाल, क्रिकेट की गेंद, एक कंचा, इत्यादि (आकृति 14.8) दैनिक जीवन में मिलने वाली कुछ ऐसी वस्तुएँ हैं जो हमारे मस्तिष्क में गोले (sphere) की संकल्पना का सुझाव देती हैं, जो एक ज्यामितीय आकृति है।

आकृति 14.8

आकृति 14.9 में, एक गोले की रूप-रेखा दी गई है। यह हमें एक गोले की उन ज्यामितीय पदों में व्याख्या करने में सहायता करती है जिनसे हम पहले से ही परिचित हैं। एक गोला वह आकृति है जो आकाश में उन सभी बिंदुओं से मिलकर बनी होती है

जो एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर स्थित होते हैं। वह निश्चित बिंदु (इस आकृति में बिंदु O) गोले का केंद्र (*centre*) कहलाता है तथा 'समान दूरी' गोले की *त्रिज्या* (*radius*) कहलाती है। वह रेखाखंड, जो गोले के केंद्र से होकर जाते हुए गोले पर स्थित इसके अंत बिंदुओं से मिले, गोले का *व्यास* (*diameter*) कहलाता है। वृत्त की ही तरह, गोले में भी व्यास की लंबाई को भी गोले का व्यास कहते हैं। यह स्पष्ट है कि गोले का व्यास d और त्रिज्या r में निम्न संबंध है :

$$d = 2r$$

गोले की त्रिज्या r से गोले की माप (size) पूर्णतया निर्धारित हो जाती है।

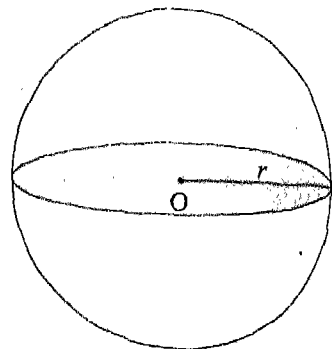
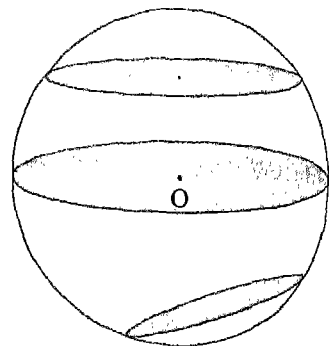
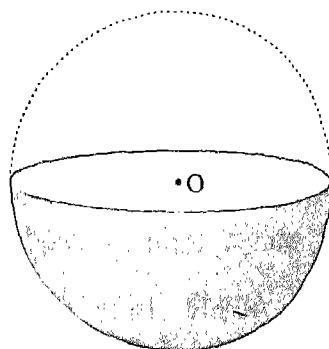
एक तल द्वारा गोले का कटा हुआ भाग (परिच्छेद) सदैव एक वृत्त होता है (आकृति 14.10)। केंद्र से होकर जाने वाले तल से गोले का सबसे बड़ा वृत्तीय परिच्छेद (भाग) प्राप्त होता है। इस सबसे बड़े परिच्छेद की त्रिज्या गोले की त्रिज्या के बराबर होती है। जैसे-जैसे हम केंद्र से दूर होते जाते हैं वृत्तीय परिच्छेद छोटा होता जाता है।

केंद्र से होकर जाने वाला तल गोले को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। इनमें से प्रत्येक भाग एक *अर्धगोला* (*hemisphere*) कहलाता है (आकृति 14.11)।

आकृति 14.9

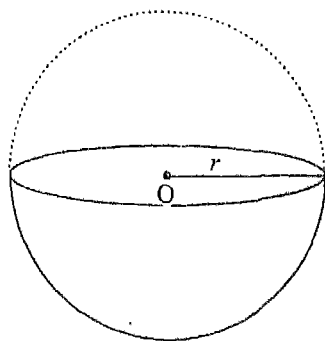
आकृति 14.10

आकृति 14.11

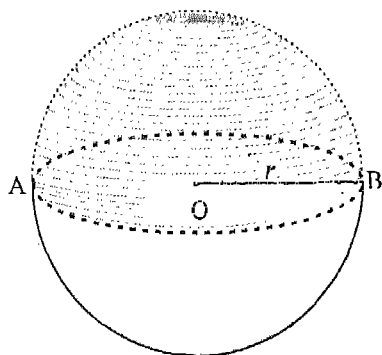
टिप्पणी : एक गोले की उपर्युक्त व्याख्या हमारे मस्तिष्क में दो भिन्न परंतु संबंधित आकृतियों *खोखला गोला* एवं *ठोस गोला* का सुझाव देती हैं। शब्द *गोले* से हमारा तात्पर्य खोखले गोले से होता है। यह वह आकृति होती है जो आकाश में स्थित उन सभी बिंदुओं से मिलकर बनती है जो एक निश्चित बिंदु (केंद्र) से एक दी हुई दूरी (त्रिज्या) पर स्थित होते हैं। ध्यान दीजिए कि गोले का केंद्र गोले का एक बिंदु

नहीं है। ठोस गोला आकाश में एक गोलाकार क्षेत्र (spherical region) होता है। इसमें गोले और उसका अभ्यंतर (अर्थात् उससे घिरा क्षेत्र) सम्मिलित होता है।

14.7 गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

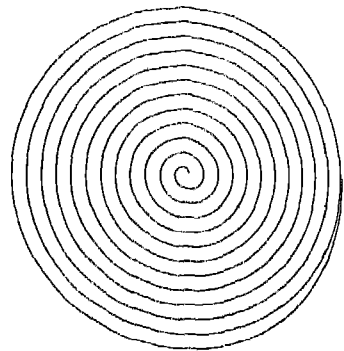
आइए अब एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल निर्धारित करने का प्रयत्न करें। इसके लिए, हम निम्नलिखित क्रियाकलाप करते हैं :

क्रियाकलाप 3 : केंद्र O और त्रिज्या r वाले एक गोले को लीजिए। मान लीजिए केंद्र O से होकर जाने वाला कोई तल इस गोले को दो अर्धगोलों में विभाजित करता है [आकृति 14.12 (i)]।

आकृति 14.12 (i)

आइए ऊपर वाले अर्धगोले की वक्र पृष्ठ पर विचार करें। क्या इसका कोई क्षेत्रफल है? यदि इस वक्र पृष्ठ को किसी प्रकार सपाट, अर्थात् एक समतल क्षेत्र के रूप में बना लिया जाए, तो इसमें कोई कठिनाई नहीं होगी। हम यह कार्य, बेलन एवं शंकु के लिए उनके चारो ओर कागज़ लपेटकर, सरलता से करने में समर्थ हो गए थे। परंतु यह कार्य यहाँ संभव नहीं है। इसलिए, यहाँ हम एक भिन्न प्रक्रिया अपनाते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

एक लंबी डोरी लीजिए। अर्धगोले के सबसे ऊपरी बिंदु से प्रारंभ करके, इस डोरी को अर्धगोले के चारो ओर एक सर्पिल (spiral) के रूप में लपेटिए [आकृति14.12 (ii)] । इसे तब तक जारी रखिए जब तक कि संपूर्ण अर्धगोला डोरी से ठक न जाए, (अर्धगोले की पृष्ठ पर गोंद का एक हल्का सा लेप डोरी को स्थिर रखने में सहायता कर सकता है)। अब अर्धगोले से डोरी को हटा लीजिए तथा इस लपेटी गई डोरी की लंबाई मापिए।

आकृति 14.12 (ii)

एक कागज पर त्रिज्या r (अर्थात गोले की त्रिज्या के बराबर त्रिज्या) का एक वृत्त खींचिए। आपको याद होगा कि इस वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 है।

अब पहले बताई गई डोरी लपेटनी की प्रक्रिया को त्रिज्या r के खींचे गए वृत्त पर इसी प्रकार की डोरी लेकर दोहराइए [आकृति 14.12 (iii)]। आप वृत्त के केंद्र से डोरी लपेटना प्रारंभ करके उसके चारो ओर डोरी लपेट सकते हैं। अब वृत्त से डोरी को हटा लीजिए और इस डोरी की लंबाई मापिए जिसने पूरे वृत्त को ढक लिया था। आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि अर्धगोले को ढकने में प्रयुक्त डोरी की लंबाई उस डोरी की लंबाई की लगभग *दुगुनी* है जो वृत्तीय क्षेत्र को ढकने में प्रयुक्त हुई है। इसमें बहुत कम अंतर जो आया है, वह लपेटने एवं ढकने में रह गए कुछ रिक्त स्थानों के कारण है। चूँकि दोनों स्थितियों में, डोरी की मोटाई बराबर है, इसलिए

आकृति 14.12 (iii)

अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 × वृत्त का क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

अत:, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 × अर्धगोले का क्षेत्रफल = $2 \times 2\pi r^2 = 4\pi r^2$

क्रियाकलाप 4 : त्रिज्या r का एक गोला लीजिए। एक कागज से त्रिज्या r वाली चार वृत्ताकार चकतियाँ (discs) काट लीजिए। स्पष्ट है कि प्रत्येक चकती का क्षेत्रफल πr^2 है।

अब चारों चकतियों को छोटे-छोटे टुकड़ों में काट लीजिए तथा गोले के पृष्ठ को इन टुकड़ों से ढकने का प्रयत्न कीजिए। इन टुकड़ों को जितना संभव हो सके एक-दूसरे के समीप रखिए, ताकि उनके बीच में कोई रिक्तता न रहे। आप यदि आवश्यक हो, तो और अधिक टुकड़े कर सकते हैं। आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि गोले के संपूर्ण पृष्ठ को ये चारों चकतियों के छोटे टुकड़े एक बार में पूरी तरह से ढक लेते हैं। शायद ही कोई बिना प्रयोग किया कोई टुकड़ा शेष रहेगा। इस प्रकार, हम पुन: कह सकते हैं कि

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$, जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

ध्यान दीजिए कि गोले की स्थिति में, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एक ही, अर्थात् $4\pi r^2$ होता है जहाँ, r गोले की त्रिज्या है। स्पष्ट है कि त्रिज्या r वाले अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $2\pi r^2$ है तथा इसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल है :

$2\pi r^2 + \pi r^2$ (आधार का क्षेत्रफल) अर्थात् $3\pi r^2$

ध्यान दीजिए कि संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ठोस अर्धगोले का होता है। आइए इन सूत्रों के प्रयोग को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 9 : एक गोले का व्यास 10 cm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल : गोले की त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times$ व्यास $= \frac{1}{2} \times 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$

अत:, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2 = 4 \times 3.14 \times 5^2 \text{ cm}^2 = 314 \text{ cm}^2$

उदाहरण 10 : एक ठोस अर्धगोले के पृष्ठ को उसके वृत्तीय आधार सहित पेंट किया जाना है। यदि अर्धगोले की त्रिज्या 28 cm है, तो इसके पृष्ठ को 3 रु प्रति 100 cm^2 की दर से पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 28 \times 28 \text{ cm}^2$

$$= 7392 \text{ cm}^2$$

अत:, 3 रु प्रति 100 cm^2 की दर से उपर्युक्त पृष्ठ को पेंट कराने में आने वाला व्यय

$$= \frac{3}{100} \times 7392 \text{ रु} = 231.76 \text{ रु}$$

उदाहरण 11 : पृथ्वी को 6370 km त्रिज्या का एक गोला मानते हुए, ज्ञात कीजिए:

(i) पृथ्वी का पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) भूमि का क्षेत्रफल, यदि पृथ्वी का $\frac{3}{4}$ पृष्ठ जल से ढका है

हल: (i) पृथ्वी का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 6370 \times 6370 \text{ km}^2$$

$$= 510109600 \text{ km}^2$$

(ii) पृथ्वी का $\frac{3}{4}$ पृष्ठ जल से ढका है।

अत:, भूमि का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4} \times$ (पृथ्वी का पृष्ठीय क्षेत्रफल) $= \frac{1}{4} \times 510109600 \text{ km}^2$

$$= 127527400 \text{ km}^2$$

प्रश्नावली 14.3

1. उस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास है :

   (i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m

2. उस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या है :

   (i) 10.5 cm (ii) 5.6 m (iii) 14 cm

3. एक गोलाकार गुब्बारे में हवा भरे जाने पर उसकी त्रिज्या 7 cm से बढ़कर 14 cm हो जाती है। इन दोनों स्थितियों में, गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

4. पीतल से बने एक अर्धगोलाकार कटोरे का आंतरिक व्यास 10.5 cm है। 16 रु प्रति 100 cm^2 की दर से इसकी आंतरिक पृष्ठ पर कलई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

5. किसी भवन का गुंबज एक अर्धगोले के आकार का है। उसकी त्रिज्या 6.3 m है। 12 रु प्रति m^2 की दर से इस पर पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

6. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 cm^2 है।

7. चंद्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक चौथाई है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों के अनुपात ज्ञात कीजिए।

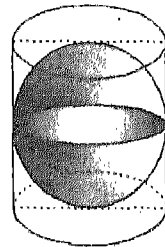
8. एक गोला फेंक (shotput) की त्रिज्या 7 cm है। उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. एक अर्धगोलाकार कटोरा 0.25 cm मोटी स्टील का बना हुआ है। इस कटोरे की आंतरिक त्रिज्या 5 cm है। इस कटोरे की बाहरी पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. त्रिज्या r का एक गोला एक लंब वृत्तीय बेलन के अंतर्गत है (आकृति 14.13)। ज्ञात कीजिए :

    (i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

    (ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

    (iii) उपर्युक्त (i) और (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों का अनुपात

आकृति 14.13

याद रखने योग्य बातें

[r, h और l का जहाँ भी प्रयोग किया गया है वह सामान्य अर्थों में है।]

1. एक लंब वृत्तीय बेलन का प्रत्येक समतल सिरा उसका आधार कहलाता है।
2. बेलन के दोनों वृत्तीय सिरों के केंद्रों को मिलाने वाला रेखाखंड उसकी अक्ष कहलाती है। इस अक्ष की लंबाई बेलन की ऊँचाई कहलाती है।
3. वह वक्र पृष्ठ जो एक लंबवृत्तीय बेलन के दोनों आधारों को मिलाती है उसकी पार्श्व पृष्ठ कहलाती है।
4. एक लंब वृत्तीय बेलन का पार्श्व पृष्ठीय या वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$
5. एक लंब वृत्तीय बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r (r + h)$
6. एक लंब वृत्तीय शंकु का समतल सिरा उसका आधार कहलाता है। शंकु का एक मात्र कोना उसका शीर्ष कहलाता है।
7. शंकु के शीर्ष को उसके आधार के केंद्र से मिलाने वाला रेखाखंड उसकी अक्ष कहलाती है। इस अक्ष की लंबाई शंकु की ऊँचाई कहलाती है।
8. शंकु के शीर्ष को उसके वृत्तीय किनारे पर स्थित किसी बिंदु से मिलाने वाले रेखाखंड की लंबाई उसकी तिर्यक ऊँचाई कहलाती है। साथ ही, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$
9. शंकु के वृत्तीय किनारे को उसके शीर्ष से मिलाने वाली वक्र पृष्ठ उसकी पार्श्व पृष्ठ कहलाती है।
10. शंकु का पार्श्व या वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$
11. शंकु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r (l + r)$
12. केंद्र O और त्रिज्या r वाला गोला (आकाश में स्थित) वह आकृति है जिसमें (आकाश के) वे सभी बिंदु सम्मिलित होते हैं जो O से r दूरी पर स्थित हैं।
13. r त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$
14. r त्रिज्या वाले अर्धगोले का पार्श्व या वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$
15. r त्रिज्या वाले अर्धगोले का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

अध्याय

15

आयतन

15.1 भूमिका

हम जानते हैं कि प्रत्येक ठोस आकाश में कुछ क्षेत्र घेरता है और उसके द्वारा घेरे गए क्षेत्र के परिमाण को उसका *आयतन* (*volume*) कहते हैं। आयतन का एक मानक मात्रक घन सेंटीमीटर (cu cm) या cm^3 है। मात्रक घन सेंटीमीटर उस घन का आयतन होता है जिसकी भुजा 1 cm हो। a cm भुजा वाले घन का आयतन $a \text{ cm} \times a \text{ cm} \times a \text{ cm}$ अर्थात् $a^3 \text{ cm}^3$ होता है।

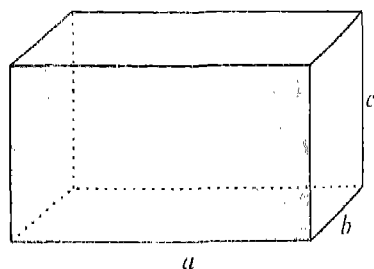
आयतन के कुछ अन्य मानक मात्रक mm^3, dm^3, m^3 और km^3 हैं। 1000 cm^3 आयतन वाले बर्तन की धारिता 1 लीटर या 1 l होती है।

हम यह भी जानते हैं कि यदि किसी घनाभ की भुजाएँ l cm, b cm और h cm हों, तो इसका आयतन $V = l \times b \times h \text{ cm}^3$ होता है। इस अध्याय में हम कुछ अन्य परिचित ठोस, जैसे बेलन, शंकु व गोले के आयतनों का अध्ययन करेंगे। अध्याय 14 के समान, यहाँ भी हम π का मान $\frac{22}{7}$ ही लेंगे जब तक कि कोई अन्य मान न दिया गया हो।

15.2 लंब वृत्तीय बेलन का आयतन

इस ठोस आकृति के विषय में हम पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं, जहाँ हमने इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात किया था। यहाँ हम इसके आयतन पर विचार करेंगे। मान लें कि बेलन की आधार त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है।

आकृति 15.1

पहले एक घनाभ पर विचार करें जिसकी लंबाई चौड़ाई व ऊँचाई क्रमशः a मात्रक, b मात्रक और c मात्रक हैं। हम जानते हैं कि इस घनाभ का आयतन $a \times b \times c$ मात्रक^3 है तथा पार्श्वीय पृष्ठ का क्षेत्रफल (lateral surface area) (वर्ग मात्रकों में)

$2(a \times c + b \times c)$ है। घनाभ के पार्श्वीय पृष्ठ के क्षेत्रफल को हम $2(a+b) \times c$ के रूप में लिख सकते हैं। हम यह भी जानते हैं कि $2(a+b)$ घनाभ के आधार का परिमाप है। इन दोनों में क्या संबंध है?

घनाभ के पार्श्वीय पृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप $\times$ ऊँचाई

अब हम घनाभ के आयतन पर विचार करते हैं। हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन $a \times b \times c$ है। साथ ही, $a \times b$ घनाभ के आधार का क्षेत्रफल है। इस प्रकार,

घनाभ का आयतन = $(a \times b) \times c$ = आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

अत:, घनाभ के लिए

पार्श्वीय पृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप $\times$ ऊँचाई

तथा आयतन = आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

साथ ही, लंब वृत्तीय बेलन के लिए

पार्श्वीय (वक्र) पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi rh$ = आधार का परिमाप $\times$ ऊँचाई

अत:, (घनाभ से उस संबंध की तुलना करने पर) यह अनुमान लगाना स्वाभाविक ही है कि

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई = $\pi r^2 h$

यह संबंध सत्य है, परंतु औपचारिक रूप से इसे सिद्ध करना पुस्तक की विषय-वस्तु के बाहर है। यद्यपि एक प्रयोग द्वारा हम इसकी सत्यता की जाँच कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 1 : एक लंब वृत्तीय बेलनाकार बर्तन लें। इसकी त्रिज्या r तथा ऊँचाई h की माप सेंटीमीटर में ज्ञात कर नीचे दी गई सारणी में लिखें। $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 लेकर $\pi r^2 h$ के मान का परिकलन कर, सारणी के संगत स्तंभ में लिखें।

बेलन	r	h	$\pi r^2 h$	V	V− $\pi r^2 h$
1					
2					
3					

अब बर्तन को पानी से पूरा-पूरा भरें। यहाँ बर्तन में भरे पानी का आयतन बेलन (बेलनाकार बर्तन) के आयतन V के बराबर होगा। मापन फ्लास्क (measuring flask) द्वारा पानी के आयतन को मापें। यह आयतन मात्रक ml में होगा। संबंध 1 ml = 1 cm^3 का प्रयोग कर इस माप को cm^3

में बदलें तथा सारणी में V स्तंभ में लिखें। अंतिम स्तंभ में $V - \pi r^2 h$ का मान लिखें। उक्त प्रयोग को कम से कम दो और अलग-अलग त्रिज्या व ऊँचाई वाले बेलनाकार बर्तन लेकर दोहराएँ।

आप क्या देखते हैं? आप देखेंगे कि शीर्षक $V - \pi r^2 h$ वाले अंतिम स्तंभ की प्रविष्टियाँ या तो शून्य हैं या इतनी छोटी कि इनकी उपेक्षा की जा सकती है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि $V - \pi r^2 h = 0$ अर्थात् $V = \pi r^2 h$ = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

कुछ उदाहरणों द्वारा हम इस सूत्र का प्रयोग समझाएँगे।

उदाहरण 1 : एक लंब वृत्तीय बेलन के आधार का व्यास 7 cm है। यदि इसकी ऊँचाई 40 cm है, तो बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ बेलन के आधार (वृत्त) का व्यास 7 cm है, अत: त्रिज्या $r = \frac{7}{2}$ cm है। साथ ही, ऊँचाई $h = 40$ cm तथा $\pi = \frac{22}{7}$ है। इस प्रकार,

बेलन का आयतन $V = \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 40 \text{ cm}^3 = 1540 \text{ cm}^3$

उदाहरण 2 : धातु से बने बेलनाकार खोखले एक पाइप की मोटाई 0.5 cm है तथा उसका बाहरी व्यास 4.5 cm है। यदि 1 cm^3 धातु का द्रव्यमान 8 g हो, तो 77 cm लंबे पाइप का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम 77 cm लंबे पाइप के धातु से बने भाग का आयतन ज्ञात करेंगे। यह आयतन दो ऐसे ठोस बेलनों के आयतनों का अंतर है जिनमें से एक का व्यास 4.5 cm है तथा दूसरे का व्यास (4.5 – 1.0) cm या 3.5 cm है।

बाहरी बेलन के लिए

त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times 4.5$ तथा ऊँचाई $= 77$ cm

$$\therefore \quad \text{आयतन} = \frac{22}{7} \times \frac{4.5}{2} \times \frac{4.5}{2} \times 77 \text{ cm}^3 = 242 \times \left(\frac{4.5}{2}\right)^2 \text{cm}^3 \qquad (1)$$

आंतरिक बेलन के लिए

त्रिज्या $= \left(\frac{4.5}{2} - 0.5\right) \text{cm} = \frac{3.5}{2}$ cm तथा ऊँचाई $= 77$ cm

$$\therefore \quad \text{आयतन} = \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2} \times 77 \text{ cm}^3 = 242 \times \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \text{cm}^3 \qquad (2)$$

$\therefore$ पाइप का अभीष्ट आयतन = बाहरी बेलन का आयतन – आंतरिक बेलन का आयतन

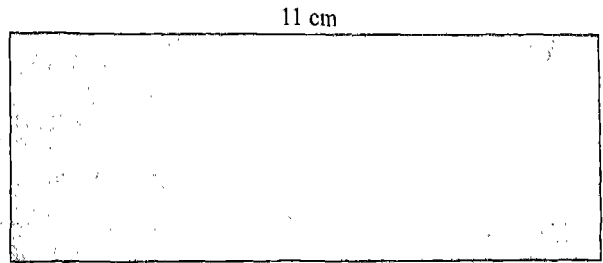
$$= 242 \times \left[\left(\frac{4.5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3.5}{2}\right)^2\right] \text{cm}^3 \qquad \text{[(1) व (2) से]}$$

$$= 242 \times \left(\frac{4.5}{2} + \frac{3.5}{2}\right) \times \left(\frac{4.5}{2} - \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^3$$

$$= 242 \times 4 \times 0.5 \text{ cm}^3 = 484 \text{ cm}^3$$

अतः, पाइप का द्रव्यमान $= 484 \times 8$ g [क्योंकि 1 cm³ धातु का द्रव्यमान 8 g है]

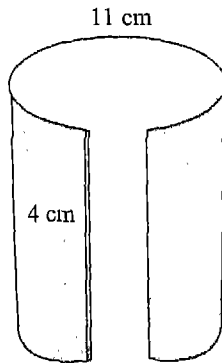
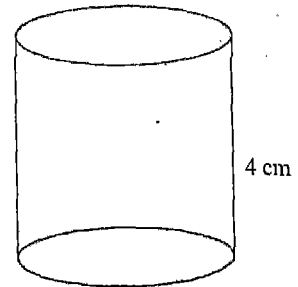
$$= 3872 \text{ g} = 3.872 \text{ kg}$$

उदाहरण 3 : एक 11 cm × 4 cm आयताकार कागज को मोड़कर दोनों सिरों को एक-दूसरे पर चढ़ाए बिना, जोड़कर 4 cm ऊँचाई का एक बेलन बनाया जाता है (आकृति 15.2)। इस प्रकार बने बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

आकृति 15.2 (i)

आकृति 15.2

हल : यहाँ कागज की लंबाई वाले सिरे बेलन की गोलाई वाले सिरे बनते हैं। अतः, बेलन के प्रत्येक वृत्तीय सिरे की परिधि 11 cm है। माना कि बेलन के प्रत्येक वृत्तीय सिरे की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है।

तब, $2\pi r = 11$ cm

$$\therefore \quad r = \frac{11}{2\pi} \text{ cm} = \frac{11 \times 7}{2 \times 22} \text{ cm} = \frac{7}{4} \text{ cm}$$

$\therefore$ बेलन का आयतन $= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ cm}^3 = 38.5 \text{ cm}^3$

उदाहरण 4 : 14 cm त्रिज्या वाली एक बेलनाकार बाल्टी में कुछ ऊँचाई तक पानी भरा है। यदि 28 cm × 11 cm × 10 माप के एक आयताकार ठोस को पानी में पूरा डुबा दिया जाए, तो बाल्टी में पानी कितनी और ऊँचाई तक चढ़ जाएगा?

हल : यदि पानी पहले की तुलना में h cm और ऊँचा चढ़ जाता है, तो h ऊँचाई वाले बेलनाकार स्तंभ का आयतन = आयताकार ठोस का आयतन

अर्थात् $$\frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times h = 28 \times 11 \times 10$$

या $$h = \frac{28 \times 11 \times 10 \times 7}{22 \times 14 \times 14} = 5$$

इस प्रकार, बाल्टी में पानी का स्तर 5 cm ऊँचा हो जाता है।

प्रश्नावली 15.1

1. नीचे दी गई त्रिज्या (r) व ऊँचाई (h) वाले लंब वृत्तीय बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए:
   (i) $r = 7$ cm, $h = 15$ cm (ii) $r = 10.5$ cm, $h = 2$ cm
   (iii) $r = 2.8$ m, $h = 15$ m (iv) $r = 3.5$ m, $h = 1$ m
2. एक लंब वृत्तीय बेलनाकार बर्तन के आधार की परिधि 132 cm तथा ऊँचाई 25 cm है। बर्तन में कितना लीटर पानी आ सकता है?
3. लकड़ी के एक बेलनाकार पाइप का आंतरिक व्यास 24 cm तथा बाह्य व्यास 28 cm है। यदि 1 cm^3 लकड़ी का द्रव्यमान 3g है, तो 35 cm लंबे पाइप का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।
4. धातु की एक नली की मोटाई 1 cm तथा बाह्य त्रिज्या 11 cm है। ऐसी 1 मीटर लंबी नली का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यदि धातु का घनत्व 7.5 g प्रति cm^3 है।
5. एक दिन 10 cm वर्षा हुई। यदि 70 m लंबी तथा 44 m चौड़ी छत पर गिरे जल को 14 m त्रिज्या वाले एक बेलनाकार टंकी में डाला जाए, तो ज्ञात कीजिए :
   (i) छत पर गिरे जल का आयतन
   (ii) वर्षा के इस जल को टंकी में भरे जाने पर जलस्तर की ऊँचाई में वृद्धि
6. 3.5 m त्रिज्या वाला एक वृत्ताकार कुआँ 20 m गहराई तक खोदा गया तथा इस प्रकार खुदाई से प्राप्त मिट्टी को 14 m लंबे व 11 m चौड़े एक आयताकार भूखंड पर फैलाया गया। ज्ञात कीजिए:
   (i) खुदाई से प्राप्त मिट्टी का आयतन
   (ii) आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल

(iii) आयताकार भूखंड पर मिट्टी फैलाने से बने चबूतरे की ऊँचाई

7. एक शीतल पेय बाजार में दो प्रकार के डिब्बों में उपलब्ध है: 5 cm लंबाई 4 cm चौड़ाई के आयताकार आधार व 15 cm ऊँचाई वाले एक टिन के डिब्बे में तथा 7 cm व्यास के वृत्ताकार आधार व 10 cm ऊँचाई वाले एक बेलनाकार प्लास्टिक के डिब्बे में। किस डिब्बे की धारिता अधिक है और कितनी?

8. यदि 5 cm ऊँचे किसी लंब वृत्तीय बेलन के पार्श्वीय पृष्ठ का क्षेत्रफल $94.2\ cm^2$ है, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) आधार की त्रिज्या

   (ii) बेलन का आयतन (मान लीजिए $\pi = 3.14$)

9. 10 m गहरे एक लंब वृत्तीय बेलनाकार बर्तन के अंदर के वक्र पृष्ठ को पेंट करने में 20 रु प्रति वर्गमीटर की दर से 2200 रु व्यय हुआ। ज्ञात कीजिए :

   (i) बर्तन के आंतरिक वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

   (ii) बर्तन के आधार की त्रिज्या

   (iii) बर्तन की धारिता

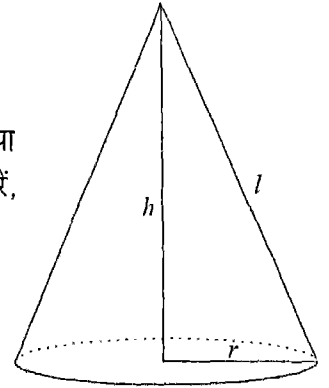
10. 1 मीटर ऊँचाई वाले बंद बेलनाकार बर्तन की धारिता $15.4\ l$ है। इस बर्तन को बनाने में कितने वर्ग मीटर धातु की चादर की आवश्यकता होगी ?

15.3 लंब वृत्तीय शंकु का आयतन

एक लंब वृत्तीय शंकु पर विचार करें जिसके आधार की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है। इसकी तिर्यक ऊँचाई को यदि l से प्रदर्शित करें, तो हम जानते हैं कि शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल है :

$$S = \pi r l$$

या $$S = \frac{1}{2} \times \text{आधार की परिधि} \times \text{तिर्यक ऊँचाई}$$

इस शंकु का आयतन V ज्ञात करने के लिए, हम कुछ प्रयोग करेंगे।

आकृति 15.3

क्रियाकलाप 2 : ऊँचाई h व त्रिज्या r वाले एक लंब वृत्तीय शंकु के आकार का बर्तन लें। समान ऊँचाई h व समान त्रिज्या r वाले लंब वृत्तीय बेलन के आकार का एक अन्य बर्तन लें।

अब शंकु के आकार वाले बर्तन में ऊपर तक पानी भरें तथा इस पानी को बेलनाकार बर्तन में उँड़ेल दें। क्या बेलनाकार बर्तन पूरा भर गया? आप देखेंगे कि बर्तन आधा भी नहीं भरा। आप इसमें और पानी डाल सकते हैं। शंक्वाकार बर्तन को एक बार फिर पूरा भरकर बेलनाकार बर्तन में उँड़ेल दें। आप देखेंगे कि बर्तन अब भी पूरा नहीं भरा। एक बार पुनः यही क्रिया दोहराने पर आप पाएँगे कि बेलनाकार बर्तन अब पूरी तरह भर गया है। यह प्रयोग सुझाता है कि *बेलनाकार बर्तन का आयतन शंक्वाकार बर्तन के आयतन का तीन गुना है।*

अर्थात्,

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ *बेलन का आयतन*

इस प्रकार, यदि आधार त्रिज्या r व ऊँचाई h वाले शंकु का आयतन V है, तो

$$V = \frac{1}{3} \text{ (आधार त्रिज्या } r \text{ व ऊँचाई } h \text{ वाले बेलन का आयतन)}$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \text{ (शंकु के आधार का क्षेत्रफल)} \times \text{ऊँचाई}$$

बेलन के समान यहाँ भी हम इस संबंध को सिद्ध नहीं करेंगे। हाँ, बेलन की भाँति, विभिन्न त्रिज्याओं व ऊँचाइयों के शंकुओं के लिए, हम इस संबंध को सत्यापित कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 3 : एक शंक्वाकार बर्तन लें तथा इसके आधार की त्रिज्या r व ऊँचाई h को सेंटीमीटर में मापें। अब $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 लेकर $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ का मान परिकलन करें तथा निम्न सारणी में यथा स्थान लिखें।

शंकु	r	h	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	V	$V - \frac{1}{3}\pi r^2 h$
1					
2					
3					

अब इस बर्तन को पानी से ऊपर तक भरें तथा मापन फ्लास्क द्वारा इस पानी का आयतन cm^3 में ज्ञात कर सारणी के पाँचवें स्तंभ में लिखें। अब $V - \frac{1}{3}\pi r^2 h$ का परिकलन

कर, मान को सारणी के अंतिम स्तंभ में लिखें। इसी प्रयोग को भिन्न-भिन्न त्रिज्या और ऊँचाई वाले कम से कम दो और शंक्वाकार बर्तनों के साथ दोहराएँ।

सारणी के अंतिम स्तंभ के अवलोकन से हमें क्या प्राप्त होता है? हम देखते हैं कि प्रविष्टियाँ या तो शून्य हैं, या इतनी छोटी कि इनकी उपेक्षा की जा सकती है। अतः हम कह सकते हैं कि $V - \frac{1}{3}\pi r^2 h = 0$ है। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:

$$\text{शंकु का आयतन } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

उदाहरण 5 : उस लंब वृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई 2.04 m तथा आधार त्रिज्या 14 cm है।

हल : यहाँ $r = 14$ cm तथा $h = 2.04$ m $= 204$ cm है।

$$\text{अतः, शंकु का आयतन } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 204 \text{ cm}^3$$

$$= 41888 \text{ cm}^3$$

टिप्पणी: उपर्युक्त आधार त्रिज्या व ऊँचाई वाले शंक्वाकार बर्तन में 41.888 l द्रव्य समाएगा।

उदाहरण 6 : एक शंकु की ऊँचाई व तिर्यक ऊँचाई क्रमशः 21 cm तथा 28 cm है। ज्ञात कीजिए : (i) शंकु के आधार का क्षेत्रफल (ii) शंकु का आयतन

हल: (i) यदि शंकु की ऊँचाई h, तिर्यक ऊँचाई l तथा आधार त्रिज्या r हो, तो हम जानते हैं कि

$$r^2 = l^2 - h^2$$

इस प्रकार, दिए गए शंकु के लिए

$$r^2 = 28^2 - 21^2$$

$$= (28 + 21)(28 - 21) = (49)(7)$$

या $r = 7\sqrt{7}$

$$\text{इस प्रकार, शंकु के आधार का क्षेत्रफल } A = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \left(7\sqrt{7}\right)^2 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 49 \times 7 \text{ cm}^2 = 1078 \text{ cm}^2$$

(ii) शंकु का आयतन $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times$ (आधार का क्षेत्रफल) $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{3} \times 1078 \times 21 \text{ cm}^3 = 7546 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 7 : एक शंक्वाकार तंबू का आयतन 1232 m^3 है तथा इसके आधार का क्षेत्रफल 154 m^2 है। यदि तंबू के कैनवस की चौड़ाई 2 m हो, तो तंबू बनाने में कितने लंबे कैनवस की आवश्यकता होगी?

हल : तंबू के निर्माण के लिए आवश्यक कैनवस का क्षेत्रफल तंबू के वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल $\pi r l$ के बराबर होगा। हमें ज्ञात है कि

शंक्वाकार तंबू का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = 1232 \text{ m}^3$

तथा तंबू के आधार का क्षेत्रफल $A = \pi r^2 = 154 \text{ m}^2$ (1)

$\therefore \quad \frac{1}{3} \times 154 \times h = 1232$

या $\quad h = \frac{1232 \times 3}{154} \text{ m} = 24 \text{ m}$ (2)

साथ ही, (1) से आधार त्रिज्या $r = \sqrt{\frac{154 \times 7}{22}} \text{ m} = 7 \text{ m}$ (3)

अतः, $\quad l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} \text{ m} = 25 \text{ m}$ [(2) व (3) से]

तथा $\quad \pi r l = \frac{22}{7} \times 7 \times 25 \text{ m}^2 = 550 \text{ m}^2$

$\therefore$ तंबू के निर्माण में प्रयुक्त कैनवस की लंबाई $= \frac{\text{पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}} = \frac{550}{2} \text{ m} = 275 \text{ m}$

प्रश्नावली 15.2

1. उस लंब वृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके लिए

(i) $r = 6$ cm तथा $h = 7$ cm (ii) $r = 3.5$ cm तथा $h = 12$ cm

2. उस शंक्वाकार बर्तन की धारिता ज्ञात कीजिए जिसके लिए

(i) $r = 7$ cm तथा $l = 25$ cm (ii) $h = 12$ cm तथा $l = 13$ cm

3. यदि किसी शंकु की ऊँचाई 15 cm तथा आयतन 1570 cm^3 है, तो शंकु के आधार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

4. धातु के बने किसी ठोस शंकु को पिघलाकर एक ठोस बेलन बनाया गया जिसका वृत्तीय आधार शंकु के वृत्तीय आधार के बराबर है। यदि इस प्रकार प्राप्त बेलन की ऊँचाई 7 cm है, तो शंकु की ऊँचाई कितनी थी?

5. यदि 9 cm ऊँचाई वाले एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन 48 π cm^3 है, तो शंकु के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

6. एक शंक्वाकार गड्ढे का ऊपरी व्यास 3.5 m तथा गहराई 12 m है। किलो लीटर में इस गड्ढे की धारिता क्या है?

7. एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन 9856 cm^3 है। यदि इसके आधार का व्यास 28 cm है, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) शंकु की ऊँचाई (ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई

   (iii) शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

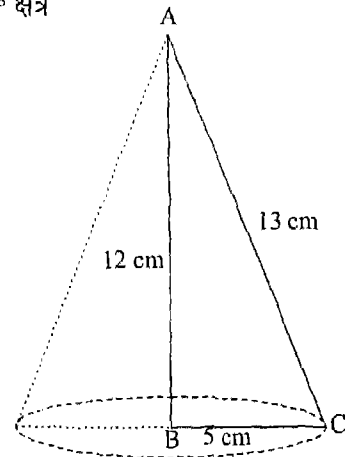
8. एक शंक्वाकार तंबू की ऊँचाई 9 m तथा इसके आधार का व्यास 24 m है। तंबू में समा सकने वाले व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए। यदि एक व्यक्ति के लिए आवश्यक है :

   (i) धरती पर बैठने के लिए 2 m^2 स्थान

   (ii) श्वास लेने के लिए 15 m^3 क्षेत्र

   (iii) धरती पर 2 m^2 स्थान तथा श्वास लेने के लिए 15 m^3 क्षेत्र

9. एक समकोण त्रिभुज ABC जिसकी भुजाएँ क्रमश: 5 cm, 12 cm तथा 13 cm हैं, 12 cm लंबी भुजा के परित: घुमाया जाता है (आकृति 15.4)। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

10. यदि प्रश्न 9 में त्रिभुज ABC को 5 cm लंबी भुजा के परित: घुमाया जाता है, तो प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। प्राप्त दोनों ठोस के आयतनों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

आकृति 15.4

15.4 गोले का आयतन

ठोस गोले के बारे में हम पढ़ चुके हैं। हम यह भी जानते हैं कि यदि गोले की त्रिज्या r हो, तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल $4\pi r^2$ होता है। परंतु इस सूत्र को हमने सिद्ध नहीं किया था। इसी प्रकार, बिना औपचारिक रूप से इस तथ्य को सिद्ध किए, हम कहेंगे कि त्रिज्या r वाले गोले का आयतन सूत्र

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

द्वारा प्राप्त होता है। परंतु कुछ प्रयोगों द्वारा हम इस सूत्र की सत्यता की जाँच कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 4: एक ठोस गेंद (जो कि एक गोला है) लें तथा किसी उचित मापक द्वारा इसकी त्रिज्या r ज्ञात करें। अब $\frac{4}{3}\pi r^3$ का परिकलन करें तथा इन मानों को नीचे दी गई सारणी में लिखें।

गोला	r	$\frac{4}{3}\pi r^3$	V	$V - \frac{4}{3}\pi r^3$
1				
2				
3				

अब एक बाल्टी लें जिसमें गेंद भली प्रकार आ सके। अब बाल्टी को रखने के लिए एक अन्य बर्तन इतना चौड़ा लीजिए जिसमें बाल्टी से गिरे पानी को एकत्रित किया जा सके। अब बाल्टी को इस खाली बर्तन में रखिए तथा इसे (बाल्टी को) ऊपर तक पूरा पानी से भर दीजिए। अब धीरे से गेंद को बाल्टी में डुबोइए। चूँकि बाल्टी ऊपर तक पानी से भरी है, इसलिए गेंद द्वारा विस्थापित पानी बाल्टी से छलककर नीचे रखे बर्तन में एकत्रित हो जाएगा। अब बाल्टी को (गेंद सहित) बर्तन में से बाहर निकाल दें। बर्तन में एकत्रित पानी का आयतन गेंद के आयतन के बराबर होगा। इस पानी के आयतन V को एक मापन फ्लास्क द्वारा cm^3 में ज्ञात कर, सारणी में भरें। सारणी के अंतिम स्तंभ में $V - \frac{4}{3}\pi r^3$ का मान लिखें। इस प्रयोग को अन्य त्रिज्याओं वाली कम-से-कम दो और गेंद लेकर दोहराएँ।

सारणी के अवलोकन से हमें क्या ज्ञात होता है? हम देखते हैं कि अंतिम स्तंभ की प्रविष्टियाँ या तो शून्य हैं, या इतनी छोटी हैं कि इनकी उपेक्षा की जा सकती है। अतः हम

कह सकते हैं कि सभी गोलों के लिए

$$V - \frac{4}{3}\pi r^3 = 0 \quad \text{अर्थात्} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ होता है।}$$

क्रियाकलाप 5 : एक अर्धगोलीय कटोरा लें तथा किसी उचित मापन यंत्र द्वारा cm में इसकी आंतरिक त्रिज्या r ज्ञात करें। इस मान को नीचे दी गई सारणी में भरें।

अब $\frac{2}{3}\pi r^3$ का परिकलन करें तथा इसे सारणी के अगले स्तंभ में भरें। अब कटोरे को ऊपर तक पानी से भरें तथा इस पानी को किसी मापन फ्लास्क में डालकर इसका आयतन V cm^3 में ज्ञात करें। यह मान सारणी के चौथे स्तंभ में लिखें।

अर्धगोलीय कटोरा	r	$\frac{2}{3}\pi r^3$	V	$V - \frac{2}{3}\pi r^3$
1				
2				
3				

अगले स्तंभ में $V - \frac{2}{3}\pi r^3$ का मान भरें। यह प्रयोग कम से कम दो और भिन्न-भिन्न आंतरिक त्रिज्या वाले अर्धगोलीय कटोरे लेकर दोहराएँ।

हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि $V - \frac{2}{3}\pi r^3$ के मान या तो शून्य हैं या इतने छोटे हैं कि इनकी उपेक्षा की जा सकती है। अत:, हम मान सकते हैं कि

$$V - \frac{2}{3}\pi r^3 = 0 \text{ अर्थात् } V = \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ है।}$$

दूसरे शब्दों में, r त्रिज्या वाले अर्धगोलीय कटोरे के पानी का आयतन $\frac{2}{3}\pi r^3$ है। इसका तात्पर्य यह हुआ कि त्रिज्या r वाले गोले का आयतन, जो इसी त्रिज्या वाले अर्धगोलीय कटोरे के आयतन का दुगुना है, $2 \times \frac{2}{3}\pi r^3$ या $\frac{4}{3}\pi r^3$ है।

टिप्पणी : एक अन्य प्रयोग जिसके द्वारा किसी अर्धगोले के आयतन का सूत्र प्राप्त करने में सहायता मिले, इस प्रकार है :

r त्रिज्या वाला एक अर्धगोलीय कटोरा लें। r आधार त्रिज्या व r ऊँचाई वाला एक शंक्वाकार बर्तन भी लें। अब शंक्वाकार बर्तन को पानी से पूरा-पूरा भरें तथा अर्धगोलीय कटोरे में उँड़ेल दें। कटोरा पूरा नहीं भरेगा। पुनः शंक्वाकार बर्तन को पानी से पूरा-पूरा भरें तथा कटोरे में उँड़ेल लें। अब कटोरा पूरा भर जाएगा। इस प्रकार,

कटोरे की धारिता $= 2 \times$ शंक्वाकार बर्तन की धारिता

क्योंकि शंक्वाकार बर्तन की धारिता $\frac{1}{3}\pi r^3$ (बर्तन की ऊँचाई r है) है; अतः r त्रिज्या वाले अर्धगोलीय कटोरे की धारिता $= 2 \times \frac{1}{3}\pi r^3$ या $\frac{2}{3}\pi r^3$ है। यह परिणाम वही है जो क्रियाकलाप 5 से प्राप्त हुआ था।

उदाहरण 8 : 2.1 cm त्रिज्या वाले एक गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $r = 2.1$ cm

$\therefore$ गोले का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1 \text{ cm}^3$$

$$= 38.808 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 9 : एक अर्धगोलीय टंकी की धारिता 155.232 l है। टंकी की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : मान लें कि टंकी की त्रिज्या r cm है। इसका आयतन है:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ cm}^3$$

साथ ही, $155.232\, l = 155.232 \times 1000 \text{ cm}^3 = 155232 \text{ cm}^3$

$\therefore$ $\frac{2}{3}\pi r^3 = 155232$

या $r^3 = \frac{155232 \times 3 \times 7}{2 \times 22}$

$$= 3528 \times 3 \times 7$$

$= (2 \times 3 \times 7)^3$

$\therefore \quad r = 2 \times 3 \times 7 = 42$

अतः, टंकी की त्रिज्या 42 cm है।

उदाहरण 10 : 36 m लंबे व 2 mm व्यास वाले ताँबे के तार को पिघलाकर एक गोला बनाया जाता है। ज्ञात कीजिए :

(i) तार का आयतन (ii) गोले का आयतन

(iii) गोले की त्रिज्या

हल : (i) तार की त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times 2$ mm $= 1$ mm $= 0.1$ cm तथा

तार की लंबाई = 36 m = 3600 cm

$\therefore$ तार का आयतन $= \pi \times (0.1)^2 \times 3600 \text{ cm}^3$

$= 36\,\pi \text{ cm}^3$

(ii) गोले का आयतन = तार का आयतन $= 36\,\pi \text{ cm}^3$

(iii) यदि गोले की त्रिज्या r cm है, तो

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$$

अर्थात् $\quad r^3 = \frac{36 \times 3}{4}$

या $\quad r^3 = 3^3$

या $\quad r = 3$

अतः, गोले की त्रिज्या 3 cm है।

उदाहरण 11 : स्टील के एक अर्धगोलीय कटोरे की मोटाई 0.3 cm है (आकृति 15.5)। यदि कटोरे की अंतः त्रिज्या 7 cm हो, तो कटोरे को बनाने में प्रयुक्त स्टील का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : कटोरे को 7.3 cm तथा 7 cm त्रिज्याओं वाले दो ठोस गोलार्धों के बीच का भाग समझा जा सकता है। अब अंतः गोलार्ध का आयतन $= \frac{2}{3} \times \pi \times 7^3 \text{ cm}^3$

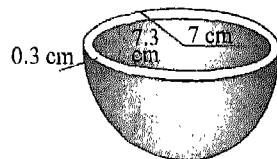
तथा बाह्य गोलार्ध का आयतन $= \frac{2}{3} \times \pi \times (7.3)^3 \text{ cm}^3$

$\therefore$ प्रयुक्त स्टील का आयतन $= \left[\frac{2}{3} \times \pi \times (7.3)^3 - \frac{2}{3} \times \pi \times 7^3\right] \text{cm}^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left[(7.3)^3 - 7^3\right] \text{cm}^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 46.017 \text{ cm}^3$$

$$= 96.42 \text{ cm}^3$$

0.3 cm
7.3 cm
7 cm

आकृति 15.5

प्रश्नावली 15.3

1. गोले का आयतन ज्ञात कीजिए, यदि इसकी त्रिज्या है:
   (i) 7 cm (ii) 3.5 dm (iii) 0.63 m
2. एक ठोस गोले द्वारा विस्थापित पानी का आयतन ज्ञात कीजिए यदि गोले का व्यास है:
   (i) 28 cm (ii) 0.21 m (iii) 3.5 dm
3. प्रश्न 2 में प्राप्त आयतनों को लीटर में व्यक्त कीजिए।
4. 10.5 cm व्यास वाले एक अर्धगोलीय कटोरे में कितने लीटर दूध आ सकता है?
5. धातु की एक गेंद का व्यास 4.2 cm है। यदि धातु का घनत्व 8.9 g प्रति cm^3 हो, तो गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।
6. चंद्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। चंद्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन का कौन-सा भाग है?
7. लोहे के बने एक अर्धगोलीय टंकी की मोटाई 1 cm है। यदि टंकी की अंत: त्रिज्या 1 m हो, तो टंकी के बनाने में प्रयुक्त लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।
8. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके पृष्ठ का क्षेत्रफल 154 cm^2 है।
9. एक भवन का गुंबद गोलार्ध रूप में है। गुबंद की आंतरिक पृष्ठ पर सफेदी कराने में 498.96 रुपए व्यय हुए। यदि सफेदी कराने की दर 2.00 रुपए प्रति वर्ग मीटर हो, तो ज्ञात कीजिए :
   (i) गुंबद की आंतरिक पृष्ठ का क्षेत्रफल (ii) गुंबद के अंदर की हवा का आयतन

10. त्रिज्या r व पृष्ठीय क्षेत्रफल S वाले लोहे के 27 ठोस गोलों को पिघलाकर एक गोला बनाया जाता है, जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S′ है। ज्ञात कीजिए:

    (i) नए गोले की त्रिज्या r' (ii) S का S′ के साथ अनुपात

याद रखने योग्य बातें

1. किसी ठोस द्वारा घेरे गए आकाशीय क्षेत्र का परिमाण उसका आयतन कहलाता है।
2. आयतन का एक मानक मात्रक cm^3 (या cu cm) है। कुछ अन्य मानक मात्रक mm^3, dm^3, m^3 तथा km^3 हैं।
3. किसी बर्तन की धारिता उस बर्तन में आ सकने वाले द्रव का आयतन होती है। धारिता का मात्रक लीटर (*l*) है।
4. $1\ l = 10^3\ cm^3$, $1\ ml = 1 cm^3$
5. लंब वृत्तीय बेलन का आयतन :

   $$V = (\text{आधार का क्षेत्रफल}) \times (\text{ऊँचाई}) = \pi r^2 h$$

6. लंब वृत्तीय शंकु का आयतन :

   $$V = \frac{1}{3} \times (\text{आधार का क्षेत्रफल}) \times (\text{ऊँचाई}) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

7. गोले का आयतन:

   $$V = \frac{4}{3} \times \pi \times (\text{त्रिज्या})^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

8. गोलार्ध अर्थात् अर्धगोले का आयतन:

   $$V = \frac{2}{3} \times \pi \times (\text{त्रिज्या})^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

——— अतीत के झरोखे से ———

निप्पुर (Nippur) में हुई खुदाई से प्राप्त मिट्टी के शिलालेखों (tablet) के आधार तथा अहम्स पेपिरस (Ahmes papyrus) के संदर्भों से हम विश्वास के साथ कह सकते हैं कि बेबीलोनियावासियों को ज्यामिति की आधारभूत संकल्पनाओं का ज्ञान था। इन शिलालेखों से यह स्पष्ट है कि बेबीलोनियावासी 1550 ईसा पूर्व में भी आयतों (जिनमें वर्ग भी सम्मिलित हैं), समकोण त्रिभुजों और समलंबों के क्षेत्रफलों को ज्ञात कर सकते थे। यह भी संभावित है कि उन्हें वृत्त के क्षेत्रफल की संकल्पना का भी कुछ ज्ञान था। वे घनाभों (और संभवत: बेलनों) के आयतन भी ज्ञात कर सकते थे। अहम्स पेपिरस में एक समद्विबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए सूत्र $\frac{1}{2}bh$ रूप में दिया है, जिसे हम आज भी प्रयोग करते हैं। इसी में ही, व्यास d वाले वृत्त के क्षेत्रफल के लिए सूत्र $(d - \frac{1}{9}d)^2$ के रूप में दिया है, जिससे π का मान 3.1605 प्राप्त होता है।

जहाँ मिस्रवासियों एवं भारतीयों द्वारा प्रयोग की गई ज्यामिति *व्यावहारिक* ज्यामिति थी, वहीं यूनानियों द्वारा विकसित ज्यामिति *अमूर्त* (*abstract*) थी। याद कीजिए कि मिस्रवासियों ने ज्यामिति का प्रयोग भूमि मापने एवं पिरामिडों को बनाने में किया तथा भारतीयों ने ज्यामिति का प्रयोग वेदियाँ बनाने, कोलोनियों एवं जल प्रणालियों के निर्माण हेतु योजनाएँ बनाने तथा सड़कों एवं भवनों को बनाने में किया। परंतु यूनानी ज्यामिति भौतिकता से रहित थी। इस प्रकार, उनके अनुसार बिंदु की कोई विमा (dimension) नहीं थी (क्या आप इसे आलेखित कर सकते हैं ?) रेखा की केवल एक विमा लंबाई थी (क्या आप इसे बिना मोटाई या ऊँचाई के खींच सकते हैं?), इत्यादि। उसके बाद से अन्य अमूर्त ज्यामितियाँ विकसित हो चुकी हैं। यूनानी ज्यामिति में, यूक्लिड ने जो एक अभिगृहीत दी है उसका वर्तमान रूप है: *एक रेखा और उस पर न स्थित एक बिंदु दिए होने पर, उस दिए हुए बिंदु से होकर उस दी हुई रेखा के समांतर ठीक एक रेखा खींची जा सकती है।* ऐसी ज्यामितियाँ विकसित की जा चुकी हैं जिनमें से एक में दिए हुए बिंदु से होकर दी हुई रेखा के समांतर एक से अधिक रेखाएँ खींची जा सकती हैं, जबकि एक अन्य ज्यामिति में यह आवश्यक नहीं कि दिए हुए बिंदु से होकर दी हुई रेखा के समांतर कोई भी रेखा खींची ही जा सके। (यह रोचक बात है कि इन दोनों ज्यामितियों के भौतिक मॉडल (models) विद्यमान हैं)।

ज्यामति के विकास में योगदान करने वाले कुछ प्राचीन भारतीय गणितज्ञ हैं : *बौधायन* (800 ईसा पूर्व) जिन्होंने पाइथागोरस प्रमेय के नाम से प्रसिद्ध एक प्रमेय को सिद्ध किया, *ब्रह्मगुप्त* (जन्म 598 ई.) जिन्होंने एक (चक्रीय) चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी भुजाओं तथा अर्धपरिमाप के पदों में ज्ञात किया, *भास्कर* (जन्म 1114 ई.) जिन्होंने पाइथागोरस प्रमेय की एक विभाजन (dissection) उपपत्ति दी तथा *आर्यभट्ट* (जन्म 476 ई.) जिन्होंने समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल तथा एक पिरामिड एवं गोले के आयतन ज्ञात किए। उन्होंने π का भी एक ऐसा मान दिया जो चार दशमलव स्थानों तक परिशुद्ध था।

प्राचीन काल के व्यक्तियों ने π का मान ज्ञात करने के लिए अनेक तकनीकें प्रयोग कीं। *आर्किमिडीज* ने 96 भुजाओं वाले दो बहुभुजों के क्षेत्रफलों का प्रयोग किया, जिनमें से एक वृत्त के अंतर्गत था तथा दूसरा उस वृत्त के परिगत था और वहाँ से यह निष्कर्ष निकाला कि $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ है, अर्थात् $3.1408 < \pi < 3.1428$ है। अनेक व्यक्तियों ने π का मान व्यक्त करने के लिए, अपरिमित श्रेणियों का प्रयोग किया। उदाहरणार्थ, *लेबनिज* (1073) ने π का मान $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots$ के रूप में दिया।

सर्वकालिक महान भारतीय गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन (1887–1920) ने 1914 में एक शोधपत्र लिखा जिसका शीर्षक Modular Equations and Approximations to π था। इस पत्र में उन्होंने $\frac{1}{\pi}$ का मान देने के लिए 15 भिन्न-भिन्न श्रेणियाँ दीं। इनमें से कुछ को आधार बनाकर नासा के बेली (D.H. Bailey) साइमन फ्रेजर विश्वविद्यालय के बॉरवाइन और बॉरवाइन (J.M. Borwein और P.B. Borwein) ने कुछ कंप्यूटर प्रोग्राम लिखे जिनसे π का मान एक बिलियन स्थानों तक लिखा जा सकता है।

अध्याय

16

सांख्यिकी

16.1 भूमिका

कक्षा VII में हमने दिए गए आँकड़ों या सूचनाओं को निरूपित करने वाले चित्रालेखों एवं दंड आलेखों (दंड चार्टों) को पढ़ने, उनकी व्याख्या करने तथा उनकी रचनाएँ करने के साथ-साथ सांख्यिकी का अध्ययन प्रारंभ किया था। आप देख चुके हैं कि आँकड़ों का यह चित्रमय निरूपण किस प्रकार हमें केवल देखने मात्र से ही इन दिए हुए आँकड़ों के बारे में कुछ उपयोगी जानकारी प्राप्त करने में समर्थ बनाता है। इस अध्याय में हम औपचारिक रूप से सांख्यिकी का अध्ययन प्रारंभ करेंगे। हम यथा प्राप्त (raw) आँकड़ों का समांतर माध्य ज्ञात करना सीखेंगे। हम दी हुई सूचनाओं या आँकड़ों को एक अवर्गीकृत अथवा वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी के रूप में निरूपित करना भी सीखेंगे। *आयतचित्रों* को पढ़ने तथा उनकी व्याख्या करने की चर्चा भी इसी अध्याय में की जाएगी।

16.2 यथाप्राप्त आँकड़े

अपने दैनिक जीवन में हमें समाचार पत्रों, पत्रिकाओं, सूचना बुलेटिनों इत्यादि में कुछ आँकड़ों से संबंधित आलेख एवं सारणियाँ प्राय: देखने को मिल जाती हैं। आइए, देखें कि ये आँकड़े किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं।

मान लीजिए कि हमारी रुचि यह जानने में हैं कि अर्धवार्षिक परीक्षा में कक्षा VIII के 20 विद्यार्थियों में से किसने गणित में सबसे अधिक अंक प्राप्त किए और किसने सबसे कम अंक प्राप्त किए हैं। हमारी रुचि अनेक और बातों में भी हो सकती है, जैसे कि कितने विद्यार्थियों ने 60 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए तथा कितने विद्यार्थियों ने 33 से कम अंक प्राप्त किए, इत्यादि। हम वांछित सूचना किस प्रकार प्राप्त करते हैं? हम 20 विद्यार्थियों में से प्रत्येक से उसके द्वारा अर्धवार्षिक परीक्षा में गणित में प्राप्त किए गए अंक पूछ सकते

हैं। मान लीजिए इन 20 विद्यार्थियों द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :

45, 56, 61, 31, 56, 33, 70, 61, 76, 36, 56, 59, 64, 56, 88, 28, 56, 70, 64, 74

प्रत्येक विद्यार्थी से प्राप्त उपर्युक्त सूचना, अर्थात् प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त अंक, एक *प्रेक्षण* (*observation*) कहलाती है। प्रारंभिक रूप से इस प्रकार एकत्रित किए गए प्रेक्षण *यथाप्राप्त आँकड़े* (*raw data*) कहलाते हैं।

हम इन 20 विद्यार्थियों के नाम लिख सकते हैं और न्यूनतम प्राप्त अंकों से प्रारंभ करते हुए, इन विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए अंक उनके नाम के आगे लिख सकते हैं। इस प्रकार, हम उपर्युक्त यथाप्राप्त आँकड़ों को एक सारणी के रूप में व्यवस्थित करते हैं, जैसा कि सारणी 16.1 (पृष्ठ 312) में दर्शाया गया है।

आइए, अब सारणी 16.1 को देखें। यह क्या दर्शाती है? सारणी पर एक दृष्टि डालने से पता चलता है कि अधिकतम प्राप्त किए गए अंक 88 हैं (मेरी द्वारा प्राप्तांक), जबकि न्यूनतम प्राप्तांक 28 हैं (दीपक द्वारा प्राप्तांक)।

प्रेक्षणों के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों का अंतर इन प्रेक्षणों (आँकड़ों) का परिसर (range) कहलाता है।

इस प्रकार, उपर्युक्त आँकड़ों का परिसर (88 – 28) अंक = 60 अंक है। हम यह भी जानना चाहते थे कि कितने विद्यार्थियों ने 60 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए हैं तथा कितने विद्यार्थियों ने 33 से कम अंक प्राप्त किए हैं। हम इस सारणी में ऐसे विद्यार्थियों की संख्या गिनकर ज्ञात कर सकते हैं कि 20 में से 9 विद्यार्थियों ने 60 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए हैं तथा 20 में से 2 विद्यार्थियों ने 33 से कम अंक प्राप्त किए हैं।

टिप्पणी : सारणियाँ क्षैतिज रूप में भी बनाई जाती हैं, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है:

नाम	कमला	सलमा	कविता	शशि
भार (*kg में*)	50	55	53	48

16.3 समांतर माध्य

आपने व्यक्तियों को औसत लंबाई, औसत चाल, औसत भार एवं औसत प्राप्तांकों, इत्यादि के बारे में बात करते अवश्य सुना होगा। शब्द *औसत* (*average*) से हमारा क्या तात्पर्य है? औसत एक ऐसी संख्या होती है जो एक दिए हुए प्रेक्षणों के समूह या आँकड़ों के केंद्रीय

सारणी 16.1 : 20 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त किए गए अंक

नाम	प्राप्तांक
दीपक	28
रिहाना	31
अरुण	33
सोनल	36
नीतू	45
रघु	56
विलियम	56
प्रकाश	56
रवि	56
सोहन	56
उर्मिल	59
नेल्सन	61
हैदर	61
सुधा	64
टीना	64
गौरांग	70
मल्लेश्वरी	70
सुब्रामनियम	74
अब्दुल	76
मेरी	88

अथवा प्रतिनिधि मान को दर्शाती है। यदि हमसे यह कहा जाए कि कक्षा VIII के विद्यार्थियों की औसत लंबाई 149 cm है, तो हम सोच सकते हैं कि व्यापक रूप में विद्यार्थियों की लंबाइयाँ 149 cm के इर्द-गिर्द फैली हुई हैं। हम जानते हैं कि कक्षा में सभी विद्यार्थियों की लंबाई 149 cm नहीं होगी, कुछ की लंबाई इससे कम होगी तथा कुछ की लंबाई इससे अधिक

होगी। परंतु कक्षा की औसत लंबाई हमें मोटे तौर पर उस कक्षा के विद्यार्थियों की लंबाइयों का एक व्यापक अनुमान प्रदान कर देती हैं।

औसत विभिन्न प्रकार के होते हैं। यहाँ हम एक सरलतम औसत के बारे में अध्ययन करेंगे, जिसे *समांतर माध्य* (*arithmetic mean*) या केवल *माध्य* (*mean*) कहा जाता है। इसका परिकलन सभी प्रेक्षणों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देकर किया जाता है। इस प्रकार, यदि किन्हीं दिए हुए आँकड़ों का माध्य M है, तो

$$\text{माध्य} = \text{M} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

अनुच्छेद 16.2 में दिए 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों वाले उदाहरण में माध्य है:

$$\text{M} = \frac{\begin{matrix}28+31+33+36+45+56+56+56+56+56+59+\\61+61+64+64+70+70+74+76+88\end{matrix}}{20} \text{ अंक}$$

$$= \frac{1140}{20} \text{ अंक} = 57 \text{ अंक}$$

अत: अभीष्ट माध्य 57 अंक है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त उदाहरण में माध्य 57 है, जो यथाप्राप्त आँकड़ों के सभी प्रेक्षणों से अलग है। यद्यपि यह भी संभव है कि माध्य दिए हुए प्रेक्षणों में से कोई एक प्रेक्षण हो।

आइए, इसे स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : किसी विद्यालय के 10 शिक्षकों की आयु (वर्षों में) निम्नलिखित है:

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(i) सबसे अधिक आयु के शिक्षक की आयु क्या है तथा सबसे कम आयु के शिक्षक की आयु क्या है?

(ii) इन शिक्षकों की आयु का परिसर क्या है?

(iii) इन शिक्षकों की माध्य आयु क्या है?

हल: (i) आयु को आरोही क्रम (23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54) में रखने पर हम ज्ञात करते हैं कि विद्यालय में सबसे अधिक आयु वाले शिक्षक की आयु 54 वर्ष है तथा सबसे कम आय वाले शिक्षक की आयु 23 वर्ष है।

(ii) परिसर (54 – 23) वर्ष, अर्थात् 31 वर्ष है।

(iii) $M = \dfrac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$

$= \dfrac{32 + 41 + 28 + 54 + 35 + 26 + 23 + 33 + 38 + 40}{10}$ वर्ष

$= \dfrac{350}{10}$ वर्ष = 35 वर्ष

इस प्रकार, शिक्षकों की माध्य आयु 35 वर्ष है। ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में माध्य यथाप्राप्त आँकड़ों में दिए हुए प्रेक्षणों में से एक प्रेक्षण है।

उदाहरण 2 : किसी कक्षा के 8 विद्यार्थियों के भार (kg में) निम्नलिखित है :

48.5, 50, 44.5, 49.5, 50.5, 45, 51, 43

(i) माध्य भार ज्ञात कीजिए।

(ii) माध्य भार क्या हो जाएगा, यदि एक शिक्षक का भार भी सम्मिलित कर लिया जाता है, जो 62 kg है?

हल : (i) $M = \dfrac{48.5 + 50.0 + 44.5 + 49.5 + 50.5 + 45.0 + 51.0 + 43.0}{8}$ kg

$= \dfrac{382.0}{8}$ kg = 47.75 kg = 47.8 kg, दशमलव के एक स्थान तक शुद्ध

इस प्रकार, माध्य भार 47.8 kg है।

(ii) यदि शिक्षक का भार भी सम्मिलित कर लिया जाए, तो सभी प्रेक्षणों का योग (kg में)

$= 48.5 + 50.0 + 44.5 + 49.5 + 50.5 + 45.0 + 51.0 + 43.0 + 62.0$

$= 444.0$

प्रेक्षणों की संख्या = 8 + 1 = 9

अतः, माध्य $= \dfrac{444.0}{9}$ kg $= 49\dfrac{1}{3}$ kg

= 49.3 kg, दशमलव के एक स्थान तक शुद्ध

इस प्रकार, नया माध्य भार 49.3 kg हो जाएगा।

उदाहरण 3 : 6 प्रेक्षणों का माध्य 40 ज्ञात किया गया। बाद में यह पता चला कि एक प्रेक्षण 82 को गलती से 28 पढ़ लिया गया था। प्रेक्षणों का सही माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : 6 प्रेक्षणों का माध्य $= 40$

$\therefore$ इन 6 प्रेक्षणों का योग $= 40 \times 6 = 240$

उपर्युक्त में प्रेक्षण 82 को गलती से 28 पढ़ लिया गया था।

अतः, इन 6 प्रेक्षणों का सही योग $= 240 - 28 + 82 = 294$.

अतः, सही माध्य $= \dfrac{294}{6} = 49$

उदाहरण 4 : किसी सप्ताह-विशेष का माध्य तापमान 25°C था। सोमवार, मंगलवार, बुधवार एवं बृहस्पतिवार का माध्य तापमान 23°C था तथा बृहस्पतिवार, शुक्रवार, शनिवार एवं रविवार का माध्य तापमान 28°C था। बृहस्पतिवार का तापमान ज्ञात कीजिए।

हल : सप्ताह का माध्य तापमान $= 25°C$

$\therefore$ 7 दिनों के तापमानों का योग $= 7 \times 25°C = 175°C$ (1)

सोमवार, मंगलवार, बुधवार एवं बृहस्पतिवार के तापमानों का योग

$= 4 \times 23°C = 92°C$ (2)

बृहस्पतिवार, शुक्रवार, शनिवार एवं रविवार के तापमानों का योग

$= 4 \times 28°C = 112°C$ (3)

$\therefore$ सोमवार से रविवार तथा बृहस्पतिवार के तापमानों का योग

$= 92°C + 112°C$ [(2) और (3) से]

$= 204°C$ (4)

$\therefore$ बृहस्पतिवार का तापमान $= 204°C - 175°C = 29°C$ [(1) और (4) से]

16.4 बारंबारता बंटन सारणी

आइए, कक्षा VIII के 20 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त किए गए अंकों के उदाहरण (सारणी 16.1) पर पुनः विचार करें। ऐसा अनेक स्थितियों में संभव हो सकता है कि दो या अधिक प्रेक्षण एक समान हों। क्या आप यह तथ्य देख रहे हैं कि विद्यार्थियों रघु, विलियम, प्रकाश, रवि और सोहन में से प्रत्येक ने 56 अंक प्राप्त किए हैं? दूसरे शब्दों में, 56 अंक 5

विद्यार्थियों ने प्राप्त किए थे। इसी प्रकार, 61 अंक 2 विद्यार्थियों ने प्राप्त किए थे। कई बार हमारी यह जानने में रुचि होती है कि कौन-सा प्रेक्षण कितनी बार आता है।

कोई विशेष प्रेक्षण जितनी बार आता है उसे उस प्रेक्षण की बारंबारता (frequency) कहते हैं।

यह जानने के बाद कि 5 विद्यार्थियों ने 56 अंक प्राप्त किए, हम कहते हैं कि 56 की बारंबारता 5 है। इसी प्रकार, 61 की बारंबारता 2 है।

यदि हम उपर्युक्त प्रक्रिया सारणी 16.1 में दिए सभी प्रेक्षणों के लिए करें तथा आँकड़ों को सबसे छोटे से सबसे बड़े प्रेक्षणों (या सबसे बड़े से सबसे छोटे प्रेक्षणों) के क्रम में पुनर्व्यवस्थित करें, तो हमें एक बंटन (distribution) प्राप्त होगा, जो 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का *बारंबारता बंटन* (*frequency distribution*) कहलाता है। एक सारणी, जिसमें बारंबारताओं का ऐसा बंटन दिया गया हो, *बारंबारता बंटन सारणी* (*frequency distribution table*) या केवल *बारंबारता सारणी* (*frequency table*) कहलाती है। इस प्रकार, हम 20 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों की बारंबारता बंटन सारणी प्राप्त करते हैं (सारणी 16.2) जो अगले पृष्ठ पर है।

क्या आप देख रहे हैं कि सारणी 16.1 की तुलना में सारणी 16.2 अधिक अर्थपूर्ण है? ऐसा इसलिए है कि यह सारणी हमें एक दृष्टि में आँकड़ों की कुछ महत्त्वपूर्ण विशेषताओं के बारे में जानकारी प्राप्त करा देती है। उदाहरणार्थ, इससे तुरंत पता चल जाता है कि 5 विद्यार्थियों ने 56 अंक प्राप्त किए हैं।

16.5 मिलान चिह्नों का प्रयोग

उपर्युक्त उदाहरण में प्रेक्षणों की संख्या केवल 20 थी और इसीलिए दिए हुए आँकड़ों से प्रेक्षणों की संख्या गिनकर उनकी संगत बारंबारता ज्ञात करना सुविधाजनक था। परंतु यदि प्रेक्षणों की संख्या बहुत अधिक हो, तो यह हो सकता है कि केवल गिनकर बारंबारता ज्ञात करना सुविधाजनक न हो। ऐसी स्थितियों में, हम रेखिकाओं (|,\ ) जिन्हें *मिलान चिह्न* (*tally marks*) कहते हैं, का प्रयोग करते हैं। मिलान चिह्न बारंबारताएँ ज्ञात करने में हमें बहुत सहायक होते हैं। गिनती करने में सरलता के उद्देश्य से ये मिलान चिह्न *पाँच-पाँच के समूहों* में प्रयोग किए जाते हैं। पहले चार मिलान चिह्न ऊर्ध्वाधर रूप से अंकित किए जाते हैं। एक समूह में पाँचवाँ मिलान चिह्न पहले अंकित किए गए चारों मिलान चिह्नों को तिरछा काटते हुए अंकित किया जाता है (卌)। मिलान चिह्न अंकित करने की प्रक्रिया को हम एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे।

सारणी 16.2 : कक्षा VIII के 20 विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त किए गए अंकों का बारंबारता बंटन

प्राप्तांक	*बारंबारता*
28	1
31	1
33	1
36	1
45	1
56	5
59	1
61	2
64	2
70	2
74	1
76	1
88	1
योग	**20**

उदाहरण 5 : किसी कक्षा की 30 लड़कियों की लंबाइयाँ (cm में) निम्नलिखित हैं :

140, 140, 160, 139, 153, 153, 146, 150, 148, 150, 152, 146, 154, 150, 160
148, 150, 148, 140, 148, 153, 138, 152, 150, 148, 138, 152, 140, 146, 148

उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

हल : हम शीर्षकों *लंबाई* (cm में), *मिलान चिह्न* एवं *बारंबारता* वाले तीन स्तंभों की एक सारणी बनाते हैं, जैसा कि सारणी 16.3 में दर्शाया गया है। शीर्षक *लंबाई* (cm में) वाले पहले स्तंभ में, हम आरोही क्रम में विभिन्न ऊँचाइयाँ 138, 139, 140, 146, 148, 150, 152, 153, 154 और 160 लिखते हैं। अब हम दिए हुए आँकड़ों पर दृष्टि डालते हैं। पहला प्रेक्षण 140 है। इसलिए हम *मिलान चिह्न* वाले स्तंभ में 140 के सम्मुख एक मिलान चिह्न अंकित करते हैं। दूसरा प्रेक्षण पुनः 140 है। इसलिए हम पुनः सारणी में 140 के सम्मुख एक मिलान

चिह्न अंकित करते हैं। तीसरा प्रेक्षण 160 है। इसलिए हम सारणी में 160 के सम्मुख एक मिलान चिह्न अंकित करते हैं और इसी प्रकार आगे भी करते जाते हैं। जब सभी प्रेक्षण समाप्त हो जाते हैं, तब हम प्रत्येक लंबाई के सम्मुख अंकित मिलान चिह्नों को गिनते हैं तथा संगत संख्या को *बारंबारता* वाले स्तंभ में लिखते हैं। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है :

सारणी 16.3 : 30 लड़कियों की लंबाइयों का बारंबारता बंटन

लंबाई (cm में)	*मिलान चिह्न*	*बारंबारता*
138	||	2
139	|	1
140	||||	4
146	|||	3
148	卌 |	6
150	卌	5
152	|||	3
153	|||	3
154	|	1
160	||	2
	योग	**30**

टिप्पणी : दोनों बारंबारता सारणियों (सारणी 16.2 एवं सारणी 16.3) में हम देखते हैं कि *सभी बारंबारताओं का योग प्रेक्षणों की कुल संख्या के बराबर है।*

प्रश्नावली 16.1

1. निम्नलिखित प्राप्तांकों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए :

8, 6, 10, 12, 1, 3, 4, 4,

इन आँकड़ों का परिसर भी ज्ञात कीजिए।

2. किसी विद्यालय में 6 क्रमागत वर्षों में विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित थी :

1620, 2060, 2540, 3250, 3500, 3710

इस अवधि में विद्यालय में विद्यार्थियों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

3. विज्ञान की एक परीक्षा में विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित थे:

81, 72, 90, 90, 86, 85, 92, 70, 71

इस समूह द्वारा प्राप्त माध्य अंक ज्ञात कीजिए।

4. 10 लड़कियों की लंबाइयाँ cm में मापी गईं तथा परिणाम निम्नलिखित थे:

143, 148, 135, 150, 128, 139, 149, 146, 151, 132

(i) सबसे अधिक लंबी लड़की की लंबाई क्या है?

(ii) सबसे कम लंबी लड़की की लंबाई क्या है?

(iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है?

(iv) माध्य लंबाई ज्ञात कीजिए।

(v) कितनी लड़कियों की लंबाइयाँ माध्य लंबाई से कम हैं?

5. किसी शहर में एक सप्ताह-विशेष के 7 दिनों में हुई वर्षा (mm में) निम्नलिखित थी:

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
वर्षा (*mm* में)	2.2	21.3	25.6	0.0	4.9	0.0	5.5

(i) उपर्युक्त आँकड़ों के अनुसार हुई वर्षा का परिसर ज्ञात कीजिए।

(ii) इस सप्ताह में हुई माध्य वर्षा ज्ञात कीजिए।

(iii) कितने दिन वर्षा माध्य वर्षा से कम थी?

6. 10 क्रमागत दिनों में किसी शहर के अधिकतम दैनिक तापमान (°C में) निम्नलिखित थे :

32.4, 29.5, 26.3, 25.7, 23.4, 24.2, 22.4, 22.5, 22.8, 23.3

(i) आँकड़ों का परिसर ज्ञात कीजिए।

(ii) माध्य दैनिक तापमान ज्ञात कीजिए।

7. मार्च 2003 के प्रथम सप्ताह में किसी अस्पताल में जन्म लेने वाले शिशुओं की संख्याएँ निम्नलिखित हैं :

18, 18, 17, 17, 10, 11, 14

उपर्युक्त सप्ताह में उस अस्पताल में जन्म लेने वाले शिशुओं की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

8. विद्यार्थियों के एक समूह ने एक विशेष परीक्षा दी। विभिन्न विद्यार्थियों ने यह परीक्षा जितने मिनटों में पूरी की वे निम्नलिखित हैं:

17, 19, 20, 22, 24, 24, 28, 30, 30, 36

(i) विद्यार्थियों द्वारा परीक्षा पूरी करने में लिया गया माध्य समय ज्ञात कीजिए।

(ii) कितने विद्यार्थियों ने परीक्षा पूरी करने में माध्य समय से अधिक समय लिया?

(iii) यदि एक विद्यार्थी, जिसने परीक्षा पूरी करने में 36 मिनट लिए थे, परीक्षा पूरी करने में केवल 22 मिनट लगाता, तो माध्य समय क्या होता?

9. 5 संख्याओं का माध्य 20 है। यदि इनमें से एक संख्या निकाल दी जाए, तो शेष संख्याओं का माध्य 23 हो जाता है। निकाली गई संख्या ज्ञात कीजिए।

10. 25 प्रेक्षणों का माध्य 27 है। यदि एक नए प्रेक्षण को सम्मिलित करने पर माध्य 27 ही रहता है, तो सम्मिलित किया गया प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

11. पाँच प्रेक्षणों का माध्य 15 है। यदि प्रथम तीन प्रेक्षणों का माध्य 14 है तथा अंतिम तीन प्रेक्षणों का माध्य 17 है, तो तीसरा प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

12. प्रथम दस प्राकृत संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

13. प्रथम छ: अभाज्य संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

14. किसी खिलाड़ी द्वारा 9 क्रिकेट मैचों में बनाए गए रन निम्नलिखित हैं:

85, 82, 91, 0, 42, 8, 29, 1, 37

ज्ञात कीजिए :

(i) खिलाड़ी द्वारा बनाए गए रनों का माध्य (औसत)

(ii) बनाए गए रनों का परिसर

15. 9 प्रेक्षणों का माध्य 35 ज्ञात किया गया। बाद में यह पता चला कि एक प्रेक्षण 81 को गलती से 18 पढ़ लिया गया था। इन प्रेक्षणों का सही माध्य ज्ञात कीजिए।

16. 33 विद्यार्थियों ने गणित की एक परीक्षा में (100 में से) निम्नलिखित अंक प्राप्त किए:

69, 48, 84, 58, 84, 48, 73, 83, 48, 66, 58, 66, 64, 71, 64, 66, 69, 66, 83, 66, 69, 71, 81, 71, 73, 69, 66, 66, 64, 58, 64, 69, 69

उपर्युक्त प्राप्तांकों के लिए एक बारंबारता सारणी बनाइए।

17. किसी नगर के 20 परिवारों में सदस्यों की संख्याएँ निम्नलिखित हैं:

6, 8, 4, 3, 5, 6, 7, 4, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 4, 3, 3, 6, 4, 3

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) सबसे छोटे परिवार में कितने सदस्य हैं? इतने सदस्यों वाले कितने परिवार हैं?

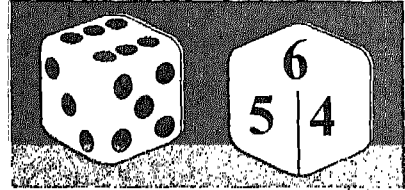
(ii) सबसे बड़े परिवार में कितने सदस्य हैं? इतने सदस्यों वाले कितने परिवार हैं?

(iii) अधिकतर परिवारों में कितने सदस्य हैं?

18. किसी शहर में हुई सड़क दुर्घटनाओं के अध्ययन में अप्रैल 2003 के 30 दिनों के प्राप्त प्रेक्षण निम्नलिखित थे:

4, 3, 5, 6, 4, 3, 2, 5, 4, 2, 6, 2, 1, 2, 2, 0, 5, 4, 6, 1, 3, 0, 5, 3, 6, 1, 5, 5, 2, 6

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

19. पासा (die) एक ऐसा घन होता है जिसके छ: फलकों पर 1 से 6 तक संख्याएँ या बिंदु (प्रत्येक फलक पर एक अंक) अंकित होते हैं [आकृति 16.1]। पासे को 25 बार उछाला गया तथा निम्नलिखित अंक प्राप्त किए गए :

आकृति 16.1

5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 5, 4, 6, 6, 6, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 5, 2, 1, 3

उपर्युक्त अंकों के लिए एक बारंबारता सारणी बनाइए।

20. किसी कक्षा के 30 विद्यार्थियों के भार (kg में) निम्नलिखित हैं :

49, 48, 46, 48, 48, 50, 52, 53, 54, 43, 43, 41, 43, 55, 56, 48, 47, 41, 40, 49, 51, 51, 56, 46, 45, 44, 49, 53, 42, 47

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए एक बारंबारता सारणी बनाइए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(i) सबसे कम भार कितना है?

(ii) उपर्युक्त आँकड़ों में सबसे कम भार वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(iii) उपर्युक्त आँकड़ों में सबसे अधिक भार वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(iv) किस भार वाले विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है?

21. सामाजिक विज्ञान में 60 विद्यार्थियों द्वारा (50 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :

23, 24, 27, 37, 40, 41, 42, 21, 17, 19, 34, 36, 29, 38, 42, 39, 42, 36, 24, 21,
24, 19, 18, 27, 25, 41, 40, 30, 29, 27, 31, 37, 34, 36, 37, 42, 36, 35, 43, 37,
29, 24, 25, 29, 28, 46, 29, 39, 41, 32, 31, 32, 17, 18, 19, 23, 24, 42, 36, 35

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए बारंबारता बंटन सारणी की रचना कीजिए। इन आँकड़ों का परिसर भी ज्ञात कीजिए।

22. 50 दशमलव स्थानों तक π का मान निम्नलिखित है:

3. 1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510

उपर्युक्त संख्या के दशमलव भाग में निम्नलिखित अंकों की बारंबारता लिखिए:

(i) 2 (ii) 3 (iii) 5 (iv) 6 (v) 9 (vi) 1

16.6 आँकड़ों का वर्गीकरण

अभी तक हमने यह सीखा है कि किस प्रकार आँकड़ों को बारंबारता वाली सारणी के रूप में संगठित किया जाता है। ऐसी सारणी यथा प्राप्त आँकड़ों की *अवर्गीकृत* (*ungrouped*) *बारंबारता बंटन* सारणी कहलाती है। हमारे प्राप्तांकों वाले पहले उदाहरण में विद्यार्थियों की संख्या केवल 20 थी। यदि आँकड़ों में प्रेक्षणों की संख्या बड़ी हो (जैसे कि प्रश्नावली 16.1 के प्रश्न 21 में), तो यह वांछनीय होता है कि दिए हुए आँकड़ों को अनेक समूहों में वर्गीकृत कर संघनित किया जाए तथा प्रत्येक समूह (वर्ग) की बारंबारता ज्ञात कर एक *बारंबारता बंटन* बनाया जाए। जब आँकड़े को इस रूप में लिखा जाता है, तो ये आँकड़े *वर्गीकृत* (*grouped*) आँकड़े कहलाते हैं तथा प्राप्त बंटन *वर्गीकृत बारंबारता बंटन* (*grouped frequency distribution*) कहलाता है। नीचे इस अवधारणा को उदाहरण द्वारा समझाया गया है।

सारणी 16.4 : 60 विद्यार्थियों द्वारा सामाजिक विज्ञान में प्राप्त किए गए अंकों का बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल (प्राप्तांक)	*मिलान चिह्न*	*बारंबारता*
17 – 19	卌 II	7
20 – 22	II	2
23 – 25	卌 IIII	9
26 – 28	IIII	4
29 – 31	卌 III	8
32 – 34	IIII	4
35 – 37	卌 卌 I	11
38 – 40	卌	5
41 – 43	卌 IIII	9
44 – 46	I	1
	योग	**60**

सारणी 16.4 में हमने दिए हुए 60 प्रेक्षणों को दस समूहों (वर्गों) 17 – 19, 20 – 22, 23 – 25, 26 – 28, 29 – 31, 32 – 34, 35 – 37, 38 – 40, 41 – 43 और 44 – 46 में संघनित कर लिया है। इनमें से प्रत्येक समूह एक *वर्ग अंतराल* (*class interval*) [या संक्षेप में *वर्ग* (*class*)] कहलाता है।

हम इन्हीं 60 प्रेक्षणों को दस समूहों 17– 20, 20 – 23, 23 – 26, ... तथा 44 – 47 के रूप में भी वर्गीकृत कर सकते हैं, जैसा कि सारणी 16.5 में दर्शाया गया है :

सारणी 16.5 : 60 विद्यार्थियों द्वारा सामाजिक विज्ञान में प्राप्त किए गए अंकों का बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल (*प्राप्तांक*)	*मिलान चिह्न*	*बारंबारता*
17 – 20	~~||||~~ ||	7
20 – 23	||	2
23 – 26	~~||||~~ ||||	9
26 – 29	||||	4
29 – 32	~~||||~~ |||	8
32 – 35	||||	4
35 – 38	~~||||~~ ~~||||~~ |	11
38 – 41	~~||||~~	5
41 – 44	~~||||~~ ||||	9
44 – 47	|	1
	योग	**60**

सारणी 16.5 के वर्गों 17 – 20, 20 – 23, 23 – 26, इत्यादि से ऐसा प्रतीत होता है कि प्रेक्षण 20 दोनों वर्गों 17 – 20 और 20 – 23 में सम्मिलित है। इसी प्रकार, प्रेक्षण 23 दोनों वर्गों 20 – 23 और 23 – 26, इत्यादि में हो सकता है। परंतु ऐसा नहीं होना चाहिए, क्योंकि कोई भी प्रेक्षण एक साथ दो वर्गों (समूहों) में सम्मिलित नहीं हो सकता। इस कठिनाई से बचने के लिए, हम यह परिपाटी अपनाते हैं कि उभयनिष्ठ प्रेक्षण 20 बड़े वर्ग, अर्थात् 20 – 23 में

सम्मिलित हैं (17 – 20 में नहीं)। इसी प्रकार, 23 बड़े वर्ग 23 – 26 में सम्मिलित है (20 – 23 में नहीं), इत्यादि। उदाहरणार्थ, वर्ग 26 – 29 में वे सभी प्रेक्षण सम्मिलित हैं जो 26 के बराबर या उससे अधिक हैं परंतु 29 से कम हैं, इत्यादि। इस अध्याय में हम उसी प्रकार के वर्ग अंतराल लेंगे जैसे सारणी 16.5 में दिए गए हैं।

वर्ग अंतराल 17–20 में 17 *निम्न वर्ग सीमा* (*lower class limit*) कहलाती है तथा 20 *उच्च वर्ग सीमा* (*upper class limit*) कहलाती है। इसी प्रकार, वर्ग अंतराल 41 – 44 के लिए 41 निम्न वर्ग सीमा है तथा 44 उच्च वर्ग सीमा है। किसी अंतराल की उच्च वर्ग सीमा और निम्न वर्ग सीमा का अंतर उस अंतराल की *चौड़ाई* (*width*) या *माप* (*size*) कहलाती है। स्पष्ट है कि उपर्युक्त बंटन में प्रत्येक अंतराल की माप 3 है। किसी वर्ग अंतराल के संगत बारंबारता उसकी *वर्ग बारंबारता* (*class frequency*) कहलाती है। साथ ही, किसी वर्ग का मध्य-बिंदु उसका *वर्ग चिह्न* (*class mark*) कहलाता है। इसे निम्न और उच्च वर्ग सीमाओं के योग को 2 से विभाजित कर प्राप्त किया जाता है। उदाहरणार्थ, सारणी 16.5 के वर्ग अंतराल 17–20 का वर्ग चिह्न $\frac{17+20}{2} = 18.5$ है। इसी प्रकार, अन्य वर्ग अंतरालों के वर्ग चिह्न 21.5, 24.5, इत्यादि हैं।

टिप्पणियाँ : 1. वर्गीकृत बारंबारता बंटन में वर्ग अंतरालों की संख्या या माप निर्धारित करने का कोई निश्चित या पक्का नियम नहीं है, प्रत्येक समूह (वर्ग) की माप तथा वर्गों की संख्या का निर्धारण आँकड़ों के परिसर को दृष्टिगत रखते हुए किया जाता है।

2. विभिन्न वर्गों की चौड़ाइयाँ (माप) समान होना आवश्यक नहीं है। परंतु इस प्रकार के वर्ग मापों की चर्चा प्रस्तुत पुस्तक की सीमा के बाहर है।

आइए, इन अवधारणाओं को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 6 : बारंबारता बंटन सारणी (सारणी 16.6) को पढ़िए और फिर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) वर्ग अंतरालों की माप क्या है?

(ii) दूसरे वर्ग अंतराल की निम्न वर्ग सीमा क्या है?

(iii) सातवें वर्ग अंतराल की उच्च वर्ग सीमा क्या है?

(iv) किस वर्ग की बारंबारता अधिकतम है?

(v) चौथे वर्ग अंतराल का वर्ग चिह्न क्या है?

सारणी 16.6 : किसी फैक्ट्री के 600 श्रमिकों की दैनिक आय का बारंबारता बंटन

वर्ग अंतराल (रुपयों में दैनिक आय)	*बारंबारता (श्रमिकों की संख्या)*
100–125	45
125–150	25
150–175	55
175–200	50
200–225	125
225–250	140
250–275	55
275–300	35
300–325	50
325–350	20
योग	**600**

हल : (i) प्रत्येक वर्ग अंतराल की माप 25 है।

(ii) दूसरे वर्ग अंतराल (125 – 150) की निम्न वर्ग सीमा 125 है।

(iii) सातवें वर्ग अंतराल (250 – 275) की उच्च वर्ग सीमा 275 है।

(iv) वर्ग 225 – 250 की बारंबारता अधिकतम (140) है।

(v) चौथे वर्ग अंतराल (175–200) का वर्ग चिह्न $\frac{175+200}{2} = \frac{375}{2} = 187.5$ है।

उदाहरण 7 : किसी जनगणना रिपोर्ट से यादृच्छिक रूप से लिए गए एक राज्य के 80 नगरों एवं गाँवों की जनसंख्या (सौ में) निम्नलिखित हैं :

11, 72, 15, 8, 15, 3, 23, 26, 2, 319, 200, 6, 16, 6, 131, 5, 18, 240, 99, 127, 31, 72, 18, 30, 43, 2, 1, 52, 40, 3, 7, 13, 5, 142, 70, 86, 31, 38, 70, 51, 11, 52, 18, 46, 89, 1, 30, 25, 4, 52, 15, 139, 12, 277, 24, 48, 5, 26, 39, 18, 17, 159, 30, 171, 30, 6, 160, 52, 222, 13, 55, 9, 3, 149, 3, 52, 12, 124, 120, 10

वर्ग अंतराल 0 – 30, 30 – 60, 60 – 90, इत्यादि लेते हुए एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी बनाइए। किस वर्ग की बारंबारता अधिकतम है?

हल: हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है :

सारणी 16.7 : किसी राज्य के 80 नगरों एवं गाँवों की जनसंख्या (सौ में) का बारंबारता बंटन

जनसंख्या (सौ में)	*मिलान चिह्न*	*बारंबारता*
0 – 30	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||||	39
30 – 60	卌 卌 卌	19
60 – 90	卌 |	6
90 – 120	|	1
120 – 150	卌 ||	7
150 – 180	|||	3
180 – 210	|	1
210 – 240	|	1
240 – 270	|	1
270 – 300	|	1
300 – 330	|	1
	योग	**80**

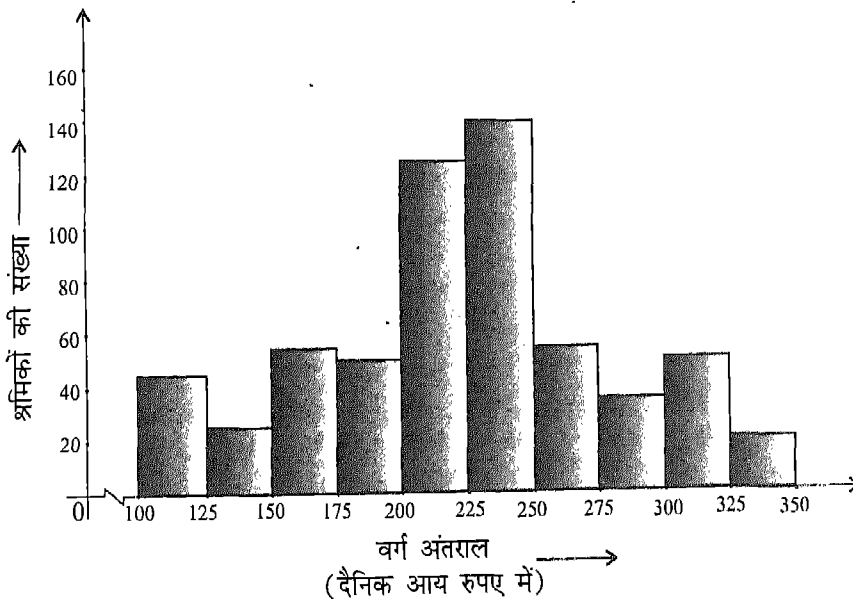
वर्ग 0–30 की बारंबारता अधिकतम है।

16.7 आयतचित्र

कक्षा VII में आपने दिए हुए आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित करना सीखा था। आइए, अब देखें कि एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन को एक आलेख के रूप में किस प्रकार निरूपित किया जाता है। इसके लिए अधिकांश रूप से एक *आयतचित्र* (*histogram*) का प्रयोग किया जाता है (आकृति 16.2)।

आयतचित्र बनाने के लिए, हम परस्पर लंब दो अक्ष खींचते हैं और प्रत्येक अक्ष के लिए एक उपयुक्त पैमाना (scale) चुनते हैं। हम वर्गीकृत आँकड़ों के वर्ग अंतरालों को क्षैतिज अक्ष पर अंकित करते हैं तथा संगत वर्ग बारंबारताओं को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर अंकित करते हैं। प्रत्येक वर्ग के लिए एक आयत की रचना इस प्रकार की जाती है कि उसका आधार (base) वर्ग अंतराल हो तथा उसकी ऊँचाई संगत बारंबारता से इस प्रकार निर्धारित हो कि आयतों के क्षेत्रफल वर्गों की बारंबारताओं के समानुपाती हों। चूँकि हम केवल बराबर चौड़ाई के वर्ग अंतरालों वाले वर्गीकृत बारंबारता बंटन पर ही विचार कर रहे हैं, इसलिए आयतों की ऊँचाइयाँ उनकी संगत बारंबारताओं के समानुपाती होंगी।

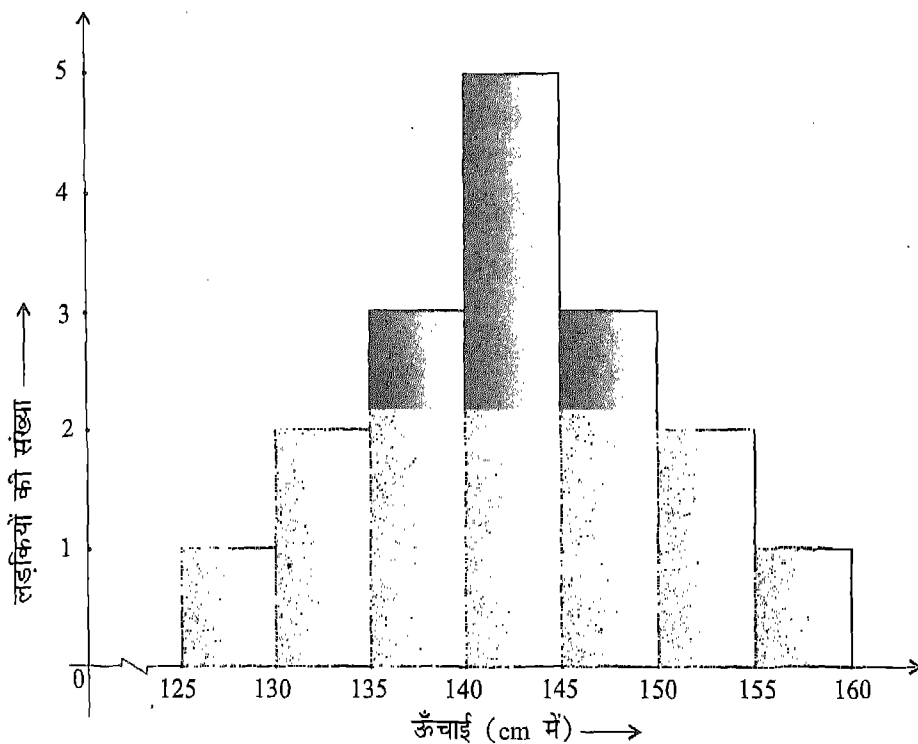
आकृति 16.2 किसी फैक्ट्री के 600 श्रमिकों की दैनिक आय के वर्गीकृत बारंबारता बंटन (सारणी 16.6) के लिए एक आयतचित्र को दर्शाती है।

सारणी 16.6 के आँकड़ों के लिए आयतचित्र

आकृति 16.2

उपर्युक्त आयतचित्र से यह स्पष्ट है कि अधिकतम श्रमिकों की दैनिक आय वर्ग 225 – 250 में है तथा श्रमिकों की न्यूनतम संख्या आय समूह 225 – 250 में है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि वर्ग अंतराल 100–125 से पहले क्षैतिज अक्ष पर एक भंग चिह्न (Kink) '   ' है। यह भंग चिह्न दर्शाता है कि क्षैतिज अक्ष पर 0 से 100 तक की पूरी दूरी दर्शाई नहीं गई है।

उदाहरण 8 : निम्नलिखित आयतचित्र को पढ़िए तथा उसके बाद दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

किसी कक्षा की 17 लड़कियों की लंबाइयाँ (cm में) के लिए आयतचित्र

आकृति 16.3

(i) इस आयतचित्र से क्या सूचना प्रदर्शित होती है?

(ii) किस वर्ग में लड़कियों की अधिकतम संख्या सम्मिलित है?

(iii) किन वर्गों में लड़कियों की संख्याएँ बराबर हैं?

(iv) कितनी लड़कियों की लंबाइयाँ 145 cm या उससे अधिक हैं?

हल : (i) यह आयतचित्र किसी कक्षा की 17 लड़कियों की लंबाइयाँ (cm में) प्रदर्शित करता है।

(ii) वर्ग 140–145 में लड़कियों की संख्या अधिकतम है।

(iii) निम्नलिखित वर्गों में लड़कियों की संख्याएँ बराबर हैं:

(a) 125 – 130 और 155 – 160

(b) 130 – 135 और 150 – 155

(c) 135 – 140 और 145 – 150

(iv) 6 लड़कियों की लंबाइयाँ 145 cm या उससे अधिक हैं।

प्रश्नावली 16.2

1. किसी कक्षा के 40 विद्यार्थियों द्वारा एक परीक्षा में गणित में प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं :

   3, 20, 13, 1, 21, 13, 3, 23, 16, 13, 5, 24, 15, 7, 10, 18, 18, 7, 17, 21, 15, 5, 23, 2, 12, 20, 2, 10, 16, 23, 18, 12, 6, 9, 7, 3, 5, 16, 8, 8

   उपर्युक्त आँकड़ों को, समान माप के वर्ग अंतरालों का प्रयोग करते हुए, एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन के रूप में प्रस्तुत कीजिए, जिनमें एक वर्ग अंतराल 10–15 हो।

2. कक्षा VIII के 30 विद्यार्थियों की साप्ताहिक बचत (रुपयों में) निम्नलिखित है:

   38, 42, 40, 35, 72, 27, 57, 62, 59, 80, 84, 73, 65, 40, 76, 40, 38, 60, 58, 38, 54, 39, 50, 44, 71, 83, 45, 38, 80, 77

   उपर्युक्त आँकड़ों के लिए समान चौड़ाई वाले वर्ग अंतरालों का प्रयोग करते हुए एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी ऐसे बनाइए कि एक वर्ग अंतराल 30–35 हो।

3. निम्नलिखित आँकड़ें किसी विद्यालय के 100 विद्यार्थियों के जेब खर्च को दर्शाते हैं :

सप्ताहिक जेब खर्च (रुपयों में)	30	35	45	50	55	60	65
विद्यार्थियों की संख्या	6	10	14	22	35	9	4

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए एक वर्ग अंतराल 30–40 लेते हुए, समान माप के वर्ग अंतरालों वाला एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन बनाइए।

4. किसी मोहल्ले के 40 व्यक्तियों के भारों (kg में) का बारंबारता बंटन निम्नलिखित है :

भार (kg में)	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60	60 – 65
बारंबारता	4	12	13	6	5

(i) चौथे वर्ग अंतराल की उच्च वर्ग सीमा क्या है?

(ii) सभी वर्गों के वर्ग चिह्न ज्ञात कीजिए।

(iii) प्रत्येक वर्ग अंतराल की माप क्या है?

(iv) किस वर्ग अंतराल की बारंबारता अधिकतम है?

5. किसी वर्ष के जून मास के लिए एक शहर के दैनिक अधिकतम एवं न्यूनतम तापमान (°C में) निम्नलिखित हैं:

दैनिक अधिकतम तापमान :

35.5, 35.9, 36.0, 38.4, 36.6, 40.1, 41.3, 43.3, 42.8, 32.8, 39.6, 38.0, 32.0, 35.6, 33.9, 34.5, 35.3, 35.7, 35.9, 36.4, 33.8, 33.5, 32.7, 32.9, 34.0, 34.6, 38.8, 39.8, 40.2, 41.4.

दैनिक न्यूनतम तापमान :

27.8, 23.4, 23.4, 28.0, 26.6, 29.5, 28.7, 33.5, 22.6, 23.9, 25.5, 21.7, 30.0, 31.3, 32.6, 30.0, 29.5, 25.5, 26.3, 24.3, 24.0, 23.5, 23.2, 30.6, 27.5, 28.3, 28.7, 29.6, 30.3, 32.7.

उपर्युक्त में से प्रत्येक के लिए समान वर्ग मापों का प्रयोग करते हुए, एक बारंबारता सारणी की रचना कीजिए, जिसमें अधिकतम तापमानों के लिए एक वर्ग अंतराल 36 – 37 हो तथा न्यूनतम तापमानों के लिए एक वर्ग अंतराल 24 – 25 हो।

6. एक दिन-विशेष पर 30 दवा विक्रेताओं की आय (निकटतम सौ रुपए तक) निम्नलिखित हैं:

आय (रुपयों में)	600	1500	1800	1900	2400	2600	3100	3900
विक्रेताओं की संख्या	3	7	4	5	4	3	2	2

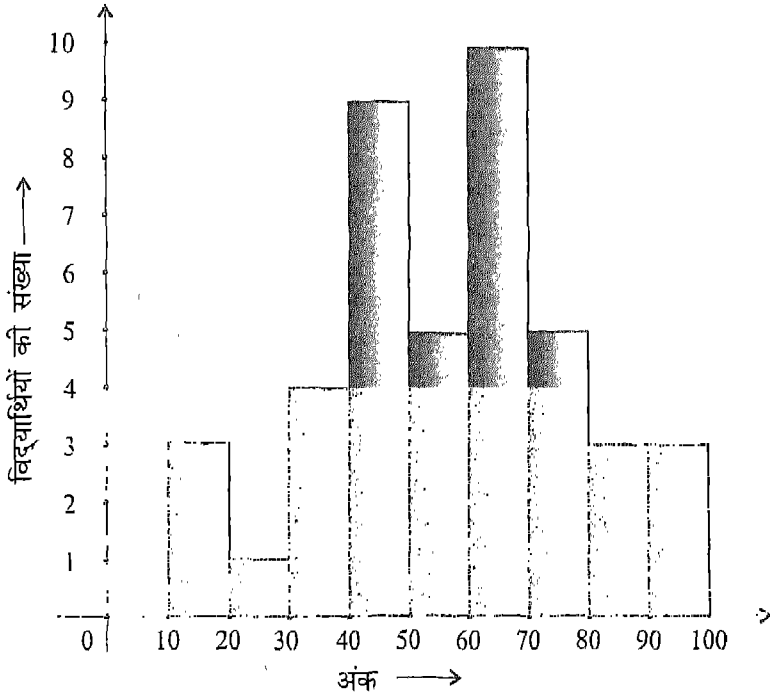
उपर्युक्त के लिए समान वर्ग मापों के वर्ग अंतरालों वाली एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए, जिसमें एक वर्ग अंतराल 500–1000 हो।

7. 30 व्यक्तियों की नाड़ी दर प्रति मिनट निम्नलिखित पाई गईं :

61, 76, 72, 73, 71, 66, 78, 73, 68, 81, 78, 63, 72, 75, 80, 68, 75, 62, 71, 81, 73, 60, 79, 72, 73, 74, 71, 64, 76, 71

समान चौड़ाई के वर्ग अंतरालों का प्रयोग करते हुए, एक बारंबारता सारणी की रचना कीजिए, जिसमें एक वर्ग अंतराल 60-65 हो।

8. निम्नलिखित आयतचित्र को पढ़िए तथा उसके अंत में दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

किसी कक्षा के 43 विद्यार्थियों द्वारा भौतिकी में प्राप्त किए गए अंकों के लिए आयतचित्र

आकृति 16.4

(i) उपर्युक्त आयतचित्र से क्या सूचना प्रदर्शित होती है?

(ii) प्रत्येक वर्ग की माप क्या है?

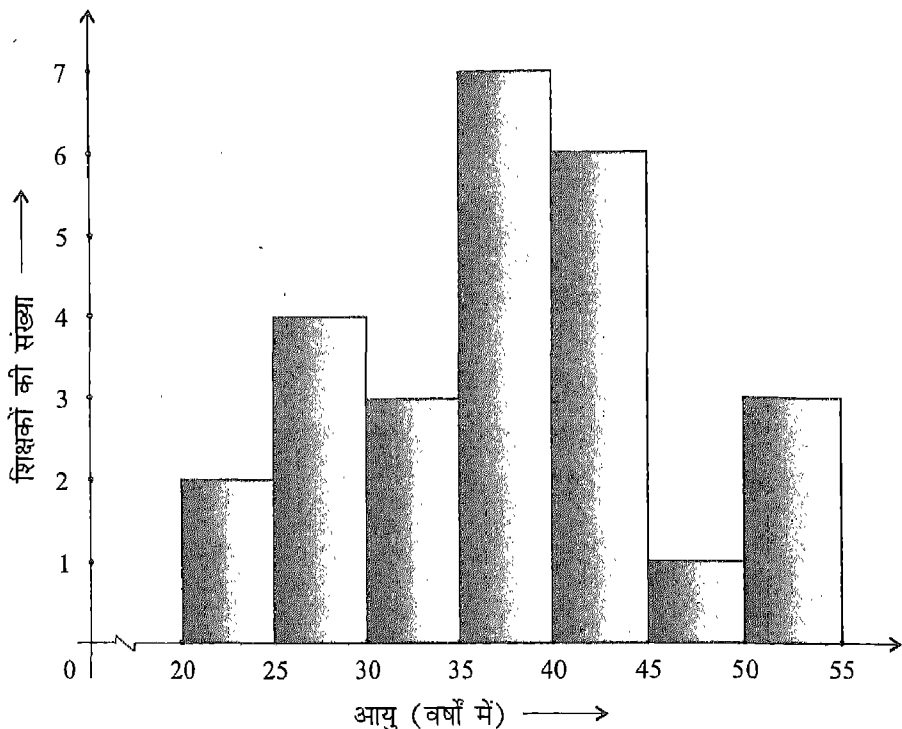
(iii) अधिकतम अंक प्राप्त करने वाले वर्ग में विद्यार्थियों की संख्या लिखिए।

(iv) किन वर्गों में विद्यार्थियों की संख्याएँ बराबर हैं?

(v) न्यूनतम अंक प्राप्त करने वाले, वर्ग में विद्यार्थियों की संख्या क्या है?

(vi) कितने विद्यार्थियों ने 60 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए हैं?

9. निम्नलिखित आयतचित्र को पढ़िए तथा उसके बाद दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

किसी विद्यालय के 26 शिक्षकों की आयु (वर्षों में) के लिए आयतचित्र

आकृति 16.5

(i) उपर्युक्त आयतचित्र से क्या सूचना प्रदर्शित होती है?

(ii) विद्यालय में सबसे बड़े आयु वर्ग में शिक्षकों की संख्या क्या है?

(iii) विद्यालय में सबसे छोटे आयु वर्ग में शिक्षकों की संख्या क्या है?

(iv) किस आयु वर्ग में शिक्षकों की संख्या न्यूनतम है?

(v) किस आयु वर्ग में शिक्षकों की संख्या अधिकतम है?

(vi) प्रत्येक वर्ग अंतराल की माप क्या है?

(vii) सभी वर्ग अंतरालों के वर्ग चिह्न क्या हैं?

(viii) कितने शिक्षक 30 वर्ष से कम आयु के हैं?

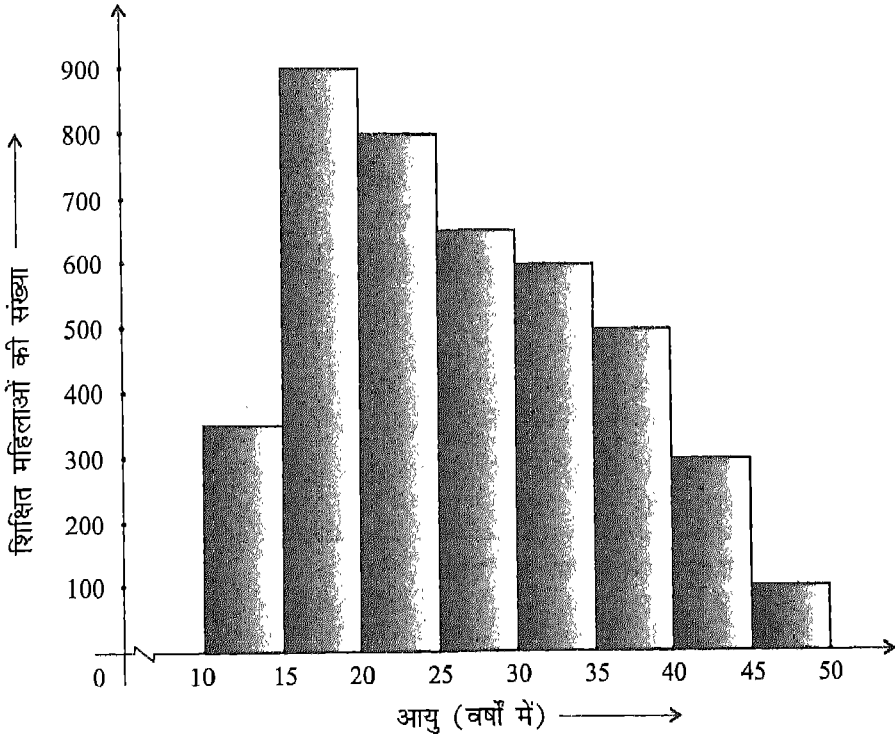
10. किसी परीक्षा में 35 विद्यार्थियों द्वारा जीव विज्ञान में प्राप्त निम्नलिखित अंकों (50 में से) के लिए, वर्ग अंतराल 0-5, 5-10, इत्यादि वर्ग अंतराल लेते हुए एक बारंबारता सारणी की रचना कीजिए :

0, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 22, 25, 26, 27, 8, 11, 17, 3, 6, 9, 17, 19, 21, 22, 29, 31, 35, 37, 40, 42, 45, 49, 4, 50, 16, 20

(i) उपर्युक्त आँकड़ों का परिसर क्या है?

(ii) किस वर्ग में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है?

11. निम्नलिखित आयतचित्र को पढ़िए और उसके बाद दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

किसी गाँव की शिक्षित महिलाओं की संख्या के लिए आयतचित्र

आकृति 16.6

(i) उपर्युक्त आयतचित्र से क्या सूचना प्रदर्शित होती है?

(ii) किस आयु वर्ग में शिक्षित महिलाओं की संख्या अधिकतम है?

(iii) किस आयु वर्ग में शिक्षित महिलाओं की संख्या न्यूनतम है?

(iv) प्रत्येक वर्ग अंतराल की चौड़ाई क्या है?

(v) सभी वर्ग अंतरालों के वर्ग चिह्न क्या हैं?

(vi) 30 वर्ष से कम आयु की कितनी महिलाएँ शिक्षित हैं?

12. 50 व्यक्तियों के भार (kg में) निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारणी में दिए गए हैं :

भार (kg में)	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80	80–85	85–90
व्यक्तियों की संख्या	12	8	5	4	5	6	6	4

(i) वर्ग 50–55 में कितने व्यक्ति हैं?

(ii) अधिकतम भार वाले वर्ग में सम्मिलित व्यक्तियों की संख्या लिखिए।

(iii) वर्ग 80–85 की माप क्या है?

(iv) वर्ग 85–90 का वर्ग चिह्न क्या है?

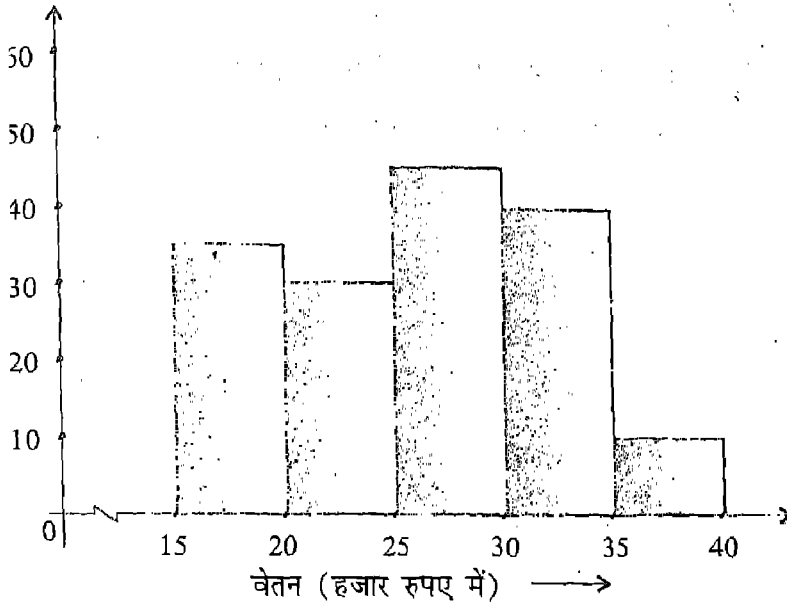
13. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंकों की निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारणी में रिक्त स्थानों को भरिए :

प्राप्तांक	*मिलान चिह्न*	*बारंबारता*
0 – 20	॥।	—
20 – 40	𝍸 ॥	—
40 – 60	𝍸 𝍸 𝍸 —	18
60 – 80	𝍸 𝍸 ।	—
80 – 100	—	2

14. निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों को भरिए :

भार (kg में)	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
वर्ग चिह्न	—	—	—	—	—

़ आयतचित्र के लिए एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी बनाइए।

सी फैक्ट्री के कर्मचारियों के मासिक वेतन के लिए आयतचित्र

आकृति 16.7

याद रखने योग्य बातें

रूप से एकत्रित किए गए प्रेक्षण आँकड़े कहलाते हैं।

आँकड़ों में प्रेक्षणों के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों का अंतर उनका परिसर है।

$$\text{आँकड़ों का माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

आँकड़ों में, कोई विशेष प्रेक्षण जितनी बार आता है उस संख्या को प्रेक्षण की कहते हैं।

के विभिन्न प्रेक्षणों की बारंबारताओं को दर्शाने वाली सारणी बारंबारता बंटन

7. गिनने की सुविधा के लिए, मिलान चिह्न प्राय: पाँच-पाँच के समूहों में अंकित किए जाते हैं।
8. जब प्रेक्षणों की संख्या बहुत अधिक होती हैं, तो हम आँकड़ों को समूहों में संगठित करते हैं, जिन्हें वर्ग या वर्ग अंतराल कहते हैं। इस प्रकार प्राप्त आँकड़े वर्गीकृत आँकड़े अथवा वर्गीकृत बारंबारता बंटन कहलाते हैं।
9. किसी वर्ग अंतराल के न्यूनतम मान को उसकी निम्न वर्ग सीमा तथा उच्चतम मान को उसकी उच्च वर्ग सीमा कहते हैं।
10. किसी वर्ग अंतराल के न्यूनतम एवं उच्चतम मानों के अंतर को उसकी चौड़ाई या माप कहते हैं।
11. किसी वर्ग अंतराल के मध्य-मान को उसका वर्ग चिह्न कहते हैं।
12. किसी वर्ग अंतराल की बारंबारता उसकी वर्ग बारंबारता कहलाती है।
13. आयतचित्र वर्गीकृत आँकड़ों का एक आलेखीय निरूपण होता है, जिसमें वर्ग अंतराल क्षैतिज अक्ष के अनुदिश लिए जाते हैं तथा बारंबारताएँ ऊर्ध्वाधर अक्ष के अनुदिश। प्रत्येक वर्ग के लिए एक आयत खींचा जाता है, जिसका आधार वर्ग अंतराल को लिया जाता है तथा उसकी ऊँचाई संगत बारंबारता से निर्धारित की जाती है।

——— अतीत के झरोखे से ———

हम सभी सांख्यिकी की अवधारणाओं से किसी न किसी रूप में परिचित हैं, क्योंकि सभी पत्रिकाएँ, समाचार पत्र, रेडियो एवं टी.वी. के विज्ञापन सांख्यिकी अथवा संख्यात्मक आँकड़ों से परिपूर्ण होते हैं। संख्यात्मक (अथवा सांख्यिक) आँकड़ों को एकत्रित करने की प्रथा प्राचीन भारत में भी थी। इसका प्रमाण यह है कि *चंद्रगुप्त मौर्य* (324-320 ईसा पूर्व) के राज्य काल में इस प्रकार के, विशेषत: जन्म और मृत्यु से संबंधित आँकड़े एकत्र करने का बहुत अच्छा प्रबंध था। *अकबर* के राज्य काल (1556-1605 ई.) में उस समय के भू-राजस्व मंत्री *राजा टोडरमल* भी भूमि तथा कृषि से संबंधित आँकड़ों का अभिलेख भली-भाँति रखते थे। *अबुल फजल* द्वारा लिखित *आइन-ए-अकबरी* (1596-97 ई.) में उस अवधि में किए गए प्रशासकीय तथा सांख्यिक सर्वेक्षणों का विस्तृत विवरण मिलता है।

आधुनिक अर्थ में पहला वास्तविक सांख्यिकीविद् एक अंग्रेज दुकानदार *जॉन ग्रोंट* (1620-1674) को माना जा सकता है। उसकी रुचि *जोफल्न* (*Jawfaln*), *किंगस-इविल* (*Kings-Evil*), *ग्रह* (*Planet*) और *टिस्सिक* (*Tissik*) (ये सभी रोग हैं !) तथा अन्य ऐसे कारणों में हुई जिनसे उस समय लंदन में मृत्यु हो जाती थी। उसने इनसे संबंधित आँकड़े एकत्रित किए तथा उनका संसाधन किया। यह सांख्यिकी की शुरूआत थी।

ग्रोंट की तकनीक से प्रभावित होकर, अनेक गणितज्ञों ने जिनमें *लाप्लास* (1749-1827) और *गौस* (1777-1855) सम्मिलित थे, सांख्यिकी की आधारभूत अवधारणाओं का विकास किया। जैविकीविदों ने इन अवधारणाओं को समझा तथा सांख्यिकी की तकनीकों का प्रयोग करके अपने क्षेत्र में महत्त्वपूर्ण सिद्धांत स्थापित किए। इनमें जो प्रसिद्ध हैं वे थे : *चार्ल्स डार्विन* (1809-1882) और उसका विकास का सिद्धांत (Theory of evolution), *ग्रेगर मेंडेल* (1822-1884) और उसके मटर पर प्रयोग (peas-experiment), *कार्ल पियर्सन* (1857-1936) और उसका सहसंबंध सिद्धांत जो हमें यह बताता है कि किस प्रकार निर्धारित किया जाए कि एक वस्तु दूसरी वस्तु पर प्रभाव डालती है अथवा नहीं तथा यदि डालती है तो कितना।

आज जीवन का कोई ऐसा क्षेत्र नहीं है जहाँ सांख्यिकी एक महत्त्वपूर्ण भूमिका न अदा करती हो।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. संख्याएँ जिनके अंतिम अंक 2, 3, 7, 8 हों, वे वर्ग संख्याएँ नहीं होती हैं।

2. (i) 1 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6

(vi) 9 (vii) 4 (viii) 0 (ix) 6 (x) 5

3. (i) संख्याएँ जिनके अंत में शून्यों की संख्या विषम हो, वे वर्ग संख्याएँ नहीं होती हैं।

(ii) 2 पर समाप्त होने वाली संख्याएँ वर्ग संख्याएँ नहीं होती हैं।

(iii) जैसा (i) में है।

(iv) जैसा (i) में है।

4. (i) और (iii)

6. $100001^2 = 1\underline{0000}2\underline{00001}$

$10000001^2 = \underline{100000020000001}$

7. $1010101^2 = \underline{1020304030201}$

$\underline{101010101}^2 = 10203040504030201$

8. $4^2 + 5^2 + \underline{20}^2 = 21^2$, $5^2 + \underline{6}^2 + 30^2 = 31^2$, $6^2 + 7^2 + \underline{42}^2 = \underline{43}^2$

9. (i) 9 (ii) 36

10. (i) F (ii) F (iii) F (iv) F

(v) T (vi) T (vii) T (viii) T

****

प्रश्नावली 1.2

1.	(i) 625	(ii) 1369	(iii) 2916	(iv) 9216	(v) 5041
2.	(i) 7921	(ii) 76176	(iii) 121801	(iv) 85849	(v) 25921
3.	(i) 16129	(ii) 55225	(iii) 725904	(iv) 63001	(v) 251001
4	(i) 1225	(ii) 5625	(iii) 9025	(iv) 11025	(v) 42025
5.	(i) 2601	(ii) 2916	(iii) 3136	(iv) 3364	(v) 3481
6.	(i) 259081	(ii) 265225	(iii) 275625	(iv) 336400	(v) 285156
7.	(i) 259081	(ii) 44521	(iii) 390625		
8.	(i) 241081	(ii) 35721	(iii) 330625		

****

प्रश्नावली 1.3

1.	(ii) और (iv)	**2.** (i) नहीं	(ii) नहीं	(iii) नहीं	(iv) हाँ
3.	(i) 1 या 9, विषम	(ii) 4 या 6	(iii) 1 या 9, विषम	(iv) 5, विषम	
4.	(i) 11 और 13	**5.** (i) 27	(ii) 20	(iii) 42	(iv) 64
6.	(i) 88	(ii) 98	(iii) 77	(iv) 84	
7.	(i) हाँ, 44	(ii) हाँ, 91			
8.	(i) 5, 30	(ii) 2, 54	(iii) 3, 60	(iv) 7, 84	(v) 3, 78
9.	(i) 5, 6	(ii) 5, 27	(iii) 7, 20	(iv) 11,64	
10.	49	**11.** 77			

****

प्रश्नावली 1.4

1.	(i) एक	(ii) दो	(iii) दो	(iv) तीन	(v) तीन
2.	(i) चार	(ii) चार	(iii) पाँच		
3.	(i) 210	(ii) 165	(iii) 234	(iv) 222	(v) 316
4.	(i) 625	(ii) 345	(iii) 440		
5.	(i) 48	(ii) 67	(iii) 59	(iv) 23	

6. (i) 38 (ii) 43 (iii) 76 (iv) 89

7. (i) 57 (ii) 31 (iii) 40 (iv) 75

8. (i) 40 (ii) 110 (iii) 231 (iv) 1176

****

प्रश्नावली 1.5

1. (i) $\frac{19}{25}$ (ii) $\frac{46}{123}$ 2. (i) $\frac{129}{67}$ (ii) $\frac{333}{555}$

3. (i) $4\frac{8}{13}$ (ii) $3\frac{4}{15}$ 4. (i) $4\frac{23}{27}$ (ii) $7\frac{18}{35}$

5. (i) 2.7 (ii) 4.1 (iii) 3.05 (iv) 9.21

6. (i) 0.091 (ii) 0.231

7. (i) 1.30 (ii) 4.81 (iii) 2.24 (iv) 4.47 (v) 0.32

8. (i) 0.13 (ii) 0.95 (iii) 2.65 (iv) 0.94 (v) 1.44

9. (i) 0.025 (ii) 0.645 (iii) 1.416 (iv) 1.049

10. (i) F (ii) F (iii) F (iv) T (v) T

****

प्रश्नावली 2.1

1. 1, 9, 2, 7, 6, 8, 4, 3, 5

2. (i) 42875 (ii) 175616 (iii) 373248 (iv) 64964808
(v) 274625000 (iv) 549353259

3. (i) 42875 (ii) 175616 (iii) 373248

4. (iii) 5. (iii) 3 6. (iii) 9

8. (i) F (ii) T (iii) T (iv) F (v) F
(vi) F (vii) T (viii) F (ix) F (x) F

****

प्रश्नावली 2.2

1. (i) 4 (ii) 8 (iii) 12

2. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) हाँ

3. (i) 5; 5 (ii) 2; 7 (iii) 63; 9

4. (i) 1 (ii) 4 (iii) 3 (iv) 6

5. (i) 6 (ii) 2 (iii) 8 (iv) 5

6. (i) 73 (ii) 45 (iii) 48 (iv) 36

7. (i) 63 (ii) 76 (iii) 84 (iv) 85

8. (i) – 61 (ii) –24 (iii) –83 (iv) –56

9. (i) 135 (ii) 273 (iii) 595 (iv) 385

10. (i) $\frac{9}{13}$ (ii) $\frac{15}{17}$ (iii) $\frac{21}{35}$ अर्थात् $\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{7}{55}$

11. (i) नहीं, 3 (ii) नहीं, 5 (iii) नहीं, 169

12. (i) 9 (ii) 25 (iii) 13

****

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 4 (ii) 3 (iii) 5 **2.** (i) 2 (ii) 6

3. (i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{7}{11}$ **4.** (i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{7}{11}$

5. (i) $5^{\frac{1}{2}}$ (ii) $7^{\frac{1}{3}}$ (iii) $1100^{\frac{1}{9}}$ (iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$ (v) $\left(\frac{61}{1123}\right)^{\frac{1}{8}}$

6. (i) $\sqrt{16}$; 16, 2 (ii) $\sqrt[3]{125}$; 125,3 (iii) $\sqrt[9]{\frac{6}{17}}$; $\frac{6}{17}$; 9

(iv) $\sqrt[11]{\frac{11}{23}}$; $\frac{11}{23}$, 11 (v) $\sqrt[17]{\frac{61}{328}}$; $\frac{61}{328}$, 17

7. (i) 32 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) $\frac{78125}{823543}$ (iv) $\frac{8}{27}$

8. (i) 32 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) $\frac{78125}{823543}$ (iv) $\frac{8}{27}$

9. (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{3}{5}$ **10.** (i) $\frac{729}{125}$ (ii) $\frac{243}{32}$

11. (i) 529 (ii) $\frac{1}{1331}$ (iii) 27 (iv) $\frac{1}{3}$

12. (i) 225 (ii) $\left(\frac{13}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{1}{27}$

13. (i) 0.008 (ii) 0.04 (iii) 15.625 (iv) 0.00032

14. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 2197 (iii) 15 (iv) $\frac{1}{7776}$

15. (i) T (ii) F (iii) F (iv) F (v) T
(vi) T (vii) T

****

प्रश्नावली 4.1

1. प्रत्येक 2400 रु 2. 16800 रु 3. लाभ : $9\frac{3}{8}\%$

4. (i) 5940 रु (ii) 5000 रु

5. (i) 825 रु (ii) 1050 रु (iii) हानि : $1\frac{11}{25}\%$

6. 2500 7. (i) 3750 रु (ii) 3375 रु 8. 7500 रु

9. 250000 रु 10. लाभ : $14\frac{6}{25}\%$ 11. (i) 600 रु (ii) 624 रु, 630 रु

12. 23.75% 13. हानि : 1% 14. (i) 4% (ii) 34.56 रु

15. 1592.50 रु, 2012.50 रु

****

प्रश्नावली 4.2

1. (i) 280 रु (ii) 891 रु 2. (i) 6% (ii) 20%

3. (i) 2000 रु (ii) 3000 रु 4. 1261 रु 5. 32200 रु 6. 28 %

7. 5500 रु 8. 25 % 9. 900 रु 10. 680 रु 11. 1296 रु

12. 3150 रु 13. 2880 रु 14. 1600 रु 15. 937.50 रु

****

प्रश्नावली 5.1

1. (i) 185.40 रु (ii) 293.15 रु (iii) 307.50 रु (iv) 1050 रु (v) 1414.40 रु
2. 2125 रु
3. 3310 रु
4. 7493.91 रु
5. 4413. 50 रु
6. 17576 रु; 1951 रु
7. 10360.23 रु
8. 5796 रु
9. 1261 रु
10. 1672.72 रु
11. (i) 112614 रु (ii) 10810.94 रु

****

प्रश्नावली 5.2

1. 4410 रु; 410 रु
2. 7260 रु; 1260 रु
3. 6760 रु; 510 रु
4. 24845.94 रु; 4845.94 रु
5. 39366 रु; 8116 रु
6. 4775.40 रु
7. 148877 रु
8. 49130 रु
9. 13310 रु
10. 1437.70 रु
11. फातिमा, 362.50 रु
12. 43.20 रु
13. 5369 रु
14. 1261 रु
15. 64000 रु
16. 3375 रु
17. 10000 रु
18. 400000 रु
19. 40000 रु
20. 5 %
21. 3 वर्ष
22. 2

****

प्रश्नावली 6.1

1. $x^2 + 9x + 20$
2. $x^2 + 15x + 54$
3. $x^2 + 15x + 56$
4. $x^2 + 13x + 36$
5. $x^2 + 8x + 12$
6. $x^2 + 3x - 4$
7. $p^2 + 2p - 24$
8. $y^2 + 5y - 24$
9. $x^2 - 5x + 4$
10. $z^2 - 15z + 14$
11. $y^2 - 15y + 44$
12. $x^2 + 17x - 84$
13. $x^2 + 5x - 84$
14. $y^2 + 16y - 80$
15. (i) $x^2 + \frac{26}{5}x + 1$ (ii) $y^2 + \frac{77}{12}y + \frac{5}{2}$
16. (i) $z^2 + \frac{25}{12}z + 1$ (ii) $x^4 + 13x^2 + 36$

17. (i) $y^4 + 18y^2 + 72$ (ii) $q^4 + 3q^2 - 4$

18. (i) $p^4 + \frac{63}{4}p^2 - 4$ (ii) $y^4 - \frac{73}{35}y^2 - 2$

19. (i) $z^6 + 15z^3 + 14$ (ii) $z^6 - 7z^3 - 8$

20. (i) $y^6 + \frac{13}{8}y^3 - \frac{3}{4}$ (ii) $x^6 + \frac{77}{136}x^3 - \frac{6}{17}$

21. (i) 10918 (ii) 42228

22. (i) 9120 (ii) 7052

23. (i) 10094 (ii) 9595

24. (i) 36666 (ii) 39360

25. (i) 41382 (ii) 40188

****

प्रश्नावली 6.2

1. $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$

2. $9x^2 + y^2 + 25z^2 - 6xy + 10yz - 30xz$

3. $x^2 + 4y^2 + 36z^2 + 4xy - 24yz - 12xz$

4. $9a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 12ab - 12bc - 18ac$

5. $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$

6. $25a^2 + 49b^2 + c^2 - 70ab - 14bc + 10ac$

7. $16l^2 + 4m^2 + 9n^2 + 16lm - 12mn - 24ln$

8. $4l^2 + m^2 + 64n^2 - 4lm - 16mn + 32ln$

9. $l^2 + 4m^2 + 49n^2 + 4lm - 28mn - 14ln$

10. $p^2 + 81q^2 + 4 + 18pq + 36q + 4p$

11. $36x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 16z^2 + 6xy + 4yz + 48xz$

12. $81x^2 + y^2 + \frac{1}{9}z^2 - 18xy - \frac{2}{3}yz + 6xz$

13. $\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 256 - \frac{1}{4}ab - 16b + 8a$

14. $a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 36 + ab + 6b + 12a$

15. $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx$

16. $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy - 30yz - 20xz$

17. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

18. $a^2 + 4b^2 + 49c^2 - 4ab - 28bc + 14ca$

19. $2p^2 + 2q^2 + 2r^2 + 4qr$

20. $2p^2 + 2q^2 + 2r^2 - 4pq$

21. $4pq + 4pr$

22. $-4qr + 4pr$

23. $8xy + 8xz$

24. $-8xy + 8xz$

****

प्रश्नावली 6.3

1. $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$
2. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
3. $a^3x^3 + 3a^2x^2by + 3axb^2y^2 + b^3y^3$
4. $x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3$
5. $8x^3 - 12x^2y^2 + 6xy^4 - y^6$
6. $-x^3 + 12x^2y - 48xy^2 + 64y^3$
7. $a^3 + 15a^2y + 75ay^2 + 125y^3$
8. $\frac{1}{27}x^3 + \frac{5}{9}x^2y + \frac{25}{9}xy^2 + \frac{125}{27}y^3$
9. $\frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{9}x^2y + \frac{4}{9}xy^2 - \frac{8}{27}y^3$

10. (i) 224 (ii) 1944 (iii) 5833 (iv) $\frac{8001}{8}$

11. (i) 104 (ii) 61 (iii) 559 (iv) –1001

12. (i) 61 (ii) 936 (iii) 2863 (iv) 13897

13. $2a^3 + 24ab^2$ **14.** $2a^3 + 54ab^2$ **15.** $250b^3 + 120a^2b$

16. $-16b^3 - 588b$ **17.** $\frac{2}{27}a^3 + \frac{8}{9}ab^2$ **18.** $\frac{16}{27}b^3 + \frac{4}{9}a^2b$

19. (i) 1124864 (ii) 1012048064 (iii) 127263527

20. (i) 970299 (ii) 988047936 (iii) 997002999

21. (i) 214921799 (ii) 941.192 (iii) 513.922401

****

प्रश्नावली 6.4

1. $(x+1)(x+9)$
2. $(x+3)(x+4)$
3. $(y-4)(y+2)$
4. $(y-7)(y+1)$
5. $(p+4)(p-1)$
6. $(p+6)(p-2)$
7. $(m-5)(m-3)$
8. $(m-6)(m-4)$
9. $(3x+y+5z)(3x+y+5z)$
10. $(2x+3y-4z)(2x+3y-4z)$
11. $(m-2n+5z)(m-2n+5z)$
12. $(7m-2n-3z)(7m-2n-3z)$
13. $(3x+y+5)(3x+y+5)$
14. $(p+\frac{q}{2}+1)(p+\frac{2}{3}+1)$

15. $(\frac{p}{2}+\frac{q}{3}+6)(\frac{p}{2}+\frac{q}{3}+6)$

16. $(\sqrt{2}x - y + 2\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x - y + 2\sqrt{2}x)$

17. $(\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+z)(\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+z)$

18. $(2x+y)(2x+y)(2x+y)$

19. $(2x-y)(2x-y)(2x-y)$

20. $(3q-5p)(3q-5p)(3q-5p)$

21. $(4p-3q)(4p-3q)(4p-3q)$

22. $(3-5p)(3-5p)(3-5p)$

23. $(4p-3)(4p-3)(4p-3)$

24. $(2x+9)(2x+9)(2x+9)$

25. $(3x-\frac{1}{6})(3x-\frac{1}{6})(3x-\frac{1}{6})$

****

प्रश्नावली 7.1

1. (ii), (iv), (v), (vi)

2. $4y^4 + y^2 + 6y + 9$; 4

3. $-13q^5 + 4q^2 + 12q$; 5

4. $z^2 + \frac{25}{12}z + 1$; 2

5. $x^4 + 13x^2 + 36$; 4

6. $-5y^8 + y^2 + 12$; 8

7. $4q^8 - q^6 + q^2$; 8

8. $p^7 + p^2 + 16$; 7

9. $-\frac{5}{7}y^{11} + y^3 + y^2$; 11

10. $z^6 - 15z^3 + 14$; 6

11. $z^6 - 9z^3 + 8$; 6

12. $y^6 + 9y^3 - 22$; 6

13. $x^6 + \frac{77}{136}x^3 - \frac{6}{17}$; 6

14. x

15. $-3x$

16. $\frac{2}{3}x$

17. $\frac{x}{\sqrt{5}}$

18. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

19. $-\sqrt{2}\,a^2$

20. $\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

21. $\frac{1}{3}y^3 - y^2 + \frac{1}{6}y$

22. $-2p^2 + 2p + \frac{1}{2} + \frac{2}{p}$

23. $-\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

24. $\frac{5}{2}z^2 - 3z + \frac{7}{2}$

25. $\frac{q^2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}q$

26. (i) $x+2$ (ii) $x+2$ (iii) $y+3$ (iv) $y-3$

(v) $z-3$ (vi) x^2+1

****

प्रश्नावली 7.2

1. $3a-1\,;\,9$ **2.** $2b-\frac{1}{5}\,;\,\frac{37}{5}$ **3.** $3p^2+p-\frac{1}{2}\,;\,\frac{9}{2}$

4. $2q^2-\frac{5}{2}q+\frac{9}{4};-\frac{11}{2}$ **5.** $4x^2-2\,;\,6$ **6.** $4x^3+6x^2+2x+\frac{7}{2};\,\frac{61}{2}$

7. $y^2-y+1\,;\,0$ **8.** $z^3+z-1\,;\,1$ **9.** $x^3+5\,;\,5$ **10.** $y^2+3\,;\,6$

12. 0 **13.** 0 **14.** 1 **15.** 1

16. नहीं **17.** हाँ **18.** नहीं **19.** नहीं

20. हाँ **21.** नहीं **22.** नहीं

****

प्रश्नावली 8.1

1. $x=-7$ **2.** $x=3$ **3.** $x=-\frac{21}{2}$ **4.** $x=\frac{35}{33}$

5. $z=-\frac{19}{4}$ **6.** $y=-\frac{13}{4}$ **7.** $y=1$ **8.** $z=-\frac{3}{11}$

9. $y=\frac{2}{3}$ **10.** $y=3$ **11.** $k=4$ **12.** $p=\frac{15}{67}$

13. $x=\frac{7}{12}$ **14.** $x=-\frac{25}{7}$ **15.** $y=-48$ **16.** $z=-\frac{1}{2}$

17. $x=\frac{-118}{39}$ **18.** $y=-4$ **19.** $x=-\frac{8}{33}$ **20.** $x=10$

21. $x=2$ **22.** $y=1$

****

प्रश्नावली 8.2

1. 12, 48 **2.** 42, 56 **3.** $\frac{13}{21}$ **4.** 15, 45

5. 25, 30 **6.** 216, 222, 228 **7.** 324, 333, 342 **8.** 20 वर्ष, 28 वर्ष

9. लवली : 20 वर्ष, लकी : 50 वर्ष 10. $l = 80$ cm, $b = 40$ cm

11. 36 12. 84 13. 120 cm 14. 24000 रु

15. 31.5 km/h 16. 800 km 17. 1.5 km/h

****

प्रश्नावली 9.1

1. (i) हाँ, एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ (ii) तीन, AB ॥ EF, EF ॥ DC, DC ॥ AB
2. छ:, DE ॥ AB, FG ॥ AB, HI ॥ AB, FG ॥ DE, HI ॥ DE, HI ॥ FG
3. (i) हाँ, एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ (ii) $50°$
4. $60°$ 5.(i) हाँ, $\angle A + \angle B = 180°$ (ii) हाँ, $\angle B + \angle C = 180°$
6. (i) हाँ, एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ (ii) $65°$
7. (i) हाँ, एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ (ii) हाँ, एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ (iii) हाँ, (ii) से
8. तीन, AB ॥ EF, EF ॥ DC, DC ॥ AB
9. (i) T (ii) F (iii) T (iv) F (v) F (vi) F

****

प्रश्नावली 9.2

1. (i) हाँ, एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ (ii) हाँ, समान अंत:खंड गुण
2. (i) हाँ, समान अंत:खंड गुण (ii) हाँ, AD = AE
3. (i) हाँ, समान अंत:खंड गुण (ii) हाँ, समान अंत:खंड गुण
4. (i) हाँ, समान अंत:खंड गुण (ii) हाँ, समान अंत:खंड गुण
5. (i) हाँ, समान अंत:खंड गुण (ii) हाँ, समान अंत:खंड गुण (iii) 1.5 cm
6. (i) हाँ, यह तीनों रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर काटती है।
   (ii) हाँ, यह तीनों रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर काटती है।
   (iii) हाँ, एक ही रेखा पर लंब रेखाएँ (iv) हाँ, समान अंत:खंड गुण

7. 9 cm **8.** 3 cm **9.** (i) $\frac{2}{3}$ (ii) 2 cm **10.** $\frac{20}{3}$ m, 10 m, $\frac{40}{3}$ m

11. नहीं, समान अंत:खंड गुण **12** नहीं, समानुपातिक अंत:खंड गुण

****

प्रश्नावली 9.3

1. 2.5 cm **2.** 1.7 cm **5.** 4 cm

****

प्रश्नावली 10.1

1. समलंब **3.** (i) समचतुर्भुज (ii) आयत (iii) वर्ग

4. 140°, 140° **5.** (i) 18°, 54°, 126°, 162°

(ii) हाँ, PQ ॥ QR (iii) नहीं; PS, QR के समांतर नहीं है

6. (i) T (ii) T (iii) F (iv) T (v) F

(vi) F (vii) T (viii) T (ix) F (x) F

(xi) T (xii) F (xiii) T (xiv) F

****

प्रश्नावली 10.2

1. 14 cm **2.** 110°, 70°, 110° **3.** 90°

4. 9 cm, 15 cm, 9 cm, 15 cm **5.** 72°, 108°, 72°, 108°

6. 50 cm, 25 cm, 50 cm, 25 cm,

7. (i) हाँ, समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ (ii) हाँ, समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ

(iii) हाँ, एक ही रेखाखंड (iv) हाँ, SSS

8. नहीं, विकर्ण परस्पर समद्विभाजित नहीं करते

9. (i) विकर्ण O पर समद्विभाजित (ii) एकांतर कोण

(iii) शीर्षाभिमुख कोण (iv) ASA; हाँ

10. (i) समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण (ii) AF, ∠ A का समद्विभाजक

(iii) CE, $\angle$ C का समद्विभांजक

(iv) (i), (ii) और (iii) से

(v) एकांतर कोण

(vi) (iv) तथा (v) से

(vii) संगत कोण बराबर

(viii) AB ॥ CD

(ix) सम्मुख भुजाएँ समांतर

****

प्रश्नावली 10.3

1. (i), (ii), (v), (vii)

2. (i), (iii), (iv), (viii), (x)

3. (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii), (viii), (ix), (x)

4. नहीं, विकर्ण परस्पर लंब नही है

5. (i) हाँ, आयत की सम्मुख भुजाएँ

(ii) हाँ, आयत की सम्मुख भुजाएँ

(iii) हाँ, प्रत्येक कोण 90^0

(iv) हाँ, SAS

6. (i) हाँ, विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं

(ii) हाँ, समचतुर्भुज की भुजाएँ

(iii) हाँ, SSS

(iv) हाँ, सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग (CPCT)

(v) हाँ, SSS

(vi) हाँ, CPCT

(vii) हाँ, (iv) और (vi) से

7. $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$

8. नहीं, विकर्ण बराबर नही है

9. (i) हाँ, आयत की सम्मुख भुजाएँ

(ii) हाँ, प्रत्येक 90^0 का

(iii) हाँ, एकांतर कोण

(iv) हाँ, ASA

(v) हाँ, CPCT

10. नहीं

11. हाँ

12. नहीं

13. 13cm, 13cm, 13cm, 13cm, समचतुर्भुज

14. वर्ग

****

प्रश्नावली 11.1

5. नहीं, क्योंकि AB + AD = BD

****

प्रश्नावली 11.2

3. नहीं, क्योंकि BD + AB $< AD$

****

प्रश्नावली 11.3

5. नहीं, क्योंकि $\angle A + \angle B + \angle C = 365^0 > 360^0$

****

प्रश्नावली 12.1

1. 3 cm **2.** 24 cm **3.** 6 cm **4.** 10 cm **5.** 5 cm

6. AB और BC के लंब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिंदु

7. (i) केंद्र से जीवा के मध्य-बिंदु को मिलाने वाला रेखाखंड (ii) जैसा (i) में

(iii) $\angle AMP + \angle BMP = 180^0$

8. (i) AB = BC (ii) RHS (iii) CPCT

9. (i) AB = CD (ii) RHS (iii) CPCT (iv) MS + AM = NS + NC

(v) AB – AS = CD – CS

10. (i) ASA (ii) CPCT (iii) केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ

11. (i) T (ii) F (iii) T (iv) T

****

प्रश्नावली 12.2

1. $120^\circ, 120^\circ, 120^\circ$

2. (i) नहीं, केंद्रीय कोण बराबर नहीं (ii) नहीं, केंद्रीय कोण बराबर नहीं

(iii) हाँ, समान केंद्रीय कोण (iv) नहीं, केंद्रीय कोण बराबर नहीं

(v) हाँ, समान केंद्रीय कोण (vi) नहीं, केंद्रीय कोण बराबर नहीं

(vii) हाँ, समान केंद्रीय कोण

3. (i) 60° (ii) 55° (iii) 40° (iv) 240°

4. (i) 90° (ii) हाँ **5.** (i) 50° (ii) 25°

6. (i) 40° (ii) 50° **7.** (i) 15° (ii) 25° (iii) 100° (iv) 50°

8. (i) हाँ, एकांतर अंत:कोणों का एक युग्म

(ii) हाँ, किसी चाप द्वारा केंद्र तथा शेष वृत्त पर बनाए गए कोण

(iii) हाँ, जैसा कि (ii) में (iv) हाँ, (i), (ii) तथा (iii) से

(v) हाँ, केंद्रीय कोण बराबर **9.** (i) 160° (ii) 80°

10. (i) 60° (ii) $37\frac{1}{2}°$ (iii) $37\frac{1}{2}°$ (iv) $22\frac{1}{2}°$

****

प्रश्नावली 12.3

1. 110°, 105° **2.** (i) 85° (ii) 115° (iii) 95° (iv) 65° (v) 85° (vi) 115°

3. (i) 70° (ii) 110°

4. (i) 40° (ii) 100° (iii) 70°

5. (i) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण

(ii) ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

(iii) (i) और (ii) से

6. (i) हाँ, समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण (ii) हाँ, चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण

(iii) हाँ, (i) और (ii) से (iv) हाँ, जैसा (iii) में

(v) हाँ, प्रत्येक कोण 90^0

7. (i) 180° (ii) 180° (iii) 180° (iv) 540° (v) 360°

8. (i) 55° (ii) 100°

****

प्रश्नावली 13.1

1. 84 cm^2 **2.** 60 dm^2 **3.** 285 cm^2

4. (i) 12 m^2 (ii) 1.24 m^2 (iii) 8.1 m^2 (iv) 0.0135 m^2

5. 24 cm^2 **6.** 2600 cm^2 **7.** 4 cm **8.** 5 m **9.** 15 cm

10. 40 m **11.** 12 cm **12.** 12.5 cm **13.** 15 cm **14.** 210 रु

****

प्रश्नावली 13.2

1. 63 cm^2 **2.** 4500 dm^2 **3.** 180 cm^2

4. (i) 0.6 m^2 (ii) 0.155 m^2 (iii) 3.2m^2 (iv) 67.5 m^2

5. 20 cm **6.** 10 cm **7.** 8 cm **8.** 10 m **9.** 3 m

10. $225\sqrt{3}$ cm^2 **11.** $16\sqrt{3}$ dm^2 **12.** 800 cm^2

13. (i) 120 cm^2 (ii) 2500 cm^2 (iii) 280 cm^2 **14.** 600 m^2 **15.** 200 m

16. 441 m^2

17. (i) $\frac{P}{2}$ वर्ग मात्रक, $\frac{P}{2}$ वर्ग मात्रक, (ii) $\frac{P}{3}$ वर्ग मात्रक, $\frac{P}{3}$ वर्ग मात्रक, $\frac{P}{3}$ वर्ग मात्रक
(iii) त्रिभुज की किसी भुजा पर उसके n बराबर भाग प्राप्त करने के लिए $(n-1)$ बिंदु अंकित कीजिए। इन बिंदुओं को सम्मुख शीर्ष से मिलाइए।

****

प्रश्नावली 13.3

1. 96 cm^2 **2.** 228 dm^2 **3.** 303 cm^2

4. (i) 1.6 m^2 (ii) 0.0725m^2 (iii) 28 m^2 (iv) 2.025 m^2

5. 20 cm **6.** 8 cm **7.** $\frac{10}{3}$ cm **8.** 10 m **9.** 3 m

10. 12 cm, 18 cm **11.** 10 cm, 20 cm **12.** 80 cm^2 **13.** 216 cm^2

****

प्रश्नावली 13.4

1. (i) 44 cm (ii) $34\frac{4}{7}$ dm (iii) $62\frac{6}{7}$ m

2. (i) 15.7 cm (ii) 9.42 dm (iii) 1.57 m

3. (i) 4 cm (ii) 28 dm (iii) 5 m

4. (i) 1 cm (ii) 350 dm (iii) 49 m **5.** $6\frac{2}{7}$ cm **6.** 12 cm

7. 880 m **8.** 50 **9.** 44 m **10.** 264 m **11.** 3.98 cm (लगभग)

12. 3 : 4 **13.** 30 dm **14.** 30 cm **15.** 41.1 m **16.** 2411520 km

17. 3.1415929 . . .π का एक सन्निकट मान

****

प्रश्नावली 13.5

1. (i) $1386\ cm^2$ (ii) $7546\ dm^2$ (iii) $147994\ cm^2$
2. (i) $314\frac{2}{7}\ cm^2$ (ii) $75.46\ dm^2$ (iii) $3\frac{1}{7}\ m^2$
3. (i) 7 cm (ii) 14 dm (iii) 63 cm
4. (i) 21 cm (ii) 10 dm (iii) 25 cm
5. (i) 20 cm (ii) 100 dm (iii) $20\sqrt{15}$ cm
6. $78\frac{4}{7}\ cm^2$
7. $314.28\ m^2$
8. $31428.57\ m^2$
9. (i) $78.5 m^2$ (ii) $235.5\ m^2$
10. $157\ m^2$
11. $154\ m^2$
12. वृत्त
13. $492.86\ cm^2$ (लगभग)
14. $1.7\ m^2$ (लगभग)
15. 5 : 6
16. 4 : 1

****

प्रश्नावली 14.1

1. $1760\ cm^2$
2. $1.76\ m^2$
3. $628\ cm^2$
4. $15972\ cm^2$
5. $1584\ m^2$
6. 68.75 रु
7. 0.55 cm
8. 1 m
9. (i) $968\ cm^2$ (ii) $1161.6\ cm^2$ (iii) $2140.66\ cm^2$
10. (i) $110\ m^2$ (ii) 4400 रु
11. (i) $66\ m^2$ (ii) 1650 रु
12. 63.53 रु

****

प्रश्नावली 14.2

1. $220\ cm^2$
2. (i) $198\ cm^2$ (ii) $352\ cm^2$
3. $4710\ cm^2$
4. $792\ dm^2$
5. $424.29\ cm^2$
6. (i) 26 m (ii) 176502.86 रु
7. (i) 8 cm (ii) $729.14\ cm^2$
8. 62.8 m
9. 1155 रु
10. $47.1\ m^2$
11. $5500\ cm^2$
12. 3 cm

प्रश्नावली 14.3

1. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5 m^2

2. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 m^2 (iii) 2464 cm^2 **3.** 1 : 4

4. 27.72 रु **5.** 2993.76 रु **6.** 3.5 cm **7.** 1 : 16

8. 616 cm^2 **9.** 173.25 cm^2

10. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

****

प्रश्नावली 15.1

1. (i) 2310 cm^3 (ii) 693 cm^3 (iii) 369. 6 m^3 (iv) 38.5 m^3

2. 34.65 l **3.** 17.16 kg **4.** 49.5 kg

5. (i) 308 m^3 (ii) 0.5 m

6. (i) 770 m^3 (ii) 154 m^2 (iii) 5 m

7. बेलन, 85 cm^3 **8.** (i) 3 cm (ii) 141.3 cm^3

9. (i) 110 m^2 (ii) 1.75 m (iii) 96.25 kl **10.** 0.4708 m^2

****

प्रश्नावली 15.2

1. (i) 264 cm^3 (ii) 154 cm^3 **2.** (i) 1.232 l (ii) $\frac{11}{35}\, l$

3. 314 cm^2 **4.** 21 cm **5.** 8 cm **6.** 38.5 kl

7. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2

8. (i) 226 (ii) 90 (iii) 90

9. 100 π cm^3 **10.** 240 π cm^3, 5 : 12

****

प्रश्नावली 15.3

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ cm^3 (ii) $179\frac{1}{3}$ dm^3 (iii) 1.05 m^3 (लगभग)

2. (i) $11498\frac{2}{3}$ cm^3 (ii) 0.004851 m^3 (iii) 22.458 dm^3 (लगभग)

3. (i) 11.5 l (लगभग) (ii) 4.851 l (iii) 22.458 l

4. 0.303 l (लगभग) **5.** 345.39 g (लगभग) **6.** $\frac{1}{64}$

7. 0.06348 m^3 (लगभग) **8.** $179\frac{2}{3}$ cm^3 **9.** (i) 249.48 m^2

(ii) 523.9 m^3 (लगभग) **10.** (i) $3r$ (ii) 1 : 9

****

प्रश्नावली 16.1

1. 6, 11 **2.** 2780 **3.** 81.9

4. (i) 151 cm (ii) 128 cm (iii) 23 cm (iv) 142.1 cm (v) 4

5. (i) 25.6 mm (ii) 8.5 mm (iii) 5

6. (i) 10°C (ii) 25.25°C **7.** 15

8. (i) 25 मिनट (ii) 4 (iii) 23.6 मिनट

9. 8 **10.** 27 **11.** 18 **12.** 5.5 **13.** $\frac{41}{6}$

14. (i) 41.67 (ii) 91 **15.** 42

16.

प्राप्तांक	48	58	64	66	69	71	73	81	83	84
बारंबारता	3	3	4	7	6	3	2	1	2	2

17.

सदस्यों की संख्या	3	4	5	6	7	8
बारंबारता	5	6	3	4	1	1

(i) 3 सदस्य, 5 (ii) 8 सदस्य, 1 (iii) 4 सदस्य

18.

सड़क दुर्घटनाओं की संख्या	0	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	2	3	6	4	4	6	5

19.

प्राप्तांक	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	5	5	4	3	4	4

20.

भार (*kg* में)	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
बारंबारता	1	2	1	3	1	1	2	2	4	3	1	2	1	2	1	1	2

(i) 40 kg (ii) 1 (iii) 2 (iv) 48 kg

21.

प्राप्तांक	17	18	19	21	23	24	25	27	28	29	30	31	32	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	46
बारंबारता	2	2	3	2	2	5	2	3	1	5	1	2	2	2	2	5	4	1	2	2	3	5	1	1

परिसर : 29

22. (i) 5 (ii) 8 (iii) 5 (iv) 4 (v) 8 (vi) 5

****

प्रश्नावली 16.2

1.

वर्ग-अंतराल (प्राप्तांक)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
बारंबारता	6	10	7	9	8

2.

साप्ताहिक बचत (रु में)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85
बारंबारता	1	0	6	5	1	2	3	2	1	3	2	4

3.

साप्ताहिक जेबखर्च (रु में)	30-40	40-50	50-60	60-70
बारंबारता	16	14	57	13

4. (i) 60 (ii) 42.5, 47.5, 52.5, 57.5, 62.5 (iii) 5 (iv) 50–55

5.

अधिकतम तापमान (°C में)	32-33	33-34	34-35	35-36	36-37	37-38	38-39	39-40	40-41	41-42	42-43	43-44
बारंबारता	4	3	3	6	3	0	3	2	2	2	1	1

न्यूनतम तापमान (°C में)	21-22	22-23	23-24	24-25	25-26	26-27	27-28	28-29	29-30	30-31	31-32	32-33	33-34
बारंबारता	1	1	5	2	2	2	2	4	3	4	1	2	1

6.

आय (रु में)	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000
दवा विक्रेताओं की संख्या	3	0	16	4	3	2	2

7.

नाड़ी दर प्रति मिनट	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85
व्यक्तियों की संख्या	5	3	12	7	3

8. (i) यह किसी कक्षा के 43 विद्यार्थियों द्वारा भौतिकी में प्राप्त किए गए अंक दर्शाता है।

(ii) 10 (iii) 3 (iv) वर्ग 10-20, 80-90, 90-100 और वर्ग 50-60, 70-80

(v) 3 (vi) 21

9. (i) यह किसी विद्यालय के 26 शिक्षकों की आयु प्रदर्शित करता है।

(ii) 3 (iii) 2 (iv) 45-50 (v) 35–40 (vi) 5

(vii) 22.5, 27.5, 32.5, 37.5, 42.5, 47.5, 52.5 (viii) 6

10.

प्राप्तांक	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
विद्यार्थियों की संख्या	3	6	4	5	5	4	1	2	2	2	1

(i) 50 (ii) 5–10

11. (i) यह विभिन्न आयु समूहों (वर्गों) में किसी गाँव की शिक्षित महिलाओं की संख्या प्रदर्शित करता है।

(ii) 15–20 (iii) 45–50 (iv) 5

(v) 12.5, 17.5, 22.5, 27.5, 32.5, 37.5, 42.5, 47.5 (vi) 2700

12. (i) 12 (ii) 4 (iii) 5 (iv) 87.5

13.

प्राप्तांक	मिलान चिह्न	बारंबारता
0–20		③
20–40		⑦
40–60	𝍸 𝍸 𝍸 (III)	18
60–80		⑪
80–100	(II)	2

14. वर्ग चिह्न : 45, 55, 65, 75, 85

15.

वेतन (हजार रु में)	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
कर्मचारियों की संख्या	35	30	45	40	10

vides a sufficiently adequate and comprehensive method upon which guidance can base its policy exclusively He says, "To the extent that it precludes individual appraisal on a sociocomparative basis, interpretation of individual behavior, evaluation of pertinent case factors, and specific informational and interpretive aid to the individual, it seems to be unduly subjective and to rule out the possibility of using diagnostic, scientific procedures in the same sense that medicine or any other scientifically based practice analyzes and assists the individual in a way that he could not do for himself"

It is perhaps fortunate that present-day elementary and secondary school guidance practices lie somewhere between the two extremes pictured above Most specialists working in schools tend to use the directive approach, but not in its extreme form. Most social workers and mental hygienists seem to favor the nondirective approach, although in its less moderate form it represents a slow, therapeutic process In between these extremes there is plenty that classroom teachers and specialists alike may do, as has been shown in previous chapters

Ten Basic Problem Areas

Possibly the best substitute for the "mouse in the corner" procedure mentioned earlier is to acquaint the reader with experiences that transpire in a counselor's office by means of a number of actual case records taken from counselor's files. These are not case histories in any sense of the term, as the reader will presently discover They are simply notes made by the counselor, following the interview, showing (A) *the incident that brought the student to the counselor,* (B) *the action taken by the counselor, and* (C) *remarks or a statement by the counselor germane to the case*

These are unselected cases without glamorous or spectacular qualities The criterion used in choosing them from a bulky file was that they represent a cross section of daily face-to-face guidance situations It is not surprising, therefore, to find that they encompass all areas of guidance vocational, health, recreation, and social-civic More than one field of guidance is so often

involved in a single case that it has not been deemed feasible to present them under these four headings Counseling activities, as revealed by typical cases, are thus presented in this chapter under ten headings Even with this number of classifications much overlapping will be apparent The ten problem areas selected are as follows (1) educational planning, (2) educational adjustment, (3) school attendance, (4) scholarship, (5) vocational guidance, (6) social guidance, (7) economic guidance, (8) recreational guidance, (9) physical health, and (10) mental health

1. Educational Planning —A large part of the counselor's time goes to what is referred to as educational planning, for want of a better term In a broad sense, any planning should consider all areas of guidance For this reason educational planning is probably a safe, though somewhat vague, term to use It includes, however, what may be referred to as curriculum guidance. Even such a relatively narrow term as curriculum guidance involves a knowledge of occupations and opportunities, curricula available at the school in question, and the curricular and entrance requirements of colleges, universities, and special schools The necessity for broad knowledge on the part of the counselor in general educational planning will be evident from the following cases

Case 1 Geraldine A Age 16 I Q 118 (A) Student wished to outline course which would enable her to matriculate at . College of Dentistry. (B) Made four-semester program, checking .. .. College of Dentistry requirements in their catalog (C) "Good student Interested in dentistry Plans to specialize as a children's dentist and seems well suited to it"

Case 2 James B Age 19 I Q 117 (A) A 14-2 (second semester of the fourteenth year) student who will receive the Junior College Diploma (only) in June (This carries no guarantee of junior standing in a university) He now wishes to continue in the university, taking the Business Administration curriculum there (B) Checked his record to determine status Outlined course leading to the Junior Certificate in Commerce from the Junior College (This leads to junior standing in the university) Checked the transfer value that

certain "Diploma" courses taken would have at the University of .... (C) "Good student Was strongly recommended from high school"

Case 3 Margaret B Age 16 I Q 131 (A) Student wished, upon graduation from the twelfth grade, to matriculate at an eastern college. (B) Made a program for next year which would complete .. .. . College's entrance requirements (C) "A very good student, capable of carrying the 19-unit program necessary to complete the eastern college requirements She will take the College Board examinations in English, Language, Mathematics, and History this spring"

Case 4 Walter B Age 17. I Q 140 (A) Conference held with Walter and his father. (B) Ordered transcript of high school record sent to . College. Father to make appointment with their registrar Son will attend summer school here to make the necessary "recommended" grades in English (C) "Student had been preparing for . . Institute Father now thinks him too young to attend that school and wishes him to go to some other university for one or two years Student lacks the foreign language for matriculation at the state university. A strong student in mathematics and science"

Case 5. Mary G Age 17 I Q 131 (A) Student has decided to enter .... College instead of the University of . .. Wishes to include in 12–2 semester a special class in Creative Writing and still meet . . requirements Had planned to drop her fourth year of Latin. (B) Found that she can finish her fourth year of Latin and also take the class in Creative Writing by petitioning the Administration Staff for permission to graduate without local music and art requirements Arranged her final semester program accordingly (C) "She has had seven years of piano outside of school and has already met purely local requirements in Orientation and Homemaking A superior student carrying practically a straight academic program Wishes to major in English and prepare for writing as a career"

Case 6 Gwendolyn P Age 19 I Q 124. (A) Sought interview to ascertain chances of being admitted to ... . University next fall, and to see if a scholarship is available (B) Advised her to take their aptitude test and to make application for admission before May first. Ordered transcript forwarded Suggested that she obtain her application blank from the Chairman of the Scholarship Board at

.... (C) "An excellent student with an exceptional secondary record (grade-point ratio 3 83) Her upper division (junior college) grade-point ratio is also well over 3.00"

Case 7 Robert R Age 16 I Q 99 (A) Interviewed student and both parents Problem was whether to choose a four-year engineering course or a two-year technical course (B) Advised the two-year technical course, but parents strongly prefer the four-year engineering course Mapped out a plan by which student, if he makes the required scholastic standing, will be eligible for the four-year course, but which will permit him (if still interested) to begin the two-year course by completing the subjects without regard to qualitative standing (C) "A weak student in mathematics and science, prognosis poor for projected choice"

Case 8 Ethan S Age 19 I Q 125. (A) Came to plan course which would lead to a school of medicine and also make up deficiencies in the high school record (B) Planned course which would take four years to remove high school deficiencies and bring student to point where he might enter first year of a medical college Asked student to consult with parents and report back in one week (C) "Student is mentally and physically able to carry out objective Felt that I should not start him out, however, on such a long educational jaunt without parents seeing the financial problem ahead"

Case 9 Edward V Age 20 I Q 92 (A) Boy wanted to know the possibility of graduating in three semesters (instead of the customary four) (B) Advised him that he might carry a program of seventeen units for the next two semesters, and six or seven units in each of the next two summer sessions, to make this possible (C) "Despite recorded low I Q, student is making good grades and is in excellent health Wishes to pursue an engineering curriculum, which he cannot do satisfactorily on an odd-semester basis Suggested arrangement will make it possible for him to begin his engineering work in September Suggest re-test on mental ability"

Case 10 Kathryn W Age 18 I Q. 124 (A) Student inquired whether her credentials would permit her to enter the University of . . .. next fall (B) Examination of her records showed them to be incomplete It was necessary to write to South America to complete her records Upon their receipt they were checked and it was found that she will have no trouble in being admitted (C) "This student has attended high schools in Minneapolis, in Chile, and in Bolivia, as well as having had some college work in New Orleans Her work

with us and in New Orleans was very good Although difficulty was experienced in translating foreign credits to our terms, it was evident that her work in South America was also of a high order."

2. **Educational Adjustment** —Most of the cases cited above have been concerned with planning for the future. Because of its constructive nature, this is in the main a pleasant experience But as Burns has remarked, "the best laid plans of mice and men" often go astray and adjustments then have to be made[11] It may further be observed that unless a great deal of realism accompanies educational planning the result expresses only fond hopes

But whether the planning be sagacious and wise, or whether it be ill-advised and careless, experience shows that numerous educational adjustments must be made We would not conclude, as has sometimes been done, that any apparent necessity for wholesale adjustments could be taken as a measure of the efficiency of a guidance organization On the contrary, a small demand for adjustments would indicate careful planning of students' programs *at the outset* and in terms of all pertinent factors However, nothing is to be gained by holding a student to a bad plan, once it is apparent that such a course will not promote his educational growth Needed adjustments should always be made Although they will be most numerous at the beginning of a semester, no period of the year will be free from adjustment problems Some problems will be serious and others merely routine, with the possibility that the latter will become serious if not promptly solved The following list of cases will reveal the wide range of educational adjustments which the counselor is called upon to make

Case 11. Anona A Age 16 I Q 128 (A) Student came in to see about an E grade (incomplete) received last year (B) Sent her to present Latin instructor for outline of work to be made up (C) "A very good student who missed six weeks of school last year because of a major operation All 'incompletes,' with the exception of the Latin, were made up last semester By special petition the time limit for

[11] William H Johnson, "Guidance, Counseling, and Adjustment," *School Executive*, LVI (May, 1937), p 334

making up the E was extended. During this time the former Latin teacher has retired, so the work must be made up under a new teacher."

Case 12 Sarah A Age 18 I Q 90 (A) Student was interviewed regarding reason for a failing triad (six weeks) grade in Public Speaking (B) She was allowed to continue with the course for a trial period of two weeks (C) "This girl is the only colored student in the class and is very timid Says she likes the work and does not wish to drop it Inasmuch as the notice from her instructor read, 'She can pass if she tries more energetically,' I feel sure she can do it. Instructor has been notified of the interview"

Case 13. Vivian C. Age 16 I Q 96 (A) Interviewed in regard to failure in Economic Geography (B) After several conferences with student, two with the instructor, and three with the girl's mother, the course was dropped (C) "The course seemed too difficult for the student The mother did not want the girl to drop the course unless the situation was hopeless An honest trial was made by the student—with the mother's help—but the effort seemed to be without effect Teacher and parent both finally agreed it would be wise to drop the class"

Case 14 Leah C Age 16 I Q 106 (A) Student had D grades in both Shorthand and American History (B) Methods of study were discussed with both student and guardian (C) "Student is very conscientious—perhaps overly so Worries about subjects and spends hours over their preparation She is new in the system this year, having come from Pennsylvania, and finds adjustment difficult. Lives with her aunt who will help her develop a more satisfactory point of view toward her studies and use more effective methods of attacking them"

Case 15 Dorothy D Age 20 I.Q 90. (A) Student is on probation and is failing badly in Accounting (B) Dropped the Accounting from her program (C) "Student is very weak scholastically, having many grade-point deficiencies Accounting is beyond her comprehension and it was thought advisable to drop it in order that her work in other subjects might be improved Conferences have been held with her mother and with the Dean of Guidance Suggest reconsideration of vocational objective"

Case 16 May and Mazie F (Twins). Age 17 I Q May 109, Mazie 95 (A) Grades low because of illness and a subsequent serious auto accident The twins were also in a highly nervous and unhappy state because of home conditions (B) Made arrangements with their

instructors for making up their incomplete work Agreed to let them try to carry their present programs until the end of the second triad, with the understanding that if their physical condition and scholastic rating were not improved, they should lighten their school load. (C) "The father has lost heavily financially and the mother is apparently unable to adjust herself, always having had plenty Their home life is a constant series of quarrels and bickering Both girls cried, said they didn't know how they could stand it much longer Neither was willing, however, to lighten the school load, insisting that they 'could make it'."

Case 17. Lorne H Age 17 I Q 111 (A) Found that the boy was carrying Trigonometry in night school in addition to seventeen units (the maximum) in day school, in order to graduate in June He failed at the end of the first triad in Solid Geometry and Civics (B) Allowed his program to remain without change until the end of the second triad, his grades then to determine the action taken If he is passing, he is to petition the Administration Staff for permission to count the extra units in Trigonometry to complete June graduation (C) "Consultation with the instructors disclosed marked improvement, which seemed to warrant further trial The boy has never been in public schools before, always having gone to a small private school conducted by his mother in Canada. She died before his grades could be procured by our institution, and his credits had to be determined by examination Last semester he lost possible credit in Trigonometry and Civics because of flagrant cheating in the final examinations Since both of these subjects are 'repeats,' he should succeed"

Case 18 Wilson H Age 20 I Q 106 (A) On probation because of low grades Continual absence, due partly to illness of sister who died two weeks ago, and partly to home conditions Apparent unwillingness to conform to school regulations. Three letters to the home, telephone calls, and summons to the boy had been of no avail (B) A very satisfactory interview Arranged a time schedule for the complete makeup of Business English, Salesmanship, and American History Student to report weekly on his progress (C) "Found the boy cooperative in spirit and eager for help He assured me that attendance would no longer be a problem Within an hour he reported interviews with his instructors in Business English and American History, with dates for the makeup tests"

Case 19 William S. Age 20 I Q 121 (A) Came to tell the counselor he was dropping out of school to go east on important business matter, and wanted to know the possibility of re-entering at the same

point next fall While in the east student is to get aptitude testing program information in use at . . . . . Institute for our local Technology Department (B) Told student that although our ruling prohibits entrance after the second week of school, counselor could arrange for his entrance after that date in view of the circumstances (C) "The 'circumstances' were that the student was adopted, but the adoption papers were not completed, this necessitating his presence in the east to sign necessary papers The student, formerly from . Institute, had come to my office previously in response to a request for information regarding his experiences at . . "

Case 20 Frank T. Age 18 I Q 128 (A) This student was having trouble in being admitted to University He had, in fact, been notified that he would not be accepted He wanted to know what the trouble was (B) We were likewise at a loss to know what the difficulty was, so telegraphed to . . The trouble was found to be in the method of counting credits Our interpretation as to the evaluation of the grade made in one subject was accepted This was enough to cause him to be accepted. (C) "The particular point involved had never come up before and probably would not have been discovered had we not been aware that this boy was one of our best graduates in the February class. He would have been accepted readily by any other university of the state"

3 **School Attendance.**—One of the most common problems likely to confront the counselor in the secondary school is that of irregular attendance. Attendance problems tend to divide themselves into two classes (*a*) those who "cut" classes because of serious underlying reasons that are seldom apparent on the surface, and (*b*) those who are chronic and habitual absentees for no good reason, students who fail to respond to sympathetic and friendly counsel and who ultimately must be eliminated

Some authorities on the subject have urged that the counselor have no direct contact with attendance problems, lest he find it necessary to discipline some student and thus destroy the effectiveness of further guidance Experience does not bear out the validity of this injunction Irregular attendance is likely to be a symptom of serious maladjustment—involving such matters as unsatisfactory home conditions, illness, poor mental health, bad companionship, unfortunate economic and social

conditions, and the like[12] It can be said, therefore, that the most fruitful leads a counselor is likely to obtain for effective counseling usually come from thorough investigations of unsatisfactory attendance Furthermore, no harm is done to counseling when the guidance worker turns over cases definitely meriting disciplinary action to the officer of the school charged with this duty In any case, the increased revenues accruing to the school as a result of improved average daily attendance will go a long way toward paying the counselor's salary, a statement which can be corroborated by financial investigations Some typical attendance problem cases follow

Case 21 Fred A Age 18 I Q 106 (A) Involuntary interview occasioned by much cutting of classes (B) Student was told that unless future attendance was satisfactory, his parents would be notified His guardian was also asked to confer with the counselor (C) "This boy's cutting does not appear to be premeditated If he is late, he does not bother to go to class When he has had program changes, he has said that he could not find teachers to obtain necessary signatures He is not living at home, and does not want parents notified of his cutting His guardian has offered to assume responsibility for future absences"

Case 22. Doris B Age 18. I Q 105 (A) Cutting classes (B) Student promised to attend regularly Mother will be notified about any future absences Student to make up immediately any work missed (C) "Good student with excellent previous citizenship record Has just started cutting. Does not leave campus, but fails to go to class Mother was unaware of absences Came for interview and talked with teachers of classes missed Was told that the work could be made up Girl is a graduating 12-2 student Promised both mother and counselor there would be no further cutting"

Case 23 Milford F Age 17 I.Q. 131 (A) Student was reported absent from Physical Education classes (B) Arrangements were made with the Physical Education Department to give boy a large, individual gym locker (C) "Student, a debater, was staying away from his physical education classes on days when debates were scheduled On those days he came dressed for public appearance, and re-

---

[12] James F Bursch, "Factors Associated with Non-attendance of Pupils in Secondary Schools," *Bulletin of the Department of Secondary School Principals,* XX (March, 1936), p 26

fused to dress for gym because that would necessitate hanging his best clothes in a small, crowded locker"

Case 24 Robert H Age 19 I Q 91 (A) Is absent often from a two-hour-per-week class in Lettering because he is bored by it and says he has nothing to gain by attending (B) Refused to let him drop the class (C) "After a frank discussion, Robert agreed to attend regularly and to make an honest effort The instructor was notified to this effect"

Case 25 Robert G Age 16 I Q 112 (A) Student had been cutting his fourth period class Conference arranged with student, Dean of Men, and counselor (B) Case was referred to the Dean of Men as a disciplinary matter Dean ruled "no more cuts or transfer to 8-hour school"[13] (C) "Student was 'batching it' with an older brother who worked, gave as an excuse that he 'went home noons to do the breakfast dishes' Student was under 18, so *could* be transferred to 8-hour school"

Case 26. Joe S Age 19 I Q 114 (A) Student came in ostensibly to drop a course because of outside work Inquiry proved that he wanted to lighten program to loaf in peace without annoyance from Attendance Office (B) Referred case to Dean of Men As student was above the compulsory age limit, Dean recommended withdrawal from school (C) "Has been an attendance problem since first enrolling here"

Case 27 Gregory S Age 17. I Q 88 (A) Student had been cutting Printing Conference arranged with student, teacher, and counselor (B) Student was counseled seriously on the general topic of cutting and laziness in class (C) "Felt that I knew the student well enough from previous favorable experiences to handle the case without referring it to the Dean of Men Did not want to jeopardize my future influence with the student."

Case 28 Pauline S Age 16. I Q. 133. (A) Most of the interviews with her have been involuntary and because of attendance infractions, although of late she has made it a practice to come in voluntarily to report absences This girl was put on scholastic probation at the end of the first six weeks (B) Have succeeded in getting her parents to come to the school for consultation Both the girl and her parents have been convinced that there is a close correlation between irregular attendance and poor scholarship There has been a marked improve-

[13] In this type of school small groups of students are taught and *closely supervised* by a single instructor for full eight-hour periods daily

ment in attendance, and she recently has been taken off the probation list She now has a chance to graduate from the lower division in June (C) "Her parents say that she presents no particular problem at home, although they impress one as very easygoing The girl responds well to kind but firm treatment"

Case 29 Margaret T Age 16 I Q 125 (A) Absent a great deal, but usually covers absence by petitions to be excused because of illness Was failing in Geometry, although she did well in the first semester of that subject in junior high school (B) Allowed her to drop the subject, but assigned her to Study Hall in its place (C) "We have reason to believe that her absence excuses are not bona fide, but that her parents shield her when called on the telephone for verification. The girl is known to frequent eating places across the street from school and to smoke cigarettes excessively Dropped out of our school and attended Part-Time High School shortly before the end of last semester, claiming 'illness' Does not respond to counseling, and has shown little improvement over the year."

Case 30 Helen T Age 17 I Q 103 (A) Student was summoned to explain unexcused absences (B) Girl was able to produce petitions granted, which covered the dates in question We apologized for having summoned her (C) "Error was found to be due to student help in the Attendance Office"

4 **Scholarship.**—Closely allied to the matter of irregular attendance in secondary schools is the problem of unsatisfactory scholarship Certain of the cases cited in the previous section might as appropriately have been included here. Unsatisfactory scholarship may result from worry, poor study habits, lack of sleep, excessively active social life, too high an educational goal, general laziness, and a host of other causes

Many schools make up probation lists at the close of the first grading period of each semester Students on this list receive special attention and counsel For students who are over the compulsory school age, or who may be transferred to a (to them) less desirable school, probation lists often serve to motivate students and bring them up to a more satisfactory level of scholarship But whether or not warnings of possible dismissal or transfer are given, it is important that every student on scholastic probation be counseled The following cases show the nature of individual counseling in this area

Case 31 Irwin B Age 18 I Q 127 (A) Student was failing in this triad's Solid Geometry because of repeated absence (B) Sent him to instructor with "analysis case blank" which they will jointly fill out (C) "Is a good student when he applies himself, but is weak-willed Promises to attend classes, but soon fails to do so Had been doing B work during the first six weeks in the subject Does not wish to drop, and admits his weakness lies in not attending"

Case 32. Sherrill C Age 21 I Q 107 (A) Scholarship problems due to "business" appointments (B) Recommended that student try to arrange appointments at times other than class hours (C) "Student is in the upper division (junior college) and has what he considers urgent business appointments with 'arrangers' to whom he is trying to sell a song Appointments have almost without exception conflicted with class hours, consequently, many absences have accumulated against him and his subjects have suffered greatly There is grave danger of his being dropped from school because of failure to remove probationary status"

Case 33 David H (Colored) Age 19 I Q 81 (A) Cutting classes after being placed on probation for low scholarship Failure to report when summoned. (B) Referred case to Dean of Men, and in consultation agreed to wait until determining grades of second triad are available before taking action This, in effect, gives the student one more chance He has agreed to attend all classes regularly and to make an earnest effort (C) "Mother is a nurse and is not often at home Usually no one is there to govern his activities Mother desperately anxious to keep him in school He is unable to find work and has companions that exert none too good an influence Because of his age there is no legal power to compel his attendance either here or at the continuation school

Case 34 Frank J Age 18 I Q 104 (A) Boy is on probation with a grade-point ratio of 0 00 Talked with mother by telephone in order to get home cooperation (B) Recommended that he stop cutting classes and get down to hard work (C) "Purpose to stimulate desire at least to graduate from high school, which he can do next June if he gets down to business Has sufficient intelligence. His brother, of no better ability, is doing very good work"

Case 35 Charles M Age 17 I Q 134 (A) Received following low grades for the triad Problems of American Life, *D*, Chemistry, *E*, Art Appreciation, *F* Up for graduation in June Claims to have improved the first two grades (B) Strong admonition given to work

harder Made him realize that his graduation is in danger (C) "Art Appreciation grade is entirely dependent upon tests Student has failed two tests in this subject Failure in the final would prevent graduation."

Case 36 Fred M Age 17 I Q 100 (A) Student summoned because teacher reported continued failure in Literature. (B) No action taken other than exacting a promise to begin at once making up back work and to prepare future lessons daily (C) "Interview brought out (1) Student dislikes English (2) Has to drive himself to study (3) Likes his instructor (4) Knows he can do the work (5) Is the type of student who needs occasional strong interview as an incentive to work."

Case 37 Junior P Age 15 I Q 117 (A) An 11-1 student failing in both Advanced Algebra and Spanish Boy is working four to five hours a day helping father in restaurant Time for home study amounts to only a little more than an hour daily Uses faulty method of studying Spanish (B) Advised that he ask father for more time to study, also, that he budget his time Suggested a different method of study for Spanish, and that he use week ends for working back problems in Algebra (C) "Boy is strong physically and is capable of carrying the load Only time for schoolwork is lacking"

Case 38 Bertha S Age 17 I Q 93 (A) Grade-point ratio at end of first triad was 0 00, hence had been placed on probation Conferences previously held with girl, mother, and Dean of Guidance Grade-point ratio at end of second triad was 1 00 (B) Called in student and commended her on progress made (C) "Felt that if student *just passed* in all subjects she would be meeting expectations Is not strong scholastically."

Case 39 Carroll S Age 18 I Q 118 (A) Student's junior high school average was *D* Did not work to capacity in junior high school, his announced school objective was "to quit school as soon as I reach compulsory age limit" Six weeks' grade-point ratio was 0.00; hence was placed on probation list (B) Conference with student about his attendance Referred case to Dean of Men The dean gave him six weeks to bring scholarship to passing, and ruled "no more cuts" (C) "Student is continuing as he had performed in junior high school, both in scholarship and attendance"

Case 40 Don W. Age 18. I Q 120 (A) Interview related to his probationary status (B) Discussed such matters as his companions, how he spent his evenings, and his actual chances of improving his

work Student said he was positive he could do better (C) "Marked improvement, with the result that he has been taken off the list."

5. Vocational Guidance.—It has been pointed out in a previous chapter that the guidance movement was originally concerned with vocational guidance only Although the aims of guidance have undergone many modifications, vocational guidance still stands as one of the most important functions that the secondary school must perform Furthermore, it is one area where the services of the specialist are most needed, for teachers by and large confess to an inability to keep up with the vocational scene and to advise accordingly

The individual counselor, therefore, will frequently be concerned with vocational guidance Much of that which passes for "educational" or "curriculum" guidance will very properly have strong vocational aspects The counselor will be in a position to extend vocational guidance only if he knows the opportunities and requirements in the field of business and industry—and if he knows the student being counseled—his interests, abilities, achievements, and temperament Situations involving all these factors are found in the next group of cases presented

Case 41 Elizabeth B Age 20 I Q 131 (A) A strong student in languages and history Wants a vocational outlet for these abilities, but does not care to teach (B) No specific action taken. Merely discussed vocational opportunities along the line of historical and language research (C) "Feel that she will be satisfied to do research work in history, foreign language translation, or library work Had her high school work in England Foundation in Latin and French particularly strong"

Case 42 Margaret C Age 22 I Q 92 (A) Discussed the new Recreational Leadership course (B) Student will consult Chairman of the Physical Education Department Will also discuss course with her father, who is a Scout Leader (C) "Student was interested in library work or in a Physical Education major Probably cannot finish four years of college because of finances or ability Lacks recommended status Has the promise of apprentice training for junior librarian when a vacancy occurs Is interested in summer camp and girls' work of all kinds."

Case 43 Dan D Age 20 I Q 104 (A) Discussed with him program to be carried next semester to prepare for stage lighting (B) Outlined, at his request, future work to be taken to prepare for stage electrician (C) "Student had considered becoming an electrical engineer After a year's trial he feels that he is not cut out for engineering He has always had an interest in stagecraft, however, particularly from the lighting angle Now he thinks he wants to enter seriously into stage work as a life occupation Fortunately, we have a Stage and Theater Mechanics curriculum in the Technology Department to which he may transfer"

Case 44 Theda G Age 19 I Q 97 (A) Student does not have recommended status and probably will be unable to attain it Wants to be a nurse, but must earn her own way (B) Discussed with her a new course being planned in Practical Nursing She was enthusiastic about it Will enroll as soon as plans are perfected (C) "Student does not live at home Father and mother are on the desert She earns her own way and contributes to their support"

Case 45 Fred G Age 19 I Q 92 (A) Boy is determined to be a physician Two years ago he had cerebral meningitis He returned to school, however, and forced himself to complete high school graduation Said he needed to use his brain and exercise it as one would a stiff muscle He cannot remember well and is very slow He lacked recommended status and has spent a semester and a half in an attempt to qualify for it At present he is getting all *D*'s and *F*'s No arguments can shake him from his determination to become a physician (B) Dropped French from his program to provide further time for the study of Chemistry, Geometry, and English (C) "He understands that if he does not make good grades in these subjects, college recommendation is out of the question, and he will give up the idea of going to the University of   In that event he is determined to enter some chiropractic school, or an osteopathic college for which college recommending grades are not necessary, and take a five-year course there Prognosis poor for projected plans"

Case 46 Velma H. Age 18 I Q 102 (A) Enrolled in a Secretarial course Has difficulty with it and is very unhappy Must prepare herself to earn a living Enjoys being with people and dealing with them Likes business (B) Rearranged her program as a Merchandising major. (C) "We talked over the merchandising curriculum and its possibilities Had her investigate the operation of the school bookstore and confer with the manager. She has ability in art

which should be a decided factor in success for window or counter display, buying, etc"

Case 47. Clara H Age 18 I Q 88 (A) Student graduates from high school this June Must prepare to earn a living Has little or no idea of what positions there are or how to prepare for them Her mother's negative attitude of "She'll never be able to do that" is very injurious (B) Advised her to return next fall and complete a course in Office Training in our upper division (C) "A discussion of her various classes and tastes revealed a liking and an aptitude for office work or filing She already had some courses on which to build Her capabilities would bar her from any higher type of training It is with considerable difficulty that she is making high school graduation"

Case 48 Moe R. Age 17 I Q 119 (A) Student is interested in two-year Civil Technology course, but is playing with the idea of engineering (B) Outlined the possibilities of a two-year versus a four-year course Mapped out a 12th grade program which would fit into his previous educational achievement and prepare him to enter the Technology course a year from next fall (C) "Felt this objective to be in line with his qualifications and background"

Case 49 Jack S Age 17 I Q 110 (A) Counselor has felt for some time that this student's progress toward his vocational objective (Medicine) indicates that neither ability nor character traits are compatible with that choice (B) Recommended to student and mother that a vocational analysis be made using thoroughgoing clinical procedures. They have agreed to this (C) "Am awaiting returns of the analysis Case has troubled me for long period I believe student has ability to accomplish his objective, but he does not seem to be doing it"

Case 50 Richard S Age 18 I Q 123 (A) Called student in to decide between a program of studies leading to Engineering, beginning next September, and one leading to Technology (B) Student felt that a Technology program would fit his needs better than any other curriculum which we offered An Aviation Technology program was accordingly made for him (C) "Boy has a good foundation in mathematics and physical science. Is interested in getting into the field of engineering on the production level in the least possible time"

6. Social Guidance.—Students who are in particular need of social guidance may be placed in two classes. One class is represented by those whose social activities are excessive to the point

that their academic schoolwork suffers School to them is but a glorified club So-called extracurricular activities become so inviting that time, interest, energy, and purpose are absorbed to a harmful degree It becomes a case where "the tail wags the dog" Such students need to be reoriented in a skilful and diplomatic, yet effective way

The other class of students is represented by the "grinds" who have little or no social life, by those whose home conditions preclude satisfactory social life, by those who have become anti-social, and by all who need ethical or moral guidance[14] The cases listed below represent several cases illustrating both general types

Case 51 Maxine A Age 17 I Q 98 (A) Problem is whether to drop school, go to Part-Time High School, or continue here (B) Changed Physical Education from first to fifth periods She will continue for the rest of the semester (C) "Student will be 18 next month Her mother has remarried, and girl is living with her aunt Keeps house for the aunt and her family while aunt is finishing a business training course Girl will not be dependent on stepfather, and wanted to drop school immediately on becoming 18 The change of Physical Education periods will give her more time in the morning for housework"

Case 52 Ruth B Age 17 I Q 110 (A) Interviewed because of having a negative grade-point ratio (B) Transferred to eight-hour school for remainder of semester Planned program for her which will enable her to graduate by end of semester following (C) "A twelfth year student, not working up to capacity this semester On probation at end of first triad, failed to improve by close of second Admits she has not been working, partially because of 'spring love affairs'"

Case 53 Ted C Age 19 I Q 113 (A) Attendance problems brought about by home conditions (B) Student withdrew Will live with grandmother and finish out the school year in Long Beach (C) "The boy was unhappy at home with his stepmother, and would leave for weeks at a time to be with his grandmother After discussing the difficulty, he decided it would be wisest to finish the year with his

[14] Charles C Cowell, "Suggested Index of Social Adjustment in the High School," *Educational Research Bulletin*, XVII (January, 1938), p 10

grandmother and return next fall (we hope with a changed attitude) to live with his parents"

Case 54. John F Age 18 I Q 117 (A) Voluntary interview regarding home problems (B) Recommended a change in attitude toward family with whom he lives More courtesy—and less criticism. (C) "Student is living away from home The people with whom he lives, and for whom he has a keen dislike, are friends of his mother He finds them unpleasant and critical Has a tendency toward rebellion. Conference with his counselor resulted in a decision to accept the situation and cheerfully 'make the most of it' for the remainder of the semester, rather than do anything to mar the friendship between his mother and this family."

Case 55 Blanche G Age 17 I Q 125 (A) A superior student but confused in her thinking Had planned to major in English with a view to teaching and writing, but a strong tendency to go to the roots of a problem plus a brilliant mind and some "old school" instruction in her English Literature course have turned her world upside down Believes that Christianity is a beautiful myth, and science the only basic thing in life (B) After a long discussion of the basic principle of beauty in this world, and the relation of science and religion, together with suggestions for adapting her program to her views without destroying her original plan, counselor sent her away to "think it over" (C) "She has always planned to teach and write and I see no reason why she should not pursue her intended course. Shall place her wisely in her classes and advise her instructors of her needs"

Case 56 Jack H Age 20 I Q 107 (A) Believes he has a fine voice as a result of "featuring" by high school music teachers and auditions with some well-known musicians of Los Angeles Says he was told in the Junior College Music Department that he had *no* voice and did not know *how* to sing This was a blow to him He came to the counselor's office for this reason and also because he was "incomplete" in all his subjects as the result of a serious auto accident (B) Lightened his load by dropping Drama to secure time for makeup in his other subjects Also changed from Advanced Voice to Elementary Voice (C) "Is known as his home town's 'protégé' He is a professional dancer with considerable stage experience Boy's own attitude is particularly fine He feels that he will get more real instruction in technique in Elementary Voice as compared to the sing-

ing of pieces in Advanced Voice. Is anxious to 'show' his teacher what he can really do"

Case 57 Clyde H Age 17 I Q 131. (A) Student is scheduled to graduate in June but to date has an *F* in Civics, an *E* in Physical Education, and a *D* in Physics (B) Discussed the seriousness of the situation, the time element, and the comparative value of "making graduation" versus the denial of social pleasures for the remaining few weeks Student reports progress in two classes and will take a make-up test in the third next week. Arranged a time schedule for more study on back work (C) "Is in love The girl in question has the same grades in the same classes"

Case 58 Roy H Age 18 I Q 125 (A) Student had failed all subjects in 11-1 except Music Appreciation and Physical Education Exhibits lack of interest and persistent cutting and inattention Failed all subjects except Bookkeeping at the end of the first six weeks Continued absence from this class on flimsy excuses of sprained back, mother's illness, and poison oak—all without mother's knowledge Failed all subjects on next report Shows no vocational interest or purpose whatever (B) Transferred to eight-hour school (C) "Home is apparently unable to control him Father a teamster Boy has repeatedly agreed to attend classes regularly, but slips out on the slightest pretext In the eight-hour school he will have strict supervision by a single individual"

Case 59 Abraham S Age 19. I Q 83 (A) Boy came in to complain of maladjustment toward students Had recently suffered loss of some gymnasium articles from his locker Said if they were not replaced, he would not go to classes (B) Told the boy that the school would do its best to find out where his Physical Education clothes were, but whether they were recovered or not, he would have to go to class Also told him that it would be necessary for him to bathe oftener, and to keep his clothes in a neater and more orderly condition (Several students had complained about him) He seemed to appreciate this advice, once he knew that he had been offensive, and marked improvement has resulted (C) "Boy has been a 'butt of all jokes.' Comes from a poor Jewish family, dresses oddly—was even ragged and dirty—and had a very bad stuttering handicap This handicap is being removed Boy has consistently done fairly well in difficult subjects despite his recorded low I Q"

Case 60. Natalie T. Age 18 I Q 118 (A) Interviewed girl at mother's request This was just after the home had been notified that

the girl was to be placed on scholastic probation (B) It was at first difficult to make the girl understand that the school really meant business about dropping students over 18 who failed to remove their probationary status within six weeks by bringing their work up to a *D* average or better After that the student showed an interest in the manner of computing averages and in particular ways in which she might get off probation The results of constant smoking were mentioned, although she informed counselor, as she had her mother, that this was done for effect only (C) "The girl had been a leader in the city from which the family came and refused to make any personal application of our rules to her situation The family is not as yet well acquainted here, and the girl had taken up with what she believed to be the 'smart set' Once she substituted school interests for questionable social interests it was an easy matter for her to get off the probation list"

7. Economic Guidance.—The next series of cases deals with what, for want of a more appropriate term, may be considered "economic" guidance It might be explained that these are cases where the economic plight of the student or the social-economic background of the home is such as to force a decision or course of action Cases of this nature naturally vary in severity. Sometimes the same classes need merely to be rearranged so as to permit a certain amount of working for pay outside of school Sometimes the student must drop out of school entirely for a time, or be transferred, if under age, to the Continuation School

In a sense the economic status of the student and his parents is taken into account when any kind of guidance problem is being considered Social and vocational guidance, for example, are very closely related to it The choice of a curriculum, particularly, should be appropriate to the individual's economic situation Indeed, as will be seen in some of the following illustrations, acute economic situations frequently force changes in curricular plans

Case 61 Lawrence B Age 19 I Q 119 (A) Needed program adjustment to enable him to continue part-time employment (B) Changed Physical Education class from fifth to first period (C) "Boy works in a theater every afternoon and evening Due to change in theater's schedule, he will have to be there daily at 1 00 P M A good student"

Case 62 Leslie C Age 19 I Q 95 (A) Student was failing in Problems of the Pacific and wished to drop the course (B) Permission to drop the course was given (C) "Failure in the course was primarily due to the student's lack of a text, which he felt he could not afford to buy Had the situation been brought to our attention earlier in the semester, a text might have been provided, but since he had failed in half the semester's work it was thought advisable to drop the subject"

Case 63 Lee D Age 19. I.Q 106 (A) Requested leave of absence for two weeks to work (B) Referred request to Dean of Men, who granted it (C) "Student forced to earn money needed to pay the rent Father is jobless and there are four in the family The mother is the only earning member She substantiates above facts"

Case 64 Caroline M Age 19 I Q 131 (A) Student is willing to attend another full year because she "will not have the finances to attend the university upon graduation and may never be able to go" She will have fifty-two certificate units by end of present semester Needs only twelve more, but of these, six must be in Philosophy This ordinarily requires a year to complete (B) Recommended that she take three units of Philosophy in summer session, carry a very light program in the fall, and plan to graduate in midyear (C) "I feel that a light program and graduation as soon as possible will help out the financial situation She may find it possible to save something toward university attendance"

Case 65 Donald M Age 21. I Q 106 (A) Wishes to be excused as soon as final examinations are completed as he has promise of a position with the Forestry Service for the summer, possibly the whole year (B) Advised student to send petition to the Administration Staff, making his request known and giving reasons for wishing it honored Counselor will recommend that petition be granted (C) "This boy has been employed at previous times in the Forestry Service and expects to make it his lifework Were he to appear on the job at a later date, he would probably find the position filled"

Case 66 Carolyn M. Age 24 I Q 102 (A) Has insufficient time to do collateral reading in Social Problems Is dependent upon own efforts Does cooking and housework Interested in five-year nurses' course (B) Dropped Social Problems (C) "Social Problems no longer required in nurses' course Student needed more sleep She had been getting only six hours each night"

Case 67 Warren M Age 20 I Q 98 (A) Student petitioned to be allowed to drop Psychology He is failing and has no interest in it (B) Petition was granted (C) "Student is partly self-supporting. He has recently had to give up the idea of going to the university. His original plan would have required Psychology, but now he does not even expect to graduate Is interested in only the most practical business subjects"

Case 68 Peggy N Age 17. I Q 128 (A) Low or failing grades in several subjects (B) Dropped Mixed Chorus and assigned to Study Hall for these periods (C) "This girl is a dancer and does some work in Hollywood as well as other places Mother says that they need the money that the work brings in. Student evidently lacks the time for study"

Case 69 Donald N Age 21 I Q 103 (A) Student had been out of school for three years Has been working for a living in a boarding house Employers have been increasing work until student has no time for study (B) Advised that he quit the boarding-house job (C) "Student's sister will advance sufficient funds to pay for groceries and incidentals for the remainder of the semester He will live with a gardener in a cottage they are jointly occupying at present"

Case 70 Vladimir U Age 20 I Q 142 (A) Student requested permission to be absent for one day to work at the Russian-American Club (B) Counselor granted this request. (C) "He is a good student and conscientious It is necessary that he earn his way. This he does by various odd jobs, but principally by playing in an orchestra Went to high school in China, and brought an excellent record from there"

8. Recreational Guidance.—"All work and no play makes Jack a dull boy," reads the familiar adage If we might paraphrase this a bit, it could be added that the lack of opportunity to play often makes Jill a very unhappy girl Two things are of paramount importance to every student one is that some opportunity for leisure be afforded; the other, that leisure time be wisely used

In some of the cases previously cited the need for recreational guidance may have been noted Recreational guidance cuts across many other areas such, for example, as social guidance or mental hygiene Knowledge of suitable avocations and enjoyment of certain hobbies are necessary for all-round devel-

opment and a well-adjusted personality The extracurricular programs of many secondary schools abound in opportunities that are often ignored by students who are in the greatest need of them In individual guidance the counselor becomes aware of such needs and should be alert in referring students to those who are responsible for the particular activities in question. In the cases grouped below, the Dean of Men and the Dean of Women figure prominently.

Case 71 Pauline B. Age 23 I Q 101 (A) Voluntary interview to report progress in curriculum carried Student is older than average 13-1's; is taking a nursing course She is here alone, a transfer from New Jersey, and dependent on own resources Has been working for her room and board Found full nursing program too heavy Dropped a course, also changed to a lighter home position. (B) No action with student other than interview, but referred case to Dean of Women (C) "Conversation with student leads one to believe that she has recently undergone some 'hard experience,' which she is not yet ready to discuss, and that her present adjustment need is mental or emotional rather than physical So far she is unacquainted with other students, so through the Dean of Women and the Dramatics Club (the one interest she expressed) it is hoped she may have a more normal and healthful environment"

Case 72 Bill H Age 17 I Q 119 (A) Boy is lonely and homesick (B) Conferred with Dean of Men. Took action to have him meet another homesick boy from Canada whose father is also an engineer The president of the local Student Christian Association is also drawing them into school activities. (C) "Came from a small town in Florida. Had difficulty in adjusting to a large school in a strange place"

Case 73 June W Age 18. I Q 113 (A) An only child who could not get along with other students She was appointed to a major position in student government because of her ability in art Although intelligent and conscientious, she made a failure of her job because of her inability to delegate responsibility or share work with others (B) The Dean of Women conducted the interview which took the form of a rather severe lecture on the subject of leadership (C) "This student is now one of our very best Service Club members and has been chairman of several important class committees"

Case 74 Ignacio S. Age 19 I Q 98 (A) A Filipino student who wanted information on how to form a club, select a faculty adviser, etc, for the Filipino boys of the junior college (B) Gave him the information desired and helped to organize the club We are planning a program of contributions from the club to the school library on Philippine topics (C) "I even agreed to act as their faculty adviser At present I am helping plan an assembly program for the club to present to the student body"

Case 75 Margaret W Age 16 I Q. 105 (A) Mother telephoned that the girl was very unhappy during her first semester in our lower division because she had no opportunity to continue her leadership activities begun in junior high school. (B) Referred case to the Dean of Women who invited Margaret to a small informal meeting in her office Some of the student leaders present invited her to work on committees (C) "This girl has had experience in leadership She held increasingly important offices and finally became president of the Associated Women Students"

Case 76 Ruth M Age 17 I Q 98 (A) This student, who said she hated school and continually cut classes, had been arrested for shoplifting in the company of an older girl Probation officers allowed the girl to return to junior college (B) Since she had always seemed to enjoy Physical Education, that department in particular was asked to assist in her rehabilitation (C) "Ruth became interested in women's sports and finally was awarded several of the highest honors in the Women's Athletic Association Her scholarship improved simultaneously with the development of her interest in athletics"

Case 77 John S Age 19. I Q 95 (A) Called the boy in because of many unexcused absences, chiefly from Physical Education classes It developed that he had cut these because he was resentful of a situation which kept him from becoming a member of the school teams (B) Counselor agreed that if future attitude was good, and if satisfactory attendance in all classes was maintained, he would personally endeavor to get a birth certificate for the boy. Lack of this had barred him in the past from interscholastic competition (C) "Has been a real problem around school, and is known to be sensitive about his birth Most of his attendance irregularities have centered around Physical Education in spite of his being quite an athlete A social worker with whom I am acquainted has promised her assistance and says she may be able to trace records, since the boy has been a ward of the institution she represents for many years"

Case 78 Rose L Age 16 I Q 105 (A) An 11-1 student with a distinct inferiority complex in spite of a very attractive appearance Felt that she was shunned by everyone she met and that "something must be wrong with her " (B) Had Dean of Women give girl's name to student leaders who needed committee members (C) "This slight help was all that she needed She is now happy and well adjusted, since she feels that others need her help "

Case 79 Alice K Age 19 I Q 138 (A) A gifted individual who does excellent scholastic work Made an outstanding contribution in a literary club, but absolutely refuses to mix with other students. Dresses in extreme fashion very much out of school style Her home background is very good (B) Case referred to the Dean of Women, who has worked hard with student and parents to get her to work with other girls in social or recreational affairs about the school (C) "In spite of many opportunities for normal social life, this student is making no progress socially and is becoming increasingly neurotic"

Case 80 Ned T Age 16 I Q 105 (A) Requested that his four-semester program be rearranged so as to include Band each semester (B) Conferred with Dean of Men, who also acts as director of the band It was his judgment that the boy could play the marimba sufficiently well to fill the place of another student who is graduating in June. Programmed him for two units of Band, beginning next semester (C) "Boy has been wavering in his extracurricular interests between music and football Is not particularly strong scholastically Band work will probably do both himself and the school the more good "

9. **Physical Health.**—Cases illustrating Health Guidance alone remain to be presented in this chapter Health, it will be recalled, constitutes one of the four broad areas of guidance[15] Because of their importance for good adjustment, physical health and mental health are discussed separately. This procedure should not be taken to imply that these are distinct entities or that the order in which they are discussed is any indication of their relative importance We can only say that in certain individuals the need for the one kind of guidance may be greater than for the other

Cases illustrating physical health guidance are presented first.

---

[15] Edwin A Lee, "Individual Guidance for Occupations and Health," *American School Board Journal,* XCVII (September, 1938), p 27

The condition of an individual's health is of prime importance in considering his educational or vocational plans, the social program he should carry, and the nature of his recreational activities Health needs to be considered when attendance becomes irregular, when scholarship is unsatisfactory, or whenever there is apparent need for educational adjustment of some kind This is another striking illustration of the complexity of guidance situations The need for (physical) health guidance is especially evident where Physical Education is required by law of all students Here it is important that a sufficient variety of health activities be afforded, and that students be assigned to classes in terms of their physical needs

Case 81 Geraldine M Age 23 I Q 119 (A) Problem was to decide whether it would be wiser to struggle through the year, getting low grades because of her physical condition, or to have an operation immediately (B) Sent girl home to make arrangements to go to hospital. Assignments for the next three weeks will be sent to her (C) "A candidate for 12th year graduation with a chronic disorder which has been growing worse during the last month. Was hoping operation could be postponed until vacation, but feels so much worse that she has been falling behind in all subjects It seems wise to face the operation at once If work missed cannot all be made up, she will go to summer school and graduate at its close"

Case 82 Robert B Age 17 I Q 105 (A) Because of family's insistence is in regular freshman Physical Education instead of in Recreation School physician's first-semester assignment was "Recreation" (B) Sent to school physician for re-examination and possible permission to remain in regular Physical Education (C) "School health card indicated cardiac and nutritional difficulties Family physician insists that the boy is capable of carrying regular physical exercise Family to assume any legal responsibility, since counselor advises against such a course"

Case 83 Bill B Age 18 I Q 94 (A) Failing student; has been absent a great deal Doctor recommends dropping school as boy has anemia (B) Student is to withdraw (C) "An 11th-year student. Absences due to illness and working for father in drugstore Family physician recommends that student drop school for remainder of year and go to the desert Father agrees, will send him away for the summer and perhaps next year"

Case 84 Elsie E Age 20 I Q 83 (A) Has been having trouble with her eyes (B) Arranged an appointment with free clinic for eye exercise and treatment (C) "Examination showed a marked divergence of one eye which could be corrected by exercise Examiner recommended that exercises be followed by further examinations"

Case 85 Rodna H Age 19. I Q 89 (A) Is on the June graduation list, but is in poor health and failing in two subjects (B) Advised mother that, for the sake of the student's health, she drop Civics, lighten her load, and take an extra semester for graduation (C) "Since she is already repeating and failing two subjects, she is discouraged She has heart trouble and should not work harder, but do less"

Case 86 Una P Age 18 I Q 85 (A) Called student in to finish four-semester study plan (B) Persuaded student to take lighter program for the remainder of her time in the lower division, and to drop Bookkeeping for which she will have little use in a nursing course Also suggested that she have interview with her English teacher as she was receiving low grade in that subject (C) "Had called mother earlier in the day and found that girl's low grade in English is due to poor health and a rather heavy (18-unit) program Student born with a weak heart A long day exhausts her A lighter program (15 units each semester) will give her just enough for graduation"

Case 87 John R Age 19 I Q 151 (A) Student had been assigned by school doctor to regular Physical Education Family doctor reported cardiac lesion as result of too violent exercise Student and father requested that I assign no Physical Education, even in face of school doctor's insistence (B) Assigned student to Rest class (C) "Felt that when the two doctors could not agree on their diagnosis and prescription, the school should be protected from legal comeback in case of possible future injury to the student"

Case 88 Ralph S Age 21 I Q. 112 (A) Student returned to withdraw after absence of four weeks, due to an appendectomy. Wanted to plan course for summer and next fall (B) Told him the procedure for withdrawing Advised against going to summer school; suggested he defer plans for next fall until later in the summer (C) "Student had been struggling along all semester until operation was imperative Felt summer school attendance was unwise Thought his plans would change, or at least be more definite, by August, when he would be in better physical condition"

Case 89 Louise S Age 21 I Q 104 (A) Student returned to school after absence due to influenza. (B) Referred case to school nurse Received health card and Physical Education assignment the following day Made out program of one third of a normal load, with room arrangement so that student would not have to go up and down stairs (C) "Health card revealed that student had a weakened heart"

Case 90 Marjorie W. Age 20 I Q 97. (A) Student desired to know if she might drop Law and Economic Geography and still receive her junior certificate in June (B) A check with the Records Office revealed that she might, and she was advised to do so (C) "Student had been ill for two weeks Physician advised a light program for the balance of the semester She had six excess units, earned two years ago at the University of . . . summer session"

10. Mental Health—A consideration of mental health guidance has purposely been placed last in this chapter If the development of personality is one of the leading objectives of secondary education, to say nothing of the many claims that it constitutes the principal one, knowledge and practice of mental hygiene principles are most important for every student

The guidance worker is in a particularly favorable position to point out these principles and to observe the effect of their practice He can point out, for example, the relationship that obtains between personality traits and vocational success The same relationship holds to a large degree between personality and success in ordinary school situations One of the most valuable lessons that the counselor is in a position to drive home is the necessity of getting along with one's fellow students and teachers The importance of learning to make the most of situations which cannot or should not be changed, without taking the easiest way out—dropping a course or changing one's whole curriculum—can also be stressed Some of the cases below illustrate these points

Case 91 Dorothy C Age 18. I Q 99 (A) The student and her mother came to the counselor's office very irate over an *E* the student had received in one of her classes The incompleteness of the work was blamed on the instructor (B) Recommended an interview between the mother and instructor. Pointed out probable reasons for giving the *E* After a short conversation with the two, a kinder atti-

tude was taken, and the suggestion that the parent confer with the instructor was agreed to (C) "This particular student has a tendency to blame the instructors for her own inadequacies and shortcomings"

Case 92 David C Age 15 I Q 126 (A) Scholastic standing is suffering because of an unfortunate personality (B) Counselor discussed with the student the possibility of developing a different attitude toward his work (C) "The student is one of an accelerated group, coming with an exceptional record from one of the junior high schools Overly conscious of his ability, he started out with an 'I know it all' attitude, which immediately met disfavor with his instructors He realizes his handicap and is making a great effort to overcome his difficulty Have had frequent telephone conversations with the home Mother is 'aware' of the boy's unusual ability and is sure that he is most 'misunderstood'"

Case 93 Ruth C. Age 16 I Q 107 (A) A case of teacher-student adjustment Misunderstanding arose over an examination (B) Recommended an interview with the instructor Counselor and student held a joint conference with chairman of the department Difficulty was soon ironed out and student reinstated in the class (C) "Instructor likewise had come to the counselor, feeling that student was unjust in her criticisms Student said instructor was unfair in her grading Both felt badly The student was anxious to be allowed to return to class, and the instructor was glad to permit it, providing the student would assume the proper attitude Student expressed a willingness to apologize for remarks made"

Case 94 Bob J Age 17 I Q 117 (A) The interview was held to help him set up suitable work habits In fact, there has been a series of short interviews over a long period of time (B) Again stressed regularity and punctuality of attendance, and careful attention to details of work Good results are appearing Boy failed in only one subject at the end of the first triad—compared with complete failure at the same time the preceding year (C) "Boy went to pieces last year Had to be sent to eight-hour school for seemingly hopeless irregularity in attendance and low scholarship A telephone talk with boy's mother indicated a somewhat shiftless attitude toward things at home The school band played an important part in holding the boy's interest this year"

Case 95 Al K Age 15 I.Q 86 (A) Irregular attendance and poor scholarship (B) Recommended that he be sent to the eight-hour school, and be kept under supervision for a time (C) "Student

is an inveterate 'cutter' Mother confesses inability to handle him He has got by with much absence because of his emaciated and cadaverous appearance He would claim to be sick and, from his appearance, no one would doubt it Failing in practically every subject."

Case 96 Harry K Age 17 I Q 91 (A) Irregular attendance and an unfortunate personality (B) Counselor recommends that *either* the boy come back, attend regularly, and perhaps specialize in Printing, which is the nearest to any interest he has manifested, *or* that he be taken out and placed in some private school For the present the case has been turned over to the Dean of Men and the Attendance Officer (C) "Is the son of prominent parents Has had a negative attitude toward schools, books, and teachers since kindergarten days Parents do not blame the school and seem cooperative The boy is unfortunately endowed His voice is thin and rasping According to the testimony of an observing teacher, he seems unable to speak to a person without insulting him Is very irregular in attendance—condoned at home because of weak eyes, which may in part be rationalization"

Case 97 Ruth L Age 17. I Q 121 (A) Girl shows some manic and depressive tendencies Is also inclined to rationalize (B) Held conference with matron of the home where girl stays Suggested that the student be given more time to study Advised the student to make better use of her time, and warned her of the danger of rationalization (C) "The girl is of mixed parentage and is very bright. Lives at an orphan home for girls Possesses leadership ability Has ups and downs, last year was definitely down This year she is doing better, but is having a hard time in Spanish Says she does not have time for study because of cooking, washing, and other duties"

Case 98 Ronald M Age 19 I Q 117 (A) Student definitely lacks personality integration (B) Helped the boy analyze his condition and mapped out a program aimed at setting up precise and regular work habits Dropped Physiology, his hardest subject, so that he might concentrate on the others (C) "Examination by psychiatrist revealed a strong dementia praecox tendency Is much given to daydreaming, spends hours at it Has plenty of ability, but rationalizes his failures in classwork Thinks he is going to be a poet Has never tried to have any of his poetry published Is on probation and likely to be dismissed from school next week"

Case 99 Raymond M Age 18 I Q 105 (A) Involuntary interview occasioned by irregular attendance (B) Advised student to

withdraw and attend a private school He has done so (C) "Has a bad record for cutting, especially Physical Education Against this subject he has a complex, in which he is supported by a well-to-do father Absolutely irresponsible Also a case of 'too much car' "

Case 100 Josephine R Age 16 I Q 105 (A) Student wanted to change teachers because she was "not able to get along with her Literature teacher" (B) Recommended that she stay in her present class Tried to point out that it was a part of her education to adjust herself with good grace to various situations, even though they were distasteful (C) "An investigation disclosed that she had done only about 10 per cent of her work and had no chance of passing in the remaining three weeks I felt, under the circumstances, that her 'personality conflict' was another way of avoiding an *F*, and that it was unfair to put a grade that would certainly be an *F* on another teacher's record by transfer at such a late date"

Summary

The phrase "individual counseling" is redundant because there can be no counseling which is not individual Counseling is not new Adults have always passed on the fruits of their experiences to younger and more immature individuals But the techniques of counseling have been further developed and refined

Although improved techniques tend to make it so, counseling is not always effective. To make it so the counselee must be aware that he has a problem His needs, interests, and abilities must be related to this problem in a personalized way External factors bearing on his problem must be analyzed and explained There must be someone to whom the counselee can turn for help Most important of all, the counselee must feel the need for help and know to whom he may go to receive it

Preparation for interviews should include a thorough study of available personnel data concerning the individual to be counseled Counsel should not be given in the absence of pertinent, available facts. A record should be made of what occurs during, and as a result of, the interview Each of these three steps is frequently violated in counseling practice The first and last steps are slighted largely because of the "loads" carried by

counselors For failure to observe the second step there is no excuse

No attempt has been made to discuss counseling as a function of the classroom teacher To have time for counseling, the teacher must be relieved of the necessity of covering predetermined amounts of subject matter Even for the specialist, counseling does not constitute the entire guidance program When the same information is needed or similar problems are faced by a number of students, the counselor may properly utilize group guidance Individual counseling supplements the group approach

Ten unselected cases from each of ten basic problem areas where individual counseling is employed have been presented in this chapter Each case indicated, by means of notes, (A) the incident that brought the student to the counselor, (B) the action taken by that official, and, finally (C) remarks by the counselor bearing on the particular case Although not a substitute for actual observation in a counselor's office, it is believed that these cases represent a fair cross section of those encountered daily in individual counseling situations

Questions and Problems

1. What problems arise when the pupil first enters the junior high school? What confusing difficulties face the new B-7 pupil? What counseling does he need?

2. What should be the major emphases in counseling in junior high schools? In senior high schools? In junior colleges?

3 What problems of moral, social, and personality guidance is the high school counselor likely to encounter?

4 What types of guidance difficulties occur at the junior college level?

5. What guidance activities do not lend themselves to the group approach, but must be carried on with the individual?

6. List a number of specific services that cannot be offered to students in a program that does not include individual guidance

7 How may interviews with reference to individual programs and courses of study be organized so as to function most efficiently?

8 What opportunities should be offered for pupil consultation with the home room adviser? How may this supplement the work of the counselor? How may it be coordinated?

9 Assume that your high school wishes to institute a program of character evaluation What traits would you attempt to measure, and how often would you try to measure them?

10 Should the counselor interview students to whom failure notices have been sent? What purpose would be served?

11. When may voluntary conferences with school officers be held in your school? Should a schedule of possible times be posted?

12 Why is the voluntary type of interview likely to be most effective? What sort of student usually comes of his own accord? What type of student almost never comes unless called?

13 How may voluntary interviews be encouraged? What type of counselor is most likely to have many such interviews? What attitudes and actions will tend to encourage them?

14. What responsibilities should the counselor have for personality difficulties between teachers and pupils?

15 Should the counselor ever interview disciplinary cases? What dangers are involved? What advantages?

16 Describe a number of cases of improper counseling which you have known. Which counseling errors were involved in each case?

17. Who should be advised to prepare for college? What advice should be given the student who has less than average intelligence and who is determined to go to college? What criteria for college entrance can you suggest?

18 What machinery can be set up for keeping a stream of students flowing smoothly into the counselor's office?

Selected References

Bell, Hugh M *Theory and Practice of Student Counseling* Stanford, California Stanford University Press, 1935, 138 pp.

Bingham, W. V, and Moore, B V. *How to Interview* (3d ed) New York, Harper & Bros, 1941, 263 pp.

BUESCH, JAMES F "Factors Associated with Non-attendance of Pupils in Secondary Schools," *Bulletin of the Department of Secondary School Principals*, XX (March, 1936), 26–32

CHAILMAN, ROBERT C "Problems of Pupil Adjustment Requiring Counseling," *Teachers College Record*, XL (October, 1938), 34–39

COWELL, CHARLES C "Suggested Index of Social Adjustment in the High School," *Educational Research Bulletin*, XVII (January, 1938), 10–19

COX, RACHEL D *Counselors and Their Work* Philadelphia Archives Publishing Co, 1945, 246 pp

CROW, ALICE "Adjustment Problems of High School Girls," *Secondary Education*, VII (April, 1938), 77–81

CURRAN, CHARLES A *Personality Factors in Counseling* New York Grune & Stratton, 1945, 287 pp

ERICKSON, CLIFFORD E *Practical Handbook for School Counselors* New York The Ronald Press Co, 1949, 224 pp

ERICKSON, C E, *et al* *Basic Test for Guidance Workers* New York Prentice-Hall, Inc, 1947, 566 pp

ERICKSON, C F, and SMITH, G E *Organization and Administration of Guidance Services* New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1947, 276 pp

FEDDER, RUTH "Counseling Trends in Elementary and Secondary Schools," *Teachers College Record*, XXXXVI (October, 1944), 17–24

FROEHLICH, CLIFFORD "Fargo Selects and Trains Teachers for Individual Guidance," *Clearing House*, XVII (January, 1943), 290–93

GARRETT, ANNETTE M *Counseling Methods for Personnel Workers* New York Family Welfare Association of America, 1945, 187 pp

——— *Interviewing—Its Principles and Methods* New York Family Welfare Association of America, 1942, 123 pp

GORDON, H PHOEBE, DENSFORD, KATHARINE J, and WILLIAMSON, E G *Counseling in Schools of Nursing* New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1947, 279 pp

INGRAM, VIVIEN "Why Flint Secondary Schools Emphasize Individual Counseling," *Clearing House*, XXI (November, 1946), 148–51

JOHNSON, WILLIAM H "Guidance, Counseling, and Adjustment," *School Executive*, LVI (May, 1937), 333–34

LEE, EDWIN A "Individual Guidance for Occupations and Health, Abstract," *American School Board Journal*, XCVII (September, 1938), 27–28

LEONARD, EUGENIE A "Guidance is Inherent in Education," *Catholic Education Review*, XXXVIII (December, 1940), 585–91

MATHEWSON, ROBERT H *Guidance Policy and Practice* New York Harper & Bros, 1949, 294 pp

MAY, ROLLO "Present Function of Counseling," *Teachers College Record*, XLVI (October, 1944), 9–16

McCRACKEN, CHARLES W "Student Counseling by Students," *School and Society*, XLVIII (October 1, 1938), 434–38

ROGERS, CARL R "Counseling," *Review of Educational Research*, XV (April, 1945), 155–63

——— *Counseling and Psychotherapy* Boston Houghton Mifflin Co., 1942, 450 pp

ROTHNEY, J. W M, and ROENS, B A *Counseling the Individual Student* New York William Sloane Associates 1949, 364 pp

SNYDER, WILLIAM V "Present Status of Psychotherapeutic Counseling," *Psychological Bulletin,* XLIV (July, 1947), 297-386
STOLZ, HERBERT R "Meaning of Individual Guidance," *National Education Association Journal,* XXVII (September, 1938), 189
SYMONDS, PERCIVAL M "Province of Psychological Counseling," *Teachers College Record,* XXXVII (January, 1936), 313-27
SYMONDS, P M, and DIETRICH, D H "Effect of Variations in the Time Interval Between an Interview and Its Recording," *Journal of Abnormal and Social Psychology,* XXXVI (October, 1941), 593-98
THORPE, LOUIS P "Danger Signals of Needed Pupil Adjustment," *School and Society,* XLVI (December 18, 1937), 799-801
TIEGS, ERNEST W "I Q. and Individual Guidance," *Education Digest,* III (June, 1938), 28-29
TRAXLER, ARTHUR E *Techniques of Guidance* New York Harper & Bros, 1945, 394 pp
TURRELL, A M "Factors Related to Scholarship at Pasadena," *Junior College Journal,* VII (February, 1937), 248-254
WARTERS, JANE *High-School Personnel Work Today* New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1946, 277 pp
WILLIAMSON, E G, and BORDIN, E. S "Analytical Description of Student Counseling," *Educational and Psychological Measurement,* I (October, 1941), 341-54
WRENN, C GILBERT "Child Centered Counseling," *Educational and Psychological Measurement,* VI (Winter, 1946), 439-44
——— "Counseling with Students," *Guidance in Educational Institutions,* Thirty-Seventh Yearbook, National Society for the Study of Education, 1938, Part I, Ch IV, pp 119-43
YOURMAN, HAROLD "Helping Pupils Find Themselves," *High Points,* XX (June, 1938), 43-48.

Chapter 14

TECHNIQUES FOR STUDYING THE INDIVIDUAL

In group guidance it is assumed that there are certain basic problems experienced by all or many, and that a discussion of their common elements will be of benefit Some students may not even be aware that they have problems in some of the areas discussed One of the objectives of such group guidance may well be to arouse the student to an awareness and an appreciation of problems which he will eventually face

This is not the situation in counseling the individual student Here the subject is fully aware that he has a problem in need of solution He may not have analyzed it in detail, and he may not be cognizant of its various ramifications, but he senses a difficulty which is making him uneasy Group instruction may have awakened him to this realization but his problem is now *personalized* and cannot be solved for him except on an individual basis

The individual possesses certain general and specific aptitudes, interests, and personality characteristics, together with a background of experiences, which have a distinct bearing on the solution of his problems If these abilities, interests, and experiences were not peculiar to him, and if he possessed characteristics common to everyone else, the student would have no problems which could not be solved by group methods.

Factors operating outside the individual may impose certain conditions which also affect, if not actually determine, the outcome of his efforts to find vocational and personal adjustment While it is possible for a student to ascertain through study and discussion many of these conditions, the problem of combining them with an appraisal of his own abilities, interests, and previous achievements in the solution of his problem may be a task of which he is incapable

The Individual Feels the Need for Help—The individual facing a problem feels insecure if he is unable to cope with it Problems which the student can solve for himself are often presented and analyzed in group guidance meetings Various solutions to his difficulties may be presented to him in this way He may then be capable of choosing and applying a course of action to his own situation Many questions related to choice of school subjects and activities are handled in this manner Such problems do not require an application of the clinical approach There are, however, such momentous decisions to be made as to require help both in making them and in checking the appropriateness of one tentatively selected

Basic Varieties of Counseling Needed—The problems which need individual analysis and the skilled assistance of a guidance specialist may be divided into two major classifications (1) those with a personal emphasis, usually accompanied by strong emotional undercurrents, and (2) the more complex cases of vocational advisement, usually involving an incidental educational choice Financial and health problems may be associated with either or both of the above categories, but they seldom occupy the key position in the solving of serious or complex difficulties

Recent trends in the observation of student counseling needs indicate that many problems apparently vocational in nature are strongly saturated with important emotional involvements [1] For this reason it is important to employ counseling techniques which allow the student to express himself fully and which permit both counselee and counselor to examine the character of the problem and the basic motivation thoroughly Frequently, when personal tangles and maladjustments are rectified, the blocking of vocational choices either disappears or becomes much simpler to handle If he is to render effective help to the student who comes with a serious problem, the competent guidance worker must be able to assemble a variety of important facts about the counselee and the environmental field in which he lives A wealth of knowledge is available concerning the

[1] Ray H Bixler and V H Bixler, "Clinical Counseling in Vocational Counseling," *Journal of Clinical Psychology*, I (1945), pp 186–92

occupational fields awaiting the counselee, the social and economic situations which he will face, as well as problems of health and leisure-time activities These numerous facts concern the external environment which he will enter and in which he must make an adjustment Likewise the results of numerous research studies about mankind in general are available his nature and nurture, and his needs, interests, and abilities For counseling purposes, however, information must be assembled about *one particular person,* and the generalizations made from studying thousands of persons and situations must be applied to *this one individual*

It is possible to classify sources of information about students into three general groups (1) information obtained from individuals, either the person himself, or from others; (2) facts gathered from sources such as school, court, or medical records; and (3) the picture of the individual which standardized tests and inventories reveal These items about students may be collected in a variety of ways and involve autobiographies, case histories, interviews, questionnaires, social case techniques, and staff clinics

The Personal Information Blank

Introduction.—As a starting point for individual analysis, it is frequently necessary to assemble statements from students themselves regarding their plans and choices It is important to know their educational plans, their subject likes and dislikes, the curricula they plan to enter, the type of school for which they are preparing, and the number of years they expect to spend in school Data should be assembled concerning their occupational choices, reasons for these choices, persistence and change in these decisions, home conditions, social background, and much other pertinent information which can be supplied in great part by the student himself

Much essential information is requested of the student at various times in his school career For example, when he applies for admission he is usually required to fill out a blank calling for certain vital statistics At another time he may be asked to

Date 19

PERSONAL INFORMATION FORM

To the Student

The purpose of this blank is to assemble all essential information about you so that our conferences can be devoted entirely to a discussion of your problems You will be asked to take certain psychological tests, but test scores alone will *rarely* be useful in solving your problems The information asked for in the following pages will be very necessary in helping us interpret test results in terms of your specific needs

This information is *strictly confidential,* so please feel free to answer these questions as frankly and as completely as possible

I PERSONAL AND FAMILY HISTORY

Name Sex

Permanent address ,

Date of Birth Place

Father living

{Yes {No Mother living {Yes {No Divorced or Separated {Yes {No

Father's name (and initials)

Address (residence)

Occupation or business

II WHY DO YOU WANT THIS SPECIAL SERVICE FROM THE GUIDANCE STAFF?

Check Here (One or more)

1 I need help in choosing my life vocation
2 I cannot decide between the following vocations

, ,

3 I have decided on as a vocation, but I would like a check-up on my fitness for it
4 I would like to know if I should go to college
5 I am not doing well in my courses
6 I want help in making out my program of studies
7 Other reasons
8 I was referred here by ,

FIG 14a —Personal information form

III WHAT IS YOUR PURPOSE IN ATTENDING THIS SCHOOL?

(Check one or more, or explain below)

Prepare for a vocation	My parents insisted
Without this training there is less chance of getting a job	My friends are all going
The prestige of graduating from this school	Everybody else does
Get more education	Don't know why, "just because"
To make social contacts	Can't get a job

Other explanations

IV HOW DOES YOUR FAMILY FEEL ABOUT YOUR COMING HERE?

Anxious for me to attend
Opposed to my coming
Feel further education is desirable
Want me to take special vocational training

V HOW ABOUT YOUR FINANCIAL CONDITION?

My family pays all my expenses
I must work part time How many hours a week?
I must earn *all money* for my expenses

VI INTERESTS, ACTIVITIES, RECREATIONS

A List in the left-hand column below the three subjects taken in high school (or junior high school) which you liked *best*, and in the other column three subjects that you liked *least*

Liked Best	*Liked Least*

B Specify below the types of activities engaged in at this school, or previous school, and list any offices held

Athletics (what type)
Clubs (kind)
Debate
Dramatics

FIG 14*b* —Personal information form

Journalism
Student Body Government
Others

C What types of books or articles interest you? (Fiction, biography, scientific, poetry, etc)

What magazine do you read most frequently?

VII WORK EXPERIENCES

List in chronological order all your work or employment experiences to date, including part-time and summer jobs

Kind of Work	*Length of Job* (Give year and month)	
	From	*To*

Which of these jobs did you like best?
Why?

VIII OCCUPATIONAL PREFERENCES

A List *in order of preference* five occupations in which you would like to make your living Do not consider abilities or job opportunities Just consider whether or not you would be happy in this work

	Occupation	*Reason for Interest in It*
1		
2		
3		
4		
5		

What is your present vocational choice?
When did you first make this choice? (year)

FIG 14c —Personal information form

Do you have any physical disabilities which would influence your entering certain occupations? Explain

B Occupations can be roughly classified into "Families" based on interest and abilities In the following groupings, indicate in order of preference (*1 2, 3*) the *three groups* in which you *believe* you would *best fit*

Business contacts with people (selling, promotional, politics, etc)

Business detail work (accountant, banker, cashier, office clerk, statistician, stenographer)

Social service activities (Boy Scout executive, minister, personnel director, social case work, teacher, welfare work, Y M C A

Special artistic abilities (actor, artist, designer, interior decorator, musician)

Executive responsibilities (director, foreman, office manager, superintendent)

Technical or scientific work (architect, chemist, engineer, inventor, mechanic, physician, physicist, research worker, scientist, surgeon, toolmaker)

Verbal or linguistic ability (advertising man, author, lawyer, librarian, newspaper man, professor)

IX YOUR ESTIMATE OF YOUR OWN PERSONALITY REACTIONS

Check any of the following words which describe your make-up

Anxious
Bashful
Calm
Capable
Cheerful
Conscientious
Cynical
Depressed
Easily exhausted
Excitable
Friendly
Impetuous
Irritable
Jealous

Nervous
Patient
Persevering
Pessimistic
Quick-tempered
Reserved
Self-confident
Stubborn
Submissive
Tactful
Talented
Tolerant
Unhappy

FIG 14*d*—Personal information form

state his vocational choices and reasons for them Later he may be requested to supply certain information regarding his extracurricular and social interests as well as the degree of his participation in them These bits of information are collected at various times and find their way into different offices or files Some particular problem may then arise necessitating the assembling of all such pertinent information in one place

The Personal Information Form (Figure 14) is convenient for collecting pertinent information on one blank It aids in the problem of helping a student make a vocational choice Variations of this form could be made, however, for other types of problems The information collected from this blank is primarily useful as background data for a more detailed analysis

GUIDANCE VALUES OF THE PERSONAL INFORMATION BLANK 1 This questionnaire saves considerable time in the systematic assembly and logical organization of important facts about each student Data concerning family background, personal goals, interests, hobbies, recreational practices, extracurricular record, work experiences, vocational choices, educational plans, and guidance experiences and needs form a very essential part of the student's cumulative record

2 Fairly large groups can be canvassed simultaneously, thus saving time on routine questions during the counseling interview

3 In the interpretation of these materials, an opportunity is presented to the counselor or teacher to see beyond the collection of miscellaneous facts a meaningful pattern resulting in better insight into that student's needs

CAUTIONS AND LIMITATIONS ASSOCIATED WITH THE USE OF THE PERSONAL INFORMATION BLANK 1 Statements of a nonfactual character should not be taken too literally nor always at face value Children and adolescents do not always see themselves clearly It is sometimes necessary to read between the lines

2 Varying degrees of reliability are to be attributed to different types of information In some instances data may need

to be checked with parents, former teachers, objective records, and the like.

3 The questionnaire should, of course, be designed in format and in the sequence of items to facilitate the transfer of information to the cumulative record

4 Quite a few items will have significance for a limited period only Many changes in interests, attitudes, and preferences come with rapid adolescent growth After a year or two, revisions will be needed

5 The timing of the questionnaire is of some importance If administered too soon after the arrival of a new student, he will not have made his initial adjustment to the school On the other hand the personal information blank can be helpful to the faculty and staff in getting acquainted with the newcomer, and therefore it should be made available fairly early in the first semester of his sojourn in the school Possibly five or six weeks after the opening of school is a fair compromise

Special References

Davis, Frank G (ed) *Pupil Personnel Service* Scranton, Pennsylvania The International Textbook Co, 1948, pp 379–83

Harris, Dale B "Play Activities Blank as a Measure of Delinquency in Boys," *Journal of Abnormal and Social Psychology*, XXXVII (October, 1942), 546–59

Kopel, David "Student Background Inventory," *Educational Administration and Supervision*, XXVIII (October, 1942), 529–35

Mooney, Ross L "Community Differences in the Problems of High-School Students, a Survey of Five Communities by Means of a Problem Check List," *Educational and Psychological Measurement*, III (Summer, 1943), 127–42

Strang, Ruth M *Role of the Teacher in Personnel Work* (rev ed) New York Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1946, pp 414–31, Appendix A

Traxler, Arthur E *Guidance in Public Schools* New York Educational Records Bureau, 1939, pp 22–38.

Teacher Observation, Anecdotal Records, Ratings

Introduction.—There are many ways in which the alert teacher and counselor will collect random observations of students under a variety of circumstances and conditions, in the

classroom, assembly, cafeteria, halls, on the playground, on the street, and in the community Carefully selected incidents which are believed to be representative of the personality and behavior of a given student may be described very briefly and preserved in the home room records or in the central cumulative file Such items are usually called "anecdotal records" and they may include descriptions of either typical or unusual behavior. If a systematic, longitudinal record of observations has been preserved for a given student over a period of time, the resulting cumulative picture is designated an anecdotal behavior journal[2] Observations may be given the semiobjective form of ratings When thoughtfully made on carefully prepared rating scales, such ratings may have considerable validity Obviously the skill and experience of the rater, as well as the validity of the scale, will determine the actual usefulness of the judgments recorded The beginning teacher may be inclined to discard data such as these because they are not strictly objective The role of mature and seasoned judgment in analyzing and treating complex and difficult personal problems is of paramount importance, but such judgments should rest on a foundation of objective data whenever possible

GUIDANCE VALUES OF OBSERVATIONAL RECORDS AND RATINGS 1 Observation of the student in a dynamic social field often provides a more meaningful basis for studying his personal characteristics than an interview under the restricted conditions of an office. Skilfully recorded observations represent the interactions of actual human beings functioning in a normal social environment

2 Anecdotal records indicating changes, up or down, are especially important, particularly if corroborated by independent observations

3 Students may be assigned specific tasks and responsibilities and then carefully observed in their performance These observations may throw valuable light on attitudes and characteristic modes of response to important types of situations

---

[2] L L Jarvie and Mark Ellingson, *Handbook on The Anecdotal Behavior Journal* (Chicago University of Chicago Press, 1940), pp 1–3

How a student will react to difficulty and disappointment may be information of real significance to the counselor

4 These anecdotes and ratings provide a basis for interpreting the individual student to the prospective employer, to his parents, and to the staff of the school.

5 Through systematic observation of student behavior, teachers and counselors become more sensitive to important indicators of character and personality An increased understanding of children and adolescents means greater effectiveness in helping them solve their problems

Cautions and Limitations Associated with the Use of Observational Records and Ratings 1. The time requirement for making anecdotal records for any considerable portion of the students taught by a given teacher will be heavy Where the teaching staff is already seriously overworked, anecdotal records can be requested for exceptional cases only

2 During the period of early experience with these observational records, the teacher may easily drift into emphasizing the negative aspects of behavior Usually more can be gained by recording incidents leading to praise or commendation

3 Teachers and counselors may readily develop the practice of moralizing on the behavior observed and of recording evaluative judgments A relatively objective description of the actual behavior will lead to greater insight and understanding Educational leaders are agreed that the objectives of the public school are best served when the attention of the staff is directed toward assisting every student in all possible ways instead of rendering moral judgments regarding guilt and blame

4 The problem of sampling implied in anecdotal records must be recognized Relatively small incidents are preserved in black and white and may be given exaggerated importance Care must be taken to be certain that the samples of behavior are truly representative

5 There is some danger in dealing with observational data in an atomistic manner Unless the separate incidents are seen as portions of an over-all pattern, they will lose their meaning Psychologically significant behavior must be skilfully selected from the larger mass of observations.

6 Ratings are subject to characteristic errors Usually the average rating for a group will be well above the theoretical mean, indicating a "generosity" factor The number of ratings which are too high may be reduced by wording the descriptions for the upper steps of the rating scale so as to prevent the assignment of a large portion of students to such higher levels If several ratings are assigned to the same student for different traits or characteristics, it is very probable that they will be more alike than is true or valid This is the familiar "halo" effect The halo effect can be minimized by making the characteristics to be rated stand out clearly through careful definitions, and by requiring that everyone be rated on a single scale before any ratings are made on another scale

7. It is important to recall that the observer is revealed almost as clearly as the one being observed in the anecdotal records.

Special References

Arrington, Ruth E "Time Sampling in Studies of Social Behavior," *Psychological Bulletin*, XL (February, 1943), 81–124

Baker, Emily V *Children's Questions and Their Implications for Planning the Curriculum* New York Teachers College, Columbia University, 1945, 172 pp

Brown, M A, and Martin, V "Anecdotal Records of Pupil Behavior," *California Journal of Secondary Education*, XIII (April, 1939), 205–208

Davis, L E "An Experiment in the Training of Teachers for the Rating of Personality Traits," *Bucknell Journal of Education*, XIX (June, 1945), 7–9

Driscoll, G P "Behavior Summary as a Form of Pupil Report," *Teachers College Record*, XLI (November, 1939), 116–23

Hamalainen, Arthur E *Appraisal of Anecdotal Records* Contributions to Education, No 891 New York Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1943, 87 pp

Howie, Duncan "Aspects of Personality in the Classroom A Study of Ratings on Personal Qualities for a Group of School Boys," *British Journal of Psychology*, XXXVI (September, 1945), 15–28

Jackson, Joseph "Relative Effectiveness of Paper-Pencil Test, Interview, and Ratings as Techniques for Personality Evaluation," *Journal of Social Psychology*, XXIII (February, 1946), 35–54

Jarvie, Lawrence L, and Ellingson, Mark *Handbook on the Anecdotal Behavior Journal* Chicago University of Chicago Press, 1940, 67 pp

Johnson, O E "Cumulative Anecdotal Records," *School Executive*, LXI (February, 1942), 28–30

McCormick, C F "Anecdotal Record in the Appraisal of Personality," *School and Society*, LIII (January, 1941), 126–27

Newman, Frances B *Adolescent in Social Groups Studies in the Observation of Personality* Applied Psychology Monographs, No 9 Stanford, Calif Stanford University Press, 1946, 94 pp

Peller, Lili E "Significant Symptoms in the Behavior of Young Children a Check List for Teachers," *Mental Hygiene*, XXX (April, 1946), 285–95

Smith, Helen H "Santa Barbara Behavior Rating Scale," *Journal of Educational Research*, XXXVII (March, 1944), 500–11.

Autobiographies, Diaries, and Personal Documents

Introduction —Personal documents often reveal more about what a student thinks and how he feels about himself and the world in which he lives than he means to tell These documents may take almost any form that permits a reasonable freedom for personal expression They may present a systematized life history, a description of the student's vacation with his family, an account of a summer at the Y M C A camp, a day-to-day log of events with personal reactions, a description of some imaginary exploit, a statement of vocational goals, or just a story

Perhaps the autobiography is most often used by teachers and guidance workers because of its very direct relationship to the inner aspects of the student's life Practices vary from a general assignment, "Write me the story of your life," to a detailed self-analysis form in which several major phases of living are given formal headings in an outline

Guidance Values of Personal Documents 1. The analysis of personal documents, and especially the life history or autobiography, constitutes a kind of projective technique which provides the basis for a rather meaningful personality diagnosis by a highly skilled clinical psychologist.

2 Guidance workers with less specialized training may frequently obtain important clues from a student's autobiography which can be followed with profit to all Likes and dislikes, serious prejudices, strong personal ambitions, frustrations, and conflicts are often revealed quite clearly

3 These documents represent one of the few ways of obtaining a glimpse of the student's general point of view, of his philosophy of life If good rapport is established, the document may

represent a spontaneous outpouring of the deeper aspects of his personal life

4 The systematic picture of major events in his life history may be useful to the teacher or counselor if interpreted with care

5. Writing a personal life history may be revealing to the student himself if he attacks the assignment seriously and tries to portray his feelings, attitudes, and aspirations accurately Thus he may derive a better understanding of himself It is even possible that the autobiography may provide a mild emotional catharsis.

CAUTIONS AND LIMITATIONS ASSOCIATED WITH THE USE OF AUTOBIOGRAPHIES AND OTHER PERSONAL DOCUMENTS

1 Personal documents should be interpreted in conjunction with other independent sources of information about the student The account may be highly fanciful or the student may be deliberately kidding the counselor

2 The autobiography is directly affected by the student's ability to verbalize

3 Certainly these twin questions need to be asked about personal document sources Does the student understand himself and is he willing to tell what he knows? Frequently he reveals more than he realizes or even knows concerning his difficulties and problems, but training and experience are needed to read between the lines with a high degree of validity

4 The findings from personal document sources will of necessity tend to be rather subjective Quantitative measures or objective treatment will be very difficult to obtain.

SPECIAL REFERENCES

ALLPORT, G W. *Use of Personal Documents in Psychological Science.* New York Social Science Research Council, 1942, 210 pp

BAIN, READ "Validity of Life Histories and Diaries," *Journal of Educational Sociology,* III (November, 1929), 150–64

COMBS, ARTHUR W "Comparative Study of Motivations as Revealed in Thematic Apperception Stories and Autobiography," *Journal of Clinical Psychology,* III (January, 1947), 65–75

KELLEY, DOUGLAS M "Autobiographical Study as an Aid to Psychotherapy," *American Journal of Psychiatry*, CII (November, 1945), 375–77
PRESTON, RALPH C "Children's Autobiographies," *Elementary English Review*, XXIII (November, 1946), 306–307
ROTHNEY, JOHN W M, and ROENS, BERT A *Counseling the Individual Student* New York Wm Sloane Associates, 1949, pp 105–26 and 269–72
SELLING, LOWELL S "Autobiography as a Psychiatric Technique," *American Journal of Orthopsychiatry*, II (April, 1932), 162–71
STARR, G G "Evaluation of Student Autobiography as an Aid in the Guidance Program," *Education*, LXIII (September, 1942), 40–47
STRANG, RUTH M *Role of the Teacher in Personnel Work* (rev ed) New York Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1946, pp 369–75 and p 383
SYMONDS, PERCIVAL M "Inventory of Themes in Adolescent Fantasy," *American Journal of Orthopsychiatry*, XV (April, 1945), 318–28
——— "Needs of Teachers as Shown in Autobiographies," *Journal of Educational Research*, XXXVII (May, 1944), 641–55

ACHIEVEMENT AND APTITUDE TESTS

Introduction.—The value of measuring devices as aids to the student in formulating an adequate appraisal of his own strengths and weaknesses was presented in Chapter 5, while the general use of tests in developing the broad framework of guidance was considered in Chapter 11 The discussion in this section will deal chiefly with the application of achievement and aptitude tests to diagnosing the difficulties and problems of the individual student and to predicting the relative degree of success he may expect to attain in various fields of activity.

A number of psychologists and guidance workers have been concerned about the appropriate procedure for introducing a discussion of test results into the counseling interview An attempt to evaluate the counselee in terms of scores may interfere with the rapport between counselor and student It may tend to put the counselee on the defensive and destroy whatever degree of client-centeredness the conference may have had The possible effects upon his mental hygiene of informing the student of low test scores is a source of genuine concern to the sincere counselor Another problem is related to the degree to which the counselor's judgment should be permitted to influence the interpretation of test scores.

One plan for interpreting test scores in the counseling inter-

view was suggested by R H and V. H. Bixler,[3] who advise the counselor to do the following

1 Give the client simple statistical predictions based upon the test data

2 Allow the client to evaluate the prediction as it applies to himself

3 Remain neutral toward test data and the client's reaction

4 Facilitate the client's self-evaluation and subsequent decisions by the use of therapeutic procedures

5 Avoid persuasive methods Test data should provide motivation—not the counselor

GUIDANCE VALUES OF ACHIEVEMENT AND APTITUDE TESTS 1 These measuring devices furnish a tangible basis for comparing individuals and for comparing a given individual with a designated group. The tests yield specific responses to a carefully selected sampling of questions These reactions may be compared with those of a defined population

2 The test scores provide a standard or semiconstant frame of reference in approximately objective form. Judgments made within this guiding framework will have reduced subjectivity Interpretations of test status tend to have some permanency of meaning and application

3 Achievement test scores measure competencies in areas important to educational and vocational guidance

a) They indicate capacities to learn by affording evidence of how much has been learned

b) They offer diagnostic information on weaknesses which may block success until remedial work has been done Underachievers and overachievers may be studied (See chapters 9 and 11)

c) They reveal the conditions required for success in further educational effort

d) They present a tangible basis for vocational choice

4. Aptitude test scores make possible the prediction of future successes and failures Aptitude tests measure a rather broad type of achievement, much of which may have been acquired

[3] Ray H Bixler and V H Bixler, "Test Interpretation in Vocational Counseling," *Educational and Psychological Measurement*, VI (Spring, 1946), p 155

apart from systematic study So-called achievement tests deal primarily with the outcomes of learning under a definitely planned curriculum Aptitude tests require the assumption that all who take the test must have had an equivalent opportunity to learn the answers to the questions The inference follows that higher scores are associated with greater capacity to learn and to succeed in the field of activity being sampled Aptitude measures, such as the scholastic aptitude (intelligence) tests, provide data for discovering specific learning difficulties and for assisting the student to overcome these weaknesses, if possible, or in adjusting to them if they prove to be irremediable.

5. Achievement and aptitude tests provide a basis for staff decisions regarding admission to schools or curricula, promotions, or selection for positions of responsibility

CAUTIONS AND LIMITATIONS ASSOCIATED WITH THE USE OF ACHIEVEMENT AND APTITUDE TESTS IN STUDYING THE INDIVIDUAL 1 A measuring instrument must be more reliable when interpreted for an individual score than when employed as a group measure Truman Lee Kelley has suggested that a reliability coefficient of 50 would be needed for the adequate measurement of the average of a group in a specific subject and for an estimate of future group promise. To produce an equivalent dependability in the measurement of an individual and to predict his future success as accurately for a specific curricular area would require a test reliability of 94[4] Which tests possess the required reliability may be ascertained by consulting Buros' *Third Mental Measurements Yearbook*[5]

2 The validity of a test is specific and relative to the uses to which the instrument is to be put Validity with respect to the prediction of vocational success has been very inadequately demonstrated for most aptitude tests The criterion most frequently employed has been the successful completion of preparatory study Certainly this information is better than nothing If a student faces low probability of admission to medical

---

[4] Truman L Kelley, *Interpretation of Educational Measurements* (Yonkers, N Y World Book Company, 1927), pp 28–29

[5] Oscar K Buros, *Third Mental Measurements Yearbook* (New Brunswick, N J Rutgers University Press, 1949), 1047 pp

school or of obtaining satisfactory grades therein, it is foolish to discuss his chances of serving as a successful physician Too little empirical evidence on test validity has been obtained The evidence available in the literature relates almost exclusively to discriminating between criterion groups, and it does not prove that the instrument can separate successful and unsuccessful individuals [6]

3 Norms cannot always be compared from one test to another The standardizing samples are frequently very different from one another and from the group to which the counselee could reasonably be said to belong Such differences in the meaning of norms make comparisons in the form of profiles or psychographs difficult to validate, since test publishers are often remiss in furnishing sufficiently detailed information about the groups on which the norms were determined Large educational units may develop their own norms.

4 Failure may be predicted more accurately than success This principle follows logically from the fact that the abilities measured may be necessary for success, but seldom if ever sufficient to guarantee success

5 Test data must be interpreted in proper relationship to other sources of information The analysis of test scores for the individual counselee requires a high order of skill and technical knowledge. Such objective data must be used as aids to judgment rather than as substitutes for judgment

6 It is highly important to make correct allowance for the errors of measurement in interpreting the results of measurement No score can be truthfully regarded as a point on a scale Every individual's score stands for a zone extending for a considerable distance on each side of the actual score. The width of this zone varies inversely with the reliability of the test For example, if a student received a score of 85 on a test, and if the standard error of measurement for that test were 6 points, then the chances are two out of three that an alternate form of the test would produce a score somewhere between 79 and 91. The

---

[6] Harold A Edgerton, "Place of Measuring Instruments in Guidance," in *Measurement of Student Adjustment and Achievement* (Ann Arbor University of Michigan Press, 1949), pp 52–55

chances are one out of three that score on an alternate form of the test would fall outside the range, 79 to 91.

7 Data apart from a longitudinal perspective may yield false clues A single test score does not show any trend, the student may be improving or deteriorating in the ability being measured

8 Throughout the discussion of test results the counselee should receive the impression that the measuring instruments available today possess definite values, but that a valid interpretation can only be made within the limitations of numerous qualifying conditions and factors

Special References

Bailey, H W, Gilbert, William M, and Berg, Irwin A "Counseling and the Use of Tests in the Student Personnel Bureau at the University of Illinois," *Educational and Psychological Measurement,* VI (Spring, 1946), 37–60

Bixler, Ray H, and Bixler, Virginia H "Test Interpretation in Vocational Counseling," *Educational and Psychological Measurement,* VI (Spring, 1946), 145–155.

Blackwell, Ernestine B "An Evaluation of the Immediate Effectiveness of the Testing and Guidance Bureau of the University of Texas," *Journal of Educational Research,* XL (December, 1946), 302–308

Donahue, Wilma T, Coombs, Clyde H, and Travers, Robert M W. (eds) *Measurement of Student Adjustment and Achievement* Ann Arbor University of Michigan Press, 1949, 256 pp

Goodman, Charles S "Prediction of College Success by Means of Thurstone's Primary Abilities Tests," *Educational and Psychological Measurement,* IV (Summer, 1944), 125–40

Kelley, Truman L *Interpretation of Educational Measurements* Yonkers, N Y World Book Company, 1927, 363 pp

Kirkendall, Lester A "Pitfalls in the Use of Tests," *Occupations,* XXI (January, 1943), 384–88

National Society for the Study of Education *Measurement of Understanding* Forty-fifth Yearbook, Part I Chicago University of Chicago Press, 1946, 338 pp

Pace, C Robert "Test Relating Educational Theory and Practice," *Journal of Educational Research,* XXXVIII (September, 1944), 9–17

Paterson, Donald G, Schneidler, G G, and Williamson, E G *Student Guidance Techniques* New York McGraw-Hill Book Co, 1938, 316 pp

Rogers, Carl R "Psychometric Tests and Client-Centered Counseling," *Educational and Psychological Measurement,* VI (Spring, 1946), 139–44

Stewart, Naomi "A G C T Scores of Army Personnel Grouped by Occupation," *Occupations,* XXVI (October, 1947), 3–41.

Super, Donald E *Sourcebook for Vocational Testing* New York Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1946, 360 pp

TRAXLER, ARTHUR R "Evaluation of Methods of Individual Appraisal in Counseling," *Occupations*, XXVI (November, 1947), 85–91
WRENN, C GILBERT "Guidance Movement" in *Measurement of Student Adjustment and Achievement* Ann Arbor University of Michigan Press, 1949, pp 3–20

ADJUSTMENT INVENTORIES

Introduction.—The adjustment inventory or personality questionnaire is defined by the *Dictionary of Education* [7] as "a test form in which the individual answers questions concerning his likes, dislikes, beliefs, attitudes, and physical complaints, the answers being considered as reflecting various aspects of the individual's personality" Representative examples of such inventories are listed in Chapter 11.

GUIDANCE VALUES OF ADJUSTMENT INVENTORIES 1. Sincere and thoughtful responses by the counselee to the items on the inventory or questionnaire provide an opportunity for self-appraisal through comparison with typical responses to the same items by certain defined groups

2 The pattern of scores resulting from applying the adjustment inventory to an individual student serves as a screening device for selecting those needing intensive diagnosis and treatment

3. The items of an adjustment inventory may serve as a guide for helpful discussion during a counseling interview Certain key questions may be followed through by the counselor to obtain a deeper insight into the counselee's attitudes and problems A careful study of a student's responses to particular items may serve as a valuable means of in-service training for the teaching staff

4 Responses to particular items may be indicators favorable or unfavorable to success in certain vocational areas. For example, if the student indicates that he is reluctant to take an active part in group activities, success in a number of occupations would appear to be less probable The possibility of change in the counselee's attitudes must of course be considered

---

[7] Carter V Good (ed), *Dictionary of Education* (New York McGraw-Hill Book Company, 1945), p 324

5 Perhaps the really important value for guidance in the particular responses made lies not so much in the basic truthfulness of the response as it does in the fact that the reply to the question represents how the counselee thinks and feels about himself

CAUTIONS AND LIMITATIONS ASSOCIATED WITH THE USE OF ADJUSTMENT INVENTORIES 1 The counselee may not know the answer to questions relating to his attitudes, basic dynamics, emotional content, personal bias, etc He may even have a badly distorted picture of himself Many clinical workers believe that the more important aspects of personality are not clearly and correctly seen by the subject himself.

2 The counselee may not choose to reveal his own ideas about himself through sincere and honest answers to the questions put by the test If the counselee is sincere in his desire to be helped, greater confidence can be placed [illegible] his responses within the limitations of his [illegible] reason rapport with the student group is highly important

3 Basic information concerning the validity of these instruments is still rather rare More longitudinal data are needed to show the relationship of responses to particular items to the developmental history of the subject It seems likely that the validity of results is greater for groups than for individuals

4 The frequent limitation of the choice of responses to "yes," "no" or "?" may not provide an adequate opportunity for the subject to represent his true attitude on a given item. The complexity of human personality may be such that two categories are insufficient for valid statements

5 Responses to certain items may reflect a transient mood The possibility of a legitimate shift in total score must be kept in mind This caution applies as well to all types of tests

6 The assumption required by the test is that the items mean the same to all who take the test Some fairly normal persons may be overly meticulous in answering items, they may give what are usually considered unfavorable or problem responses Whether the unfavorable response should be interpreted in the prescribed manner for such exceptionally conscientious subjects is a moot question.

7. Questionnaires of the adjustment inventory type tend to be somewhat atomistic For a useful interpretation, broad patterns of meaning must be sought among the responses given by the counselee Particular items which suggest clues to frustrations, conflicts, problems, and needs should be used as the basis for a follow-up interview They should also be related to every other datum available concerning the student In this way the items do not stand as isolated phenomena but tend to become associated with the dynamics of behavior.

Special References

Crook, M N "Retest with the Thurstone Personality Schedule After Six and One-Half Years," *Journal of General Psychology*, XXVIII (January, 1943), 111–20

Damrin, Dora E "Study of the Truthfulness with Which High-School Girls Answer Personality Tests of the Questionnaire Type," *Journal of Educational Psychology*, XXXVIII (April, 1947), 223–31

Ellis, Albert "Validity of Personality Questionnaires," *Psychological Bulletin*, XLIII (September, 1946), 385–440

Gordon, Hans C, and Davidoff, Philip "Honesty of Pupils in Answering Adjustment Questionnaires," *School and Society*, LVII (January 9, 1943), 54–56

Gough, Harrison G. "Diagnostic Patterns on the Minnesota Multiphasic Personality Inventory," *Journal of Clinical Psychology*, II (January, 1946), 23–37

Harmon, Lindsey R, and Wiener, Daniel N "Use of the Minnesota Multiphasic Personality Inventory in Vocational Advisement," *Journal of Applied Psychology*, XXIX (April, 1945), 132–41

Lough, O M "Teachers College Students and the Minnesota Multiphasic Personality Inventory," *Journal of Applied Psychology*, XXX (June, 1946), 241–47

Rashkis, Harold A, and Shaskan, Donald A "Effects of Group Psychotherapy on Personality Inventory Scores," *American Journal of Orthopsychiatry*, XVI (April, 1946), 345–49

Sociometric Techniques

Introduction.—"The sociometric approach involves using children's spontaneous choices as an index for arranging interpersonal relations in the classroom." [8] The members of a student group, such as a classroom, state their preferences for other

[8] Helen H Jennings, *Sociometry in Group Relations, a Work Guide for Teachers* (Washington, D C American Council on Education, 1948), p 66

members of the group as team mates, seat mates, partners in work activities, leaders of the group, and similar positions implying personal relationships Diagrams called "sociograms" may be plotted which clearly show in graphic form the structure of the social pattern within the group The sociogram reveals who chose whom Leaders are indicated by an exceptional number of choices, isolates, by the failure to be chosen Mutual choices, intersexual choices, and the presence of cliques are also revealed in this manner

Devices of a similar character include the Guess Who test which leads students to nominate other students who appear to be characterized by the descriptions of behavior and personality presented in the test Measures of social status are employed to study the relationship of economic position and social prestige in the community to personal adjustment and school success

GUIDANCE VALUES OF SOCIOMETRIC TECHNIQUES 1 The construction of a sociogram increases the teacher's understanding of the interpersonal relationships operating in the classroom Important mental hygiene problems are frequently uncovered The student who is not selected by any member of his class or group unquestionably needs help Possibly even the "star," who seems to receive the good will and attention of a large portion of the class, may require mental hygiene attention

2 Participation in the selection of classmates for the class sociogram may well develop some skill on the part of the student in analyzing the personalities and social qualities of others.

3 Sociometry is valuable for the light it throws on the group social structure and on the changes that take place in that structure from time to time An understanding of group dynamics tends to foster democratic classroom procedures.

4 A careful study of the sociogram may reveal important clues regarding the presence and effect of cliques and rival factions within the class group

5 Wholesome intercultural and intergroup relationships may be fostered through the insight gained by the use of sociometric techniques

6 Social status indexes may produce valuable data on factors affecting vocational choice. They may frequently be helpful

to the classroom teacher in understanding the environment of the students

CAUTIONS AND LIMITATIONS ASSOCIATED WITH THE USE OF SOCIOMETRIC TECHNIQUES 1 For valid sociometric data, the atmosphere of the school and the classroom must encourage free and meaningful choices

2 The choices must be real and not artificial If possible, some actual changes in classroom arrangement or procedure should be made, based on the choices given Otherwise the theoretical nature of the sociometric experience will become apparent and student response will cease to be sincere

3 The comparison of sociometric data from class to class or from school to school may not be highly valid Additional research is needed on this point.

SPECIAL REFERENCES

ATTERBURY, G P "Psychodrama as an Instrument for Diagnostic Testing," *Sociometry,* VIII (January, 1945), 79–81

BONNEY, MERL E "Personality Traits of Socially Successful and Socially Unsuccessful Children," *Journal of Educational Psychology,* XXXIV (November, 1943), 449–72

——— *Popular and Unpopular Children, a Sociometric Study* Sociometry Monographs, No 9 New York Beacon House, 1947, 81 pp

——— "Sociometric Study of the Relationship of Some Factors to Mutual Friendships on the Elementary, Secondary, and College Levels," *Sociometry,* IX (February, 1946), 21–47

——— "Study of the Sociometric Process Among Sixth Grade Children," *Journal of Educational Psychology,* XXXVII (September, 1946), 359–72

COMMISSION ON TEACHER EDUCATION *Helping Teachers Understand Children.* Washington, D C · American Council on Education, 1945, pp 275–361

COOK, LLOYD ALLEN "Experimental Sociographic Study of a Stratified 10th Grade Class," *American Sociological Review,* X (April, 1945), 250–61

DOLL, EDGAR A "Influence of Environment and Etiology on Social Competence," *American Journal of Mental Deficiency,* L (1945), 89–94

GOODSPEED, ELIZABETH J "Use of Psychodrama in the Vocational Guidance of Eighth Grade Boys," *Sociatry,* II (December-March, 1948), 268–80

HAVIGHURST, ROBERT J "Child Development in Relation to Community Social Structure," *Child Development,* XVII (March, 1946), 85–89.

HOWARD, GERTRUDE, TAFT, CHESTER A, CRALLE, ROBERT E, and HAAS, ROBERT B "Inglewood Project for Evaluating Pupil's Social Skills," *Sociatry,* II (December-March, 1948), 254–67

JENNINGS, HELEN H *Sociometry in Group Relations* Washington, D C · American Council on Education, 1948, 85 pp

JENNINGS, HELEN H Sociometry of Leadership *Sociometry Monographs* No 14 New York Beacon House, 1947, 28 pp
JACOBSON, WILHELMINA E "First Impressions of Classmates," *Journal of Applied Psychology*, XXIX (April, 1945), 142-55
KUHLEN, RAYMOND G, and BRETSCH, HOWARD S "Sociometric Status and Personal Problems of Adolescents," *Sociometry*, X (May, 1947), 122-32
MORENO, JACOB L *Who Shall Survive?* Washington, D C Nervous and Mental Disease Publishing Co, 1934, 440 pp
NORTHWAY, MARY L "Outsiders A Study of the Personality Patterns of Children Least Acceptable to Their Age Mates," *Sociometry*, VII (February, 1944), 10-25
——— "Personality and Sociometric Status, a Review of the Toronto Studies," *Sociometry*, IX (May, 1946), 233-41
——— "Sociometry and Some Challenging Problems of Social Relationships," *Sociometry*, IX (May, 1946), 187-98
OLSON, WILLARD C "Improvement of Human Relations in the Classroom," *Childhood Education*, XXII (March, 1946) 317-25
PEPINSKY, PAULINE N "Meaning of 'Validity' and 'Reliability' as Applied to Sociometric Tests," *Educational and Psychological Measurement*, IX (Spring, 1949), 39-50
TABA, HILDA "School Culture and Group Life," *Journal of Educational Sociology*, XXI (May, 1948), 497-560
WEITZMAN, ELLIS "Study of Social Maturity in Persons Sixteen Through Twenty-four Years of Age," *Pedagogical Seminary and Journal of Genetic Psychology*, LXIV (March, 1944), 37-66
ZELIGS, ROSE "Social Factors Annoying to Children," *Journal of Applied Psychology*, XXIX (February, 1945), 75-82

PROJECTIVE TECHNIQUES

Introduction.—Among the most powerful of the instruments so far devised for understanding personality are the so-called projective techniques. In a fundamental sense of the term, every instance of human behavior represents a "projection" of the personality of the actor, that is, a sufficiently skilled observer could learn much from a study of any phase of behavior Almost any creative product could be employed as a projective test if a sufficiently detailed analysis could be made Certain partially structured situations like ink blots, incomplete pictures, cartoons, and the like have proved to be most useful for the purpose of obtaining an insight into the dynamics of behavior. Rosenzweig states,[9]

[9] Saul Rosenzweig, *Psychodiagnosis* (New York Grune & Stratton, 1949), p 108

> The projective methods attempt to probe the inner content and organization of the individual personality by eliciting spontaneous reactions to stimulus materials that are themselves ambiguous, equivocal, or in some other sense only partially structured

The *Dictionary of Education* includes as part of a definition the statement.

> The individual is alleged to reveal himself by what he projects into his creation or interpretation, and thus often involuntarily to show attitudes, reactions, etc that he normally would conceal [10]

Examples of projective techniques include the *Thematic Apperception Test* This consists of a series of pictures presented one at a time to the subject, who is requested to tell a story about each These narratives apparently reveal frustrations, needs, and certain characteristics of personality A number of word-association tests require a free response from the subject after each stimulus word is pronounced The significance of various types of response has not been fully determined. An interesting variety of projective instrument asks the subject to complete sentences such as, "my father used to ——— if my mother ———" Attitudes of considerable psychological import are frequently revealed in the final endings supplied

The most famous of the projective devices is the Rorschach ink-blot test Ten cards, each containing an ink blot, a few of which contain colors, are presented The subject tells what he sees and where in the ink blot he perceives the object Elaborate scoring plans have been developed, and hundreds of research studies have been conducted based on this test. Greater progress has been made with the Rorschach test than with any other projective device

GUIDANCE VALUES OF PROJECTIVE TECHNIQUES 1 Many experienced clinical workers believe that certain projective tests can reveal deep-seated characteristics of personality not recognized nor understood by the counselee himself Since the subject indicates more than he realizes about himself, he is unlikely to be able to control the picture he presents to the counselor

[10] Carter V Good, *Dictionary of Education* (New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1945), pp 314–15

2 The projective test aids the experienced psychologist in understanding the dynamics of behavior, and it also furnishes numerous clues to the nature of personality development

3 Projective techniques may be used as screening devices to aid in locating maladjusted persons who need counsel or therapy

4 These techniques may be employed to predict the outcomes of psychotherapy Considerable care and experience are required to make reasonably accurate predictions

5 Projective tests like the Rorschach have discriminated between successful and unsuccessful student groups [11]

6 Projective tests are thought to present less of a threat to the inner security of a maladjusted person than a personality questionnaire (adjustment inventory)

CAUTIONS AND LIMITATIONS ASSOCIATED WITH THE USE OF PROJECTIVE TECHNIQUES. 1. The use of projective techniques should be restricted to those who have acquired considerable theoretical background in clinical psychology and who have had special training in the administration and interpretation of such tests

2 Much depends on the skill of the examiner, since mature judgments are frequently required during the application of a projective test The classroom teacher and counselor need to know that such measures exist and what they mean in a general way, but they should not undertake to administer them On the other hand it is important for teachers and counselors to be able to follow the interpretations prepared by clinicians after these tests have been scored

3 Much more work needs to be done in the standardizing of projective devices and in determining their validity and reliability.

4 The data available at present seem to indicate a limited value for vocational guidance. Further research on the predictive values of projective tests is necessary, however, before a definite judgment can be made on this point

[11] Ruth L Munroe, "Prediction of the Adjustment and Academic Performance of College Students by a Modification of the Rorschach Method," *Psychological Monographs*, No 7 (1945), 104 pp

SPECIAL REFERENCES

BOLGAR, HEDDA, and FISCHER, LISELOTTE K "Personality Projection in the World Test," *American Journal of Orthopsychiatry*, XVII (January, 1947), 117–28

BRICK, MARIA "Mental Hygiene Value of Children's Art Work," *American Journal of Orthopsychiatry*, XIV (January, 1944), 136–46

BUHLER, CHARLOTTE B, BUHLER, KARL, and LEFEVER, D WELTY *Development of the Basic Rorschach Score with a Manual of Directions* Rorschach Standardization Studies, No 1 Los Angeles Charlotte Buhler, 1948, 200 pp

CATTELL, RAYMOND B "Projection and the Design of Projective Tests of Personality," *Character and Personality*, XII (March, 1944), 175–94

COWIN, MARION "Use of the Rorschach in Schools," *Rorschach Research Exchange*, IX (September, 1945), 130–33

FANTEL, ERNEST, and SHNEIDMAN, EDWIN S "Psychodrama and the Make a Picture Story (MAPS) Test," *Rorschach Research Exchange*, XI (Nos 2, 3, 4, 1947), 42–67

FORD, MARY E N *Application of the Rorschach Test to Young Children* Institute of Child Welfare, Monograph Series, No 23 Minneapolis University of Minnesota Press, 1946, 114 pp

FRANK, LAWRENCE K *Projective Methods* Springfield, Ill Chas C Thomas, 1948, 96 pp

FRENKEL-BRUNSWIK, ELSE "Dynamic and Cognitive Categorization of Qualitative Material I General Problems and the Thematic Apperception Test," *Journal of Psychology*, XXV (April, 1948), 253–60

HENRY, WILLIAM E "Thematic Apperception Technique in the Study of Culture-Personality Relations," *Genetic Psychology Monographs*, XXXV (February, 1947), 3–135

KABACK, GOLDIE RUTH *Vocational Personalities An Application of the Rorschach Group Method* Contributions to Education, No 924 New York Teachers College, Columbia University, 1946, 116 pp

KLOPFER, BRUNO, and KELLEY, D M *Rorschach Technique* Yonkers, N Y World Book Co, 1942, 436 pp

KRUGMAN, M "Rorschach in Child Guidance," *Journal of Consulting Psychology*, VII (1943), 80–88

MUNROE, RUTH L *Prediction of the Adjustment and Academic Performance of College Students by a Modification of the Rorschach Method* Applied Psychology Monographs, No 7 Stanford, California Stanford University Press, 1945, 104 pp

MURRAY, H A, *et al* *Explorations in Personality* New York Oxford University Press, 1938, 761 pp

ROSENZWEIG, SAUL "Picture-association Method and its Application in a Study of Reactions to Frustrations," *Journal of Personality*, XIV (September, 1945), 3–23

——— *Psychodiagnosis* New York Grune & Stratton, 1949, 380 pp

ROSENZWEIG, SAUL, and ISHAM, A G "Complementary Thematic Apperception Test Patterns in Close Kin," *American Journal of Orthopsychiatry*, XVII (January, 1947), 129–42

ROTTER, JULIAN B "Thematic Apperception Tests Suggestions for Administration and Interpretation," *Journal of Personality*, XV (1946), 70–92

STOUGHTON, M LOUISE, and RAY, ALICE M "Study of Children's Heroes and Ideals," *Journal of Experimental Education*, XV (December, 1946), 156–60

SYMONDS, PERCIVAL M "Inventory of Themes in Adolescent Fantasy," *American Journal of Orthopsychiatry*, XV (1945), 318–28

THE INTERVIEW

Introduction.—Many writers in the field of counseling agree that interviewing is the most commonly used and possibly the most essential tool for skilful counsel Rothney and Roens classify the types of interview according to purpose, which may be (1) to get acquainted, (2) to supplement the data already in the files by obtaining additional facts or by clarifying old data, (3) to make an appraisal of the subject's achievements, attitudes, opinions, etc , (4) to make available to the student various useful bits of information, facts, rules, test scores, interpretations of existing situations, and the like, (5) to administer therapy that will aid the counselee in solving his problems [12]

Interview techniques are frequently classified into directive and nondirective In the former, the interview follows a definite plan developed by the counselor in harmony with his concept regarding the needs of the student The latter is client-centered It explores the counselee's interests, problems, and feelings, and endeavors to lead him to an understanding of himself and his difficulties so that he can achieve greater maturity with respect not only to the immediate problem but also to future problems

GUIDANCE VALUES OF THE INTERVIEW 1 Many students feel the urge to talk over ideas, plans, problems, achievements, and personal philosophies with an informed, intelligent, and sympathetic adult listener

2 Interviews may be needed to provide the counselor with the additional data with which to assist the student in meeting his problems and obligations

3. The interview offers certain definite advantages over the questionnaire or check list as a device for obtaining personal information

[12] John W M Rothney and Bert A Roens, *Counseling the Individual Student* (New York William Sloane Associates, Inc , 1949), pp 130–64

a) Questions may be explained, and, when necessary, supplementary questions may be put in order to clarify earlier replies

b) Responses to questions implying certain possible emotional concomitants may be more valid by interview under conditions of good rapport

c) The student may be observed while making his responses

d) Much greater flexibility and naturalness of approach are possible The interview can be tailor-made by the expert counselor to meet the requirements of a given situation

4 The interview is an important tool in follow-up studies when an effort is made to obtain a true cross-sectional sampling of graduates or dropouts

CAUTIONS AND LIMITATIONS ASSOCIATED WITH THE INTERVIEW. 1. Interviews frequently possess little or no plan or purpose. They sometimes become friendly chats that lead nowhere

2. A permissive atmosphere in which the counselee is completely accepted is essential to rapport. Attitudes expressed or implied by the counselor may have an undue effect on the responses of the student. The interviewer may appear to be very serious and difficult to approach. On the other hand, he may seem to take the problems of the counselee too lightly

3 Too much or too obvious notetaking may interfere with rapport

4. Interviewers very often talk too much Good listeners are somewhat rare When the counselor plans the interview throughout and dominates its direction, the student's real problem seldom comes to the surface.

5 The apparent problem initially presented at the first interview may not indicate the central area of difficulty or even be remotely related to it. Relatively simple superficial problems may mask the real issues The emotional set of the counselee may obscure or falsify the basic facts

6 Some schools lack the essential facilities for successful counseling interviews, viz, an appropriate location that is private and not unattractive

SPECIAL REFERENCES

BINGHAM, WALTER V, and MOORE, BRUCE V *How to Interview* (3d ed) New York Harper & Bros, 1941, 263 pp

CHILD, IRVIN L "Use of Interview Data in Qualifying the Individual's Role in the Group," *Journal of Abnormal and Social Psychology*, XXXVIII (July, 1943), 305–18

FENTON, NORMAN *Counselor's Interview with the Student* Stanford, Calif Stanford University Press, 1943, 36 pp

GARDNER, GEORGE E, and WOLTMAN, KENNETH I "Activity Interview in the Study of Delinquency," *American Journal of Orthopsychiatry*, XI (January, 1941), 143–49

HAMRIN, SHIRLEY A "Interviewing Techniques" in *Basic Text for Guidance Workers* Clifford E Erickson (ed) New York Prentice-Hall, Inc., 1947, pp 121–44

HARVEY, S M "Preliminary Study of the Interview," *British Journal of Psychology*, XXVIII (1938), 263–87

HILL, MOZELL C, and ACKISS, THELMA D "'Insight Interview' Approach to Race Relations," *Journal of Social Psychology*, XXI (May, 1945), 197–208

PEPINSKY, HAROLD B "Application of Informal Projective Methods in the Counseling Interview," *Educational and Psychological Measurement*, VII (Spring, 1942), 209–16

——— "Application of Informal Projective Methods in the Counseling Interview," *Educational and Psychological Measurement*, VII (Spring, 1947), 135–40

PORTER, ELIAS H, JR "Development and Evaluation of a Measure of Counseling Interview Procedures Part I. The Development," *Educational and Psychological Measurement*, III (Autumn, 1943), 215–38.

THE CASE STUDY

Introduction.—The case study represents one of the major strategies of guidance It may be defined as a technique or method of bringing together all pertinent information about a student in forming a unified background for interpreting his needs and treating his difficulties Needs and difficulties should be broadly conceived, even the best adjusted students have definite needs and encounter difficulties in connection with their class and extraclass work

A case history, therefore, would be useful for every student in the school If such were available, we would have rather complete information concerning the "whole" individual. Such in-

formation would assist teachers in becoming aware of student needs, facilitate remedial instruction, and reveal facts that would call forth sympathy instead of apathy and indifference

Case studies, however, cannot be made for all the students in most secondary schools Lack of time, if nothing else, will prevent it But time is not the only limiting factor Most teachers are not prepared to make case studies Adequate training for this technique is required Data must be complete within the scope determined for the study *The misuse of confidential information must also be prevented*

Case studies are of two kinds those made for ordinary students and those developed for the seriously maladjusted The first of these can, and should, be compiled by properly prepared teachers, the second should be reserved for the guidance expert It has been suggested earlier that the kind of information revealed by the case study will be most useful to teachers working with the core curriculum Although it is possible that case studies prepared by someone else may be used by these teachers, it is recommended that they personally prepare five or six case studies each semester This may seem like a small beginning However, when carried over a period of years, such a practice offers numerous opportunities for developing diagnostic treatment and follow-up techniques The teacher will thus be provided with a much needed but often neglected check on the efficiency of his instruction

The question may arise as to which five or six students should be selected for such special investigation The teacher might well apply the technique of five-point classification described in Chapter 9, and work first with those students who are most poorly adjusted

Before undertaking a case study, the teacher should be certain that his training in psychology and sociology is sufficient for an understanding of the data which he will assemble He should also realize that he is being trusted with confidential information, and he should not allow such data to prejudice him against a student, no matter what may be revealed Teachers who may be unprepared or unreliable in these respects should neither teach in core experience areas nor attempt to do case work. In

any event, the case studies produced should not be too time-consuming or involved)

For modest case studies of ordinary students, the following outline is proposed.

1 *General Information*
 a) Name
 b) Date of birth
 c) Place of birth
 d) Address
 e) Name of parents
 f) Occupation of parents
 g) Nationality of parents

2. *Test Data*
 a) Intelligence
 b) Achievement
 c) Aptitude
 d) Personality and temperament
 e) Interest

3. *Health*
 a) Physical
 b) Mental

4 *Scholarship*
 a) Scholastic record
 b) Promotions
 c) Changes in schools
 d) Types of schools attended

5 *Home Conditions*
 a) Social and economic status
 b) General atmosphere of the home
 c) Pupil's attitude toward his home

6 *Social Relations*
 a) Companions and friends
 b) Relations with teachers
 c) Extracurricular activities

- *d*) Out-of-school activities
- *e*) Use of leisure time

7. *Interests*
   - *a*) Educational and vocational plans
   - *b*) Avocational interests
   - *c*) Changes in interests
   - *d*) Curriculum in which enrolled

8. *Copy of Student's Daily Schedule*

Most of the data called for in the above outline can be obtained from the permanent cumulative record which is suggested in Chapter 12 The foregoing case study plan furnishes a good reason for keeping complete student records and for recording only such data as will actually be used To secure information for (5) above, home visitations are recommended *if such visits are welcomed* In cases where visits are not feasible, the student will usually volunteer a certain amount of the needed information during an interview

GUIDANCE VALUES OF THE CASE STUDY 1 The case summary represents the over-all pattern produced by assembling, correlating, and integrating the data obtained from the sources and by means of the techniques described earlier in the chapter

2 The case study provides the basis for a meaningful interpretation of the problems and difficulties of the counselee Unless an effort is made to see the student as a living person in a total social field, counseling will necessarily be piecemeal and narrow

3 The over-all summary will to some degree counteract the shortcomings of the analytical devices already discussed The atomistic effects of these techniques may be partially offset.

4 The attention to the counselee of his teachers and the counseling staff will be more sharply focused on the critical features of the situation

5 The thoughtful collecting and interpreting of case materials provides an opportunity to study the dynamics of personal development, to learn to recognize the inner springs of behavior

CAUTIONS AND LIMITATIONS ASSOCIATED WITH THE USE OF THE CASE STUDY IN GUIDANCE 1 Hasty conclusions sometimes appear very attractive to a counselor who is hard pressed by a busy schedule The temptation is constantly present to find in the case materials too simple a pattern of cause and effect The real causal relationships are likely to be difficult if not impossible to determine

2 It is easy to assume that after a period of careful, painstaking search the essential facts in the case have been uncovered This conclusion all too frequently leads to oversimplification

3 There is danger of interpreting a case study without adequate consideration for the basic cultural and environmental influences that provide the fundamental conditions for behavior and growth Each case needs to be examined within the individual's social frame of reference

SPECIAL REFERENCES

BALLER, WARREN R "Case-Study Techniques" in *Basic Text for Guidance Workers* Clifford E Erickson (ed) New York Prentice-Hall, Inc, 1947, pp 87–120

——— *Case of Mickey Murphy* Lincoln University of Nebraska Press, 1943, test and manual

BERDIE, RALPH F "Counseling—An Educational Technique," *Educational and Psychological Measurement,* IX (Spring, 1949), 89–94

BERELSON, BERNARD "Quantitative Analysis of Case Records," *Psychiatry,* X (November, 1947), 395–403

BORDIN, EDWARD S "Diagnosis in Counseling and Psychotherapy," *Educational and Psychological Measurement,* VI (Summer, 1946), 169–84

COMBS, ARTHUR W "Follow-up of a Counseling Case Treated by the Non-directive Method," *Journal of Clinical Psychology,* I (April, 1945), 147–54

COMMISSION ON TEACHER EDUCATION *Helping Teachers Understand Children* Washington, D C American Council on Education, 1945, 468 pp

CURRAN, CHARLES A. *Personality Factors in Counseling* New York Grune & Stratton, 1945, 287 pp

HAHN, MILTON E, and KENDALL, WILLIAM E "Some Comments in Defense of 'Non-Directive' Counseling," *Journal of Consulting Psychology,* XI (March-April, 1947), 74–81

LOWERY, LAWSON G "Counseling and Therapy," *American Journal of Orthopsychiatry,* XVI (October, 1946), 615–22

McKINNEY, FRED "Case History Norm of Unselected Students and Students with Emotional Problems," *Journal of Consulting Psychology,* XI (September, 1947), 258–69

ROGERS, CARL R *Counseling and Psychotherapy* Boston Houghton Mifflin Co, 1942, 450 pp

SISK, HENRY L "Clinical Case Study Utilizing the Rorschach and the Murray Thematic Apperception Tests," *Journal of Clinical Psychology*, III (July, 1947), 293–98

STRANG, RUTH M "Criteria of Progress in Counseling and Psychotherapy," *Journal of Clinical Psychology*, III (April, 1947), 180–83

WRENN, C GILBERT "Client-Centered Counseling," *Educational and Psychological Measurement*, VI (Winter, 1946), 439–44

CASES ILLUSTRATING INDIVIDUAL ANALYSIS

A few examples of intensive individual study and analysis should serve to illustrate how these operate in practice It should be understood that the following examples present only a brief outline of procedure, since the cases cited are not accompanied by follow-up data One step in the complete process is thus lacking However, an examination of these cases should clarify the foregoing discussion.

The cases described in this section of the present chapter represent students whose problems were sufficiently complex and difficult as to require the assistance of specialized personnel In every instance except the case of Dorothy, the school psychologist was called in by the counselor to assist the latter in analyzing the needs of the student In two cases, those of Joseph and Robert, the psychologist in turn referred the problem to a psychiatrist employed by the schools

THE CASE OF WILLIAM

Introduction.—William, a twelve-year-old boy in the sixth grade, was referred to the school psychologist at the request of his foster parents who believe that he is rapidly becoming too difficult a problem for them They feel that he is growing increasingly uncooperative and self-centered They are greatly concerned about his violent outbursts of temper whenever he is criticized or punished

Physical and Health Factors.—There appears to be no indication of a health problem, according to the school nurse His tonsils were removed at the age of four Among his childhood

diseases were measles (6 years), chicken pox (8 years) and earaches (7 and 10 years).

School History—Because the family was constantly on the move during the war years, William attended many different schools He feels that this fact may partly account for his failure to attract any really close friends among his schoolmates At the present time he is not happy with the children at his school

Bill's present teacher reports that he is unable to interest the boy in any continued responsibility Occasionally Bill offers to help, but soon loses interest He frequently recites in class, talks freely in the group, and participates in most group activities He needs constant urging to stay with a task, is easily distracted, and seldom completes an undertaking In general he is uncooperative in school and distracts others by talking and by mischievous fun He is punished for talking, for bothering others by taking their equipment, for unwillingness to attempt to complete an assignment Praise is given for neatness, for fairly good oral contributions, and for taking part in class discussions He does high average work in reading and language, but low average in arithmetic and social studies

Test Data—

1 The *California Test of Mental Maturity* produced a language I Q of 105, a nonlanguage I.Q of 90, and a total I Q. of 99

2. The *Progressive Achievement Test* administered when William was 10 years and 9 months old resulted in the following grade placements Reading 5.3, Arithmetic, 4 5, Language, 5 2, and the total 5 0 William's actual grade placement was 5 5 when he took the test His chronological age at that time corresponded to a grade placement of 5 3 His achievement is apparently not very far below the level that can rightfully be expected of him in terms of age and actual grade in school

3 William's I Q on the *Revised Stanford-Binet Scale* (*Form L*) was determined to be 109 He revealed outstanding ability in vocabulary and in all portions of the test requiring verbal expression Throughout the test he demonstrated his

facility with language and showed a wide range of general information During the test he seemed to be overanxious to measure up to adult standards

4 On the day he took the Binet, William was also asked to react to some of the pictures of the *Thematic Apperception Test*. William's outstanding ability to express himself in words was evidenced in the interesting, dramatic stories he told These narratives were all thought out, full of interest and suspense, and always ending logically and effectively A consistent theme ran throughout his stories The hero is a young boy who is very good and who wants to "do the right thing, but is frequently criticized by his family" The boy is scolded, is sent away or goes away (on business, of course, no runaways) He does a good deed and is kind to a less fortunate person, he returns home to be welcomed with open arms

When William was shown card 13B (a small boy sitting in the doorway of a very poor log cabin), he told the following story.

Today was Christmas morning, little Joe sat on the front steps because he didn't get much, 'cause his mother and father were mean to him He wanted a horse His Dad came and said, "Get up—hurry up, you have to come help with the chores, go milk the cows" So he did He said to Bossy, "Oh, I want a horse How can I get a horse?" Pretty soon, "chop, chop," and around the corner came a little horse and a colt Next day Joe called his father and said, "Come here, look what I've got" His father said, "Hey, where did it come from?" (Mean, gruff voice) "It had better go back, too." The father said they had to buy a newspaper to see if it was lost They did next day and saw horses were stolen from a nearby farm So Joe took the colt to the farm and asked if it was the one that had been stolen They said, "Yes," and said, "Son, you're our hero" (No, I don't mean that.) "Son, you're gonna get a reward" He got it He took it home and showed his father Father said, "Oh, where did you get that money? You don't want it Give it to me" But Joe said, "No I'll save it, 'cause there's gonna be an auction, a pony sale"

Next week he went to the horse farm There were chances on horses, and Joe bought twenty tickets The man called the numbers, "Number 66" A man said, "I've got it" "Number 5" Joe said, "I've got it" He went on and on and the man had four points and Joe had

four points, and then the last chance was called "Number 64" Joe didn't have it, the man had it So Joe was sad again He went on with his hands in his pockets He saw a little black pony whinnying He asked a man how much he would sell it for "Twenty dollars" So Joe was glad, went home and got the money, went back and paid for it The man gave a bale of hay When he got home, his father said, "You'll have to work real hard twice a week to be able to get food for the pony" Later it was his eighth birthday, and at breakfast he found a bright, shiny bridle Joe said, "Thanks mother and Dad" And they said, "Take good care of it"

Social and Family Background—William is an adopted child His foster parents have two children of their own, a girl aged six and a boy of one The foster father is thirty-five and a college professor The foster mother is also thirty-five, a college graduate, and active in church and community affairs. She is program chairman of the parent-teachers' study group Both parents are very cooperative and are sincerely desirous of doing what is best for William

Bill has his own room, a bicycle, and play equipment, and the children have pets, magazines, and a playhouse William belongs to the Cub Scouts He appears to be on good terms with the neighborhood children

He is quite critical of his sister, especially when he has been punished When punished he becomes extremely angry and calls his parents names He is usually disciplined for not returning home on time, for disrespect, and for leaving without permission The punishment usually takes the form of taking away privileges and of requiring him to remain at home His home responsibilities consist of cleaning his room, mowing the lawn, and helping with the dishes He arranges his room beautifully with flowers and attractive materials He is praised for doing good work and for showing generosity Whenever he succeeds at a task, he becomes quiet, seems pleased with himself, and works with surprising ability When he fails he is likely to have a fit of anger and to become destructive

His mother considers Bill's chief problem to include his feeling regarding the family, his attitude toward religion, and his self-centeredness She summarizes the contributing factors as

follows (1) resentment toward his foster parents from the beginning, (2) the frequent moving from place to place during the war, (3) "parental mishandling and not enough overt affection" She reports that William is so independent that it is difficult for her to be affectionate

Personal and Social Behavior —William reveals a definite interest in certain types of art work, reading, dramatics, sports, and horseback riding His disposition is usually described as cheerful but impulsive His temper flares whenever he is thwarted He responds poorly to direct criticism of his behavior He is easily upset by changes in the usual routine and is extremely restless Evidence was observed of fingernail biting He is reported to experience "severe nightmares at intervals, mostly after too much excitement or emotional disturbance"

Psychologist's Interpretation and Recommendations —William is a boy of definitely more than average ability who may not show the full extent of his capacities because of the strong pressures under which he is living His outstanding talent appears to reveal itself in his verbal facility and the high quality of his dramatic and creative expression He should be given every opportunity to use this aptitude in the classroom, writing plays, directing plays, preparing reports with groups of children Perhaps acting in plays and puppet shows, playing with marionettes, and similar activities will give him a chance for successful group participation and for developing leadership

The perfectionist standards of the home may seem too arbitrary and unreal to Bill The mother shows a limited degree of insight in recognizing some of William's abilities and problems She needs assistance in adjusting her standards to the appropriate level for a boy of twelve years

Bill needs to be guided into some close relationships with other boys and girls Although he is not now happy in his associations with the children in his school, he should be assisted to establish himself as an integral part of the group If possible, he should be placed in a classroom with an understanding

and skilful teacher who will see that he learns to become one of the group rather than allow him to withdraw and daydream

Possibly the greatest potential danger in this problem situation is the possibility that William will withdraw still further from the life of his group and retreat into his dream world where his rich fantasy life could become more satisfying than the realities of everyday living.

The Case of Joseph

Introduction.—Joseph, now in the tenth grade of a four-year high school, is sixteen years old He has been absent from school a great deal, often giving illness as the cause Considered to be definitely uncooperative by the faculty, he is such a disturbing element that many of his fellow students have expressed the wish that he were not a member of their class group

Physical and Health Factors.—Joseph is relatively small for his age He has the general appearance of a wiry, vigorous boy of 12 or 13 In this matter of size, he is very sensitive His vision was found to be normal, but his hearing is moderately impaired. He experienced the usual childhood diseases, none severe, however, with the exception of a number of rather serious infections of the middle ear He fell from his bicycle about three years ago, landing on his head on the cement walk He lost consciousness at the time, but now seems to minimize the incident He did admit in an interview with the psychiatrist that slight blows on the head make him extremely dizzy

School History.—The educational record shows a continuous history of strong dislike for school, of failure to study and cooperate, and of frequent attempts to interrupt and disturb the classroom activities Teachers report him as "uncooperative, destructive, showing bad temper if corrected, stubborn, secretive, and defiant He reads very haltingly and uses words with little understanding In fact, Joseph's reading difficulties amount to a specific educational disability which has seriously affected his total school experience He says, "I never learned

my sounds." He is a slow worker, and he has a poor memory and a short attention span His best work has been in agriculture Among the few interests known to his teachers are a strong liking for outdoor life and real enthusiasm for horses. He has also shown some interest in track activities.

Joe's educational shortcomings are strongly accentuated by the fact that other siblings in his family have done well in school His oldest brother is a high school graduate, a sister has completed two years of college, and the brother next in age will complete high school before his seventeenth birthday

Test Data —

1 On the *Revised Stanford-Binet Scale,* Form L, Joseph registered a mental age of 12–6 and an I Q of 84 His responses were slow and somewhat uncertain He exhibited an unskilful use of words and apparently had little desire to improve his score A definite tendency to daydream was clearly revealed, along with a short attention span

2 Joseph's total adjustment score on the *California Test of Personality, Secondary Form A,* was approximately the 15th centile for high-school students Social adjustment was the lower of the two major sections, with a score equal to the fifth centile point Self-adjustment was higher, corresponding to the 25 centile point

Social and Family Background.—The family history may well have important significance for Joseph His father died some three years ago after a long illness The father had been a hard worker whose occupation took him away from home for long periods of time The parents quarreled frequently over the control of Joseph's activities The mother at this time appears to exercise little, if any, influence over her son's behavior At the same time, however, she has insisted that Joseph prepare for college and study for the bar A great deal of pentup ambition seems to be focused on her youngest child His very poor academic record is a source of great emotional disturbance She exerts a never-ending pressure on Joseph to turn over a new leaf and to begin achieving a record of school success commensurate with her plans for his vocational future

Personal and Social Behavior.—Little study of this case is required to indicate that Joseph presents a serious personality maladjustment He is resentful of all control, feels sorry for himself, frequently exhibits temper tantrums, and asserts that he is sick He is considered shifty and unreliable

In his interview with the psychiatrist he relaxed for a while and related the story of his delinquencies

It began when I was about nine years old I went into houses because other boys told me to I was caught, and put on probation for three months Then they found out it was the big kid's fault After that I used to do little tricks, and they blamed me for other things Later they found out I didn't do it Last year I got into trouble in school Just to be doing something I guess We used to throw water around and milk in the cafeteria We were seniors (junior high school) and we used to get around and do things They would call us in and talk to us We would just sit around and seem to listen, but really not pay any attention There's a teacher over at the high school I don't get along with, so I ditched about four times Once me and another boy flattened a tire on a bus Just to be late to school, I guess

Evidence of emotional tension is marked in Joseph's appearance and behavior He has developed the habit of withdrawing within himself when the pressure gets too great He does with a flourish what comes easily to him, but there is no steadfastness of purpose, no basic stability He acts impulsively with little or no carry-through In self-defense he seems to have cultivated swagger, a "big shot" attitude, and the practice of withdrawing in the face of difficulties He must come out on top or he doesn't play

Joseph smokes, drinks, and boasts of experiences with girls, real and imaginary He daydreams about situations in which he compensates for his deep sense of inadequacy He is constantly suspicious, slow thinking, and emotionally blocked and easily confused by any pressure

School Psychologist's Recommendations.—A further check on Joseph's physical condition seems important His vision should be analyzed thoroughly for a possible background for reading difficulties The boy's interest in athletics should be employed as a point of contact A coach might be able to obtain

his cooperation in a training program and more wholesome living The serious need for remedial assistance in reading must be supplied, since Joseph is practically a nonreader. His lack of success in school appears to be a major factor in his problem behavior Possibly a school club related to agriculture, especially animal husbandry, would help transfer his energies and interests into a socially valuable channel If possible, he should be encouraged to select a vocational goal in this area The mother should be tactfully but firmly informed that her ambitions for her son are much too high, and that her constant pressure on him to do the impossible bears an important relationship to his present difficulties

The boy needs some of the money he earns to buy his own clothes and for a small personal allowance.

Joseph also needs twenty-four-hour supervision, for a time at least, unless his mother can adopt a policy of saying only what she means and then following through with what she says

He should be given a psychiatric examination at the earliest feasible time.

Psychiatrist's Recommendation.—Joseph is a neurotic boy of dull normal general intelligence who has grown up in a home of high intellectual standards which he is utterly incapable of attaining. He is small for his age, emotionally unstable, and the product of a home in which supervision and control are utterly inadequate and erratic, due to the illness and death of the father, the prior conflict in authority between the parents, and the inability of the mother to control her younger children Of considerable importance is the extreme drive of this boy to overcompensate for his real or fancied inadequacies by excelling in the few activities possible to him and by calling attention to himself through antisocial behavior.

A vigorous program of action must be instituted at once. Investigation should be made to determine whether Joseph could be placed in the home of the older married brother or of the married sister. He should be removed from his present home environment as soon as possible

It should be impressed on the family that this boy must

not be expected to attain very high scholastic levels, that he needs encouragement rather than criticism, and that he needs to be directed along lines of developing self-sufficiency and a feeling of mature self-importance

Much can be done in the area of physical activity Here Joseph can obtain the basic satisfactions of accomplishment without experiencing the constant frustrations of the academic world If he can be shown that his trouble with reading was basically emotional, not mental, and if special home tutoring could be arranged to demonstrate to him that he can learn when the tension is removed, then his total cooperation may well be obtained Joseph needs such a plan of action desperately Anything less than a total readjustment of his program is foredoomed to failure

The Case of Robert

Introduction.—Robert is a senior in a large four-year high school where he has been regarded as a superior student until recently Now he appears to be extremely despondent and has apparently developed a serious sense of inferiority Robert's father requested a special study by the school psychologist because the boy seems unable to do any schoolwork The father expressed himself as much disturbed by his son's moods of deep depression The boy is seventeen and a half years old, a nice appearing lad, almost six feet tall.

Physical and Health Factors.—Nutritional condition seems to be satisfactory, teeth are in good shape, and his hearing is normal. The left eye shows some defect, the vision is 20/100, uncorrected He has had a ruptured appendix, and surgery on the muscles of his eyes to remedy a squint At present he suffers from a slight acne which is a source of considerable anxiety The examining physician reported the boy as normal physically.

School History—Robert's school record was considered by his teachers to be generally high until the rather recent onslaught of emotional difficulties His teachers report him to be

very cooperative and courteous, never presenting a discipline problem in the classroom He is considered talented in music, he occupies the first chair in the clarinet section of the school orchestra

In an interview with the psychiatrist, it was discovered that Robert had experienced a previous disturbed period when he was in the sixth grade At that time he was extremely over-conscientious and rigid concerning his religion If he happened to tear a piece of paper, he became very much upset, feeling that it was a very destructive act He would not permit himself to look at a girl in a bathing suit, he feared he would have unhealthy thoughts This condition persisted for a year or so, during which he vomited frequently After a time he was able to regain his balance and to throw off the unreasonable moral restrictions he had imposed on his behavior.

A careful review of Robert's educational record shows some inconsistency At times he has been quite brilliant, but there have been other periods when the marks received were rather low.

Test Data.—

1 The *Terman-McNemar Test of Mental Ability,* given in the 10th grade, produced a mental age of 24–10 and an I Q of 137

2 The *Revised Stanford-Binet Scale, Form L* was administered by the school psychologist as part of the special study requested by the boy's father An excellent test record resulted mental age, 21–2 and I Q., 141

3 The *Healy Picture Completion, Number 2* did not give as high a showing The mental age was 15–6 and the I Q , 97.

4 The *Occupational Interest Inventory, Advanced Form* provided a centile value of 70 for Personal-Social and Business and 80 for Science A high verbal interest was also indicated

5. Robert's profile on the *Mental Health Analysis Test* revealed a low over-all rating on both liabilities and assets He was at the 5th centile on "Feeling of Inadequacy and Physical

Defects" His scores for "Close Personal Relation" and "Social Participation" corresponded to the 1st centile and the 5th centile points, respectively The total score places Robert at the 1st centile point

Social and Family Background.—Robert's father is a dentist who was highly successful and who worked very hard, with little time for his family For a number of years the father has been seriously ill and unable to work He apparently expects a great deal of the boy and has set very high standards for him to follow He has placed a heavy responsibility on the boy's shoulders This weight is deeply felt by Robert who rebels against it

The mother is 47 and a very nervous woman who is characteristically inconsistent in her behavior She is extremely erratic emotionally, and does not carry through with her ideas She is somewhat domineering, and constantly nags her son to do things according to her standards The result has been that Robert has been in continual rebellion since he was born.

Personal and Social Behavior.—The boy has developed a very profound feeling of inferiority He says, "I'm a mess, I can't plan, I can't make a decision nor carry out one, and I can't study" He seems to have no self-confidence left; in fact, he occasionally speaks of doing bodily harm to himself.

He formerly appeared to be at ease socially, to have many friends and to enjoy them Now he believes that the other students no longer like him and, in fact, thoroughly dislike him because he has "let the band down" He has been so despondent that he refused to attend school for several days prior to the interview with the psychologist He apparently wishes to withdraw from social contacts

A possible "trigger mechanism" for the immediate disturbance may have been disappointment in love The girl for whom he claims a strong emotional tie apparently does not return his affection In fact she seems to be very much interested in a boy from the East who was introduced to her by Robert himself The new boy is aggressive and confident and has cut Robert out completely

Psychologist's Recommendations.—An examination by a psychiatrist was strongly urged for the earliest possible moment. In the meantime the aid of the faculty of the school was enlisted to build up his confidence, especially in band and orchestra. In the light of the psychiatrist's diagnosis, this suggestion may be too optimistic.

Psychiatrist's Diagnosis and Recommendation.—The patient appeared to be well oriented as to time, place, and person, and his conversation was relevant and coherent. He evidenced some guilt feelings and avoided looking the interviewer directly in the eye. He orally expressed many feelings of guilt. He affirmed that he has no kind thoughts, that he hates everyone, and that he believes he may be criminally insane. For approximately three months he has had hallucinations in which voices tell him that he is a "yellow rat," in addition to several other unpleasant names. These voices are not yet completely projected into other persons. He seems to realize that they are part of his own conscience. He apparently tends to be impulsive and suggests the possibility of suicide. Robert reveals at least a partial insight into his difficulties. The most probable diagnosis appears to be: schizophrenia, paranoid type.

The boy needs psychotherapy, beginning at a very early date. Without therapy the boy soon may be near an acute psychotic break and require hospital care. For the present, at least, Robert should remain out of school and return to finish high school in the fall. Possibly he could have a home teacher and graduate with his class. He needs some type of occupational therapy, and a home teacher would satisfy this requirement.

The Case of Christine

Introduction.—Christine is seventeen years old and attends the tenth grade of the local high school. She is a right-sided spastic, with practically no use of her right hand. The muscles required for locomotion are so seriously impaired that she cannot run or walk with any rapidity. Although Christine's problem is basically physical, almost every aspect of her life and personality has been deeply affected by her condition.

Physical and Health Factors.—In early infancy Christine suffered an attack of encephalitis which left her right side badly impaired She cannot pick up objects with her right hand, nor does she use that hand at all in writing Her parents state that she was originally right-handed Christine's eyesight is somewhat defective, but when she wears her glasses she has 20/20 vision

School History.—Christine is reported by her teachers to be very cooperative in class For several years she has been working up to the ceiling of her ability Unfortunately she has now reached a state where she can no longer compete with non-handicapped students She is constantly working to the limit of her capacity without achieving success In the face of continuous failure, Christine is developing a number of undesirable personality traits

That her efforts have not gone entirely unrecognized was demonstrated on the day the psychologist visited the high school to interview her A special assembly was held to honor the students who had made outstanding contributions in vocal music Christine received a pin for participating in the chorus. She was delighted, and seemed unusually proud and eager to be recognized as a member of the school group.

Test Data.—

1 On the *California Test of Mental Maturity,* administered when she was sixteen, she obtained a mental age-grade placement of 5 1 (although her actual grade placement was 10 4) Her Nonlanguage I Q was 60, her Language I Q, 70, and her total I Q, 66

2 On *The Progressive Achievement Test* (*Advanced Form*) Christine received a grade placement of 7 0 in Reading, 5 5 in Arithmetic, and 7 4 in Language Her total grade placement in these basic skills was 6 5. On the basis of Horn's formula, Christine's expectancy age was found to be 12–10, which would give her an expected grade placement of 7 2.[13]

[13] Alice M Horn, "Uneven Distribution of the Effects of Specific Factors," *Southern California Education Monographs,* Number 12 (Los Angeles University of Southern California Press, 1941), p 68

3 The *Revised Stanford-Binet Scale* (*Form L*) produced a mental age of 12–4 and an I.Q of 77

4 Christine's mental age on the *Healy No 2* was 9–8, her I Q was 60

The psychologist noted that she was spasmodic in her performance Her span of concentration was short, she became discouraged very easily She would not return to do a task over when she was assured that it was not a timed test This was especially true of her response to the Healy She gave up very easily in spite of the examiner's effort to encourage her

Social and Family Background.—Christine's parents are both college graduates They have shown an exceptional understanding of her problems, and a strong bond of affection seems to have been established between father, mother, and daughter There is an elder brother, twenty-two years of age, who recently completed work for a bachelor's degree in education and is teaching in a nearby community. He appears to have been very patient with his sister and they get along well together On the whole, Christine's home life is evidently the one really bright spot in a very frustrating world

Personal and Social Behavior.—Christine has frequently demonstrated a sincere desire to cooperate with her parents and with the school, but the constant repetition of failure is apparently producing a rapidly growing pattern of personality disturbances She complains of frequent headaches, has temper tantrums, and occasionally has trouble speaking clearly Her speech at best tends to be rather garbled She has sullen spells and no longer takes defeat gracefully She gives up easily and quickly becomes deeply discouraged when frustrated Even relatively simple tasks seem to place her under very great tension Every few days she becomes unusually despondent and occasionally threatens suicide

Christine appears to be very much concerned about her personal popularity among her fellow students. She is very sensitive to teasing, and the slightest hint of criticism arouses a strong emotional response Her parents report that during her

first few years of school she seemed to make friends easily She was accepted by the students and had many friends At present she seems to have only one friend at a time It seems probable to observers that she is the one who breaks the friendships through her quick temper or in one of her spells of irritability. During the interval between friends she is exceptionally moody and despondent

On the more favorable side of the ledger it may be noted that Christine has a delightful sense of humor, enjoys the fun in most situations, and is usually quite willing to work with her teachers She does not shrink from discussing her case She has been receiving good grades in physical education, not because of what she has been able to accomplish but, again, as a mark of recognition for hard work and a very cooperative attitude

Vocational Problems and Possibilities.—In the light of Christine's serious physical handicap, the time has more than passed when careful attention should have been given to vocational guidance and training Whatever she undertakes will have to be done at her own speed, and the methods she elects are apparently not the usual ones According to her parents she can do an acceptable job of baking and working, but her techniques and the placement of utensils and ingredients occasionally results in a feeling of tenseness between mother and daughter

She has shown a very definite interest in the raising of birds Unfortunately, she cannot engage successfully in the practice of animal husbandry because she is allergic to fur, which seems to bring on a type of asthmatic attack

Psychologist's Recommendations—Every effort should be made to secure an opportunity for Christine to receive physical therapy The fact that she is willing to work hard and faithfully in the physical education classes would appear to argue that she would cooperate fully with a definite plan of physical therapy under expert direction With the correct training, she might regain some use of her right hand At present it is almost completely impotent

If possible she should be placed in a school situation where she will not have to compete with nonhandicapped students. The pressure of trying to graduate from high school (at least under the usual academic standards) should be removed. Every reasonable effort should be made to foster companionship with young people of her own age group.

Attention must be focused soon on some vocational possibilities If these potentialities can be developed naturally and without tension, important mental hygiene results can be expected The state vocational rehabilitation bureau should be contacted and, if feasible, Christine should be made a trainee under its supervision

The Case of Dorothy

Introduction.—Dorothy was referred to the junior college counselor by the Dean of Girls for vocational guidance At the time this special study was made, Dorothy was almost nineteen and was just beginning her first year of junior college work During her interview with the counselor she showed some anxiety about her previous vocational choice of stenography, said she would like a little further help by the counselor, and wondered whether she should plan to attend the university.

Physical and Health Factors.—No detailed physical health data were available to the counselor The medical examination required of all entering freshmen indicated nothing unusual Nutritional conditions and general health were recorded as normal Dorothy seemed rather slim in build, and since the record indicated that an older sister was afflicted with tuberculosis, the counselor checked at once to see whether an X ray of the chest and lungs had been made Since no such examination had been made, arrangements with the city health department were completed immediately by phone The results, which fortunately were negative, were available at the time of a second interview two weeks later.

School History.—Dorothy was the covaledictorian of her high school graduating class and received a scholarship to a

business college On a centile scale her high school scholarship received a rating of 95 In the women's athletic organization, Dorothy was considered outstanding She appeared to possess rather exceptional speed of movement and excellent neuromuscular coordination which no doubt accounted for her success in games like tennis and girl's basketball

Early in her high school career Dorothy was elected vice-president of her home room and continued to hold some type of office or committee chairmanship throughout her years in school Her positions seemed to have been decreasing in importance

Test Data —

1 In terms of high school senior norms, Dorothy's score on the *Terman Group Test of Mental Ability* corresponded to the ninetieth centile point

2 Her centile equivalent on the *Minnesota Vocational Test for Clerical Workers* was 80.

3 On the *Iowa Silent Reading Tests,* her centile rating was 97 for comprehension and 60 for rate of reading

4 The *Cooperative General Culture Test* produced a centile rating of 18

5 The *Cleeton Vocational Interest Inventory* indicated the following interest ratings retail selling, A; office work, B, natural science, C, grade school teacher, C, social service, E; creative occupations, E

6 On the *Adjustment Inventory* (Bell) Dorothy made averages or normal scores in the health adjustment, social adjustment, and emotional adjustment portions of the instrument, but received a centile rating of 30 for home adjustment. Some of the items on which unsatisfactory responses were given are the following

a) Do you sometimes feel that your parents are disappointed in you?

b) Have you frequently disagreed with either of your parents about the way in which the work about the home should be done?

c) Has either of your parents certain personal habits which irritate you?
d) Is your father what you would consider your ideal of manhood?
e) Does either of your parents become angry easily?
f) Have you frequently quarreled with your brothers and sisters?
g) Do you occasionally have conflicting moods of love and hate for members of your family?
h) Was your home supplied with the common necessities of life?

7 The *Symonds Adjustment Questionnaire* revealed a less favorable picture, on the whole, than did the Bell *Adjustment Inventory* The over-all centile position was 27 with adjustment to the social life of the school, the teachers, the other pupils, and to personal affairs averaging close to 30 Adjustment to the curriculum and to the administration were highest, the centile ratings were 77 and 88, respectively Again, however, the centile rating for home adjustment was lowest of all, falling to a value of 12 Unfavorable answers were given to such questions as the following

a) Do all your teachers give you an opportunity to express your opinions?
b) Are any of your teachers more interested in their subjects than in the pupils?
c) Do you think that pupils have an equal chance to become officers in school organizations?
d) Do you think pupils must belong to a special group in order to become members of social organizations?

Social and Family Background.—At the present time Dorothy's father is a janitor in an elementary school, previously he had been employed as a day laborer There are eleven children in the family, Dorothy is the eldest In order to assist in meeting the family budget, she has worked part time as a stenographer, and occasionally has done housework when no other employment was available

Personal and Social Behavior.—In high school Dorothy was rated as highly cooperative by her teachers and her high school counselor She has the reputation of being a hard worker, a fact to which her grade record testifies Before the junior college counselor had talked with her for five minutes he felt that she was not happy The financial needs of her family appeared to be in direct conflict with her ambition to attend a college or university She was not sure whether she would prefer to be a stenographer or a science teacher She did indicate rather definitely that an important goal for her in the not too distant future was a home of her own In fact the life interests she listed were stenographer, science teacher, physical education instructor, and wife and mother

Junior College Counselor's Recommendation.—Dorothy has the special aptitude, the scholastic ability, and the basic subject matter achievement to succeed either in stenography or teaching, her two vocational choices Because of the economic status of the family, early employment appears to be essential Since teaching requires four years of college preparation, that vocation seems out of reach at present

Further study of the home, and contacts with the subject's parents, need to be made The desirability of a plan by which she could leave home should be considered. Her personal adjustment, although rather poor, may be improved under proper environmental conditions Unless given the right direction, this lack of adjustment may limit her advance to the height which she could otherwise attain in either stenography or teaching A canvass should be made of community agencies which might be able to work out some plan for financing a college education for the girl

Summary

In attempting to aid a student in the solution of his problem, it is essential that a large number of facts bearing on the case be assembled The student's scholastic aptitude should be ascertained if the probable length of the school career which he

can complete with profit is to be estimated If he is to capitalize on the student's strong points and avoid his weaknesses, the counselor must also ascertain his special aptitudes and talents Since his temperamental reactions determine his ability to adjust in a chosen vocational field fully as much as the specific skills and aptitudes which he possesses, it is also important to be acquainted with the student's personality characteristics. It is also necessary to learn something of his background of experiences It is important to know something of his past achievements, for "what he is to be he is now becoming" What he has done will provide the key, in most instances, to what he will do

It is a commonly accepted principle among guidance workers that in very few instances should they attempt to inject their convictions into the solution of a counselor's problem. Whatever methods and techniques may have been used in connection with a problem, the student who seeks help should in the end make his own decision or choice Some guidance workers even go so far as to withhold the conclusion of their mature judgment from the student for fear they may impose their decisions upon him All guidance workers know that in practice the most severe obstacle to this attitude sometimes comes from the student himself There are students who frankly ask, and even implore, the counselor to tell them what they should do in a given situation

If by presenting the difficulties and the hazards in clinical procedures the majority of guidance workers can be persuaded to use them with care, a worth-while cause will have been served This is not a method with which the inexperienced or the amateur should dabble Long counseling practice, familiarity with the world of work, thorough training in the use and limitations of standardized psychological tests, and, above all, an appreciable measure of good judgment are required for the individual who hopes to make a contribution in this field

There are some who interpret the essence of the clinical approach to student problems as a method for selecting individuals for a given course, curriculum, or job. In this sense it becomes a method of predicting success in a situation sampled by a test,

or battery of tests, often administered but once Knowledge of the prognostic value of such tests in predicting this success would enable the guidance worker to tell the counselee his possibilities in the areas under examination However, a student is only mildly interested in being told that, of all the individuals who have scored on the test as he did, 90 out of 100 have succeeded in the activity under question The counselee wants to know whether he will be one of the *ninety* or one of the *ten*

One cannot hazard the answer to this question from the scores on a group of tests given at one sitting, or, for that matter, from test results compiled over a period of years The latter data have the advantage of providing a longitudinal picture of progress over a period of years as compared with a cross-section view of present status Advice and suggestions, however much they depend upon standardized measuring instruments, must depend also upon the interview, anecdotal comments of experienced observers, the judgment of the clinician, and other available data This is the point at which the amateur and the "trade-trained" worker usually go astray.

The orderly methods by which clinical problems are attacked can often be copied with profit by the less experienced. However, a warning is in order · The process is intriguing and may give one a spurious feeling of skill which he does not really possess The counselor may feel that he has at hand a method for solving all his problems. This feeling of superiority may cause him at times to impose *his* solutions on the counselee It is well, therefore, to keep in mind one of the principles of guidance enunciated earlier in this volume Guidance seeks to assist the individual to become progressively better able to guide himself Rather than being told what to do, the counselee will appreciate the presentation of alternative solutions to his problem. He will prefer to make his own decisions, once his problem has been analyzed and these possible alternative choices made clear.

Questions and Problems

1. To what extent do the students in your school (or one that you are familiar with) base their vocational choices on adequate

vocational information? How would you obtain the answer to this question?

2 How would you determine whether a student's vocational or educational choice is appropriate for him? Classify the factors to be considered and the means suitable for their consideration

3 Obtain the occupational and educational plans of a group of students In terms of your procedures outlined above, evaluate the appropriateness of their choices

4 If you have many more applicants for certain vocational training curricula than can be accommodated, and if you cannot afford additions in this area, should admission be on a "first-come, first-served" basis? Explain

5 Should admission to a vocational training curriculum, such as aviation mechanics, be granted or denied on the basis of general and specific aptitude tests, personality, achievement, or the total previous record? How would you deal with parents who refuse to abide by the decision?

6. Should instructors in the vocational training curricula be furnished with the psychological data on the basis of which candidates for this training were selected? If so, in what form? When? If not, why?

7 Should students applying for entrance to vocational training curricula, or after admission to such curricula, be given the psychological data on which admission or rejection was based? If so, in what form? If not, why?

8. Assume that a high school graduate applies at your junior college for admission to the engineering curriculum. You tell him that on the basis of data you have collected, 90 students out of every 100 with a record similar to his fail at engineering schools He believes he will be one of the ten who succeed What would be your next step in counseling this student?

9 Select some one level of the secondary school: junior high school, senior high school, or junior college. Plan a testing program in one or several of the following areas achievement, general and specific aptitudes, adjustment, interests, personality, temperament What would the program cost per student per year? Discuss the use of these tests for guidance

10 What are the dangers in using aptitude test scores in a program of guidance?

11 Discuss the relation of vocational interest, as revealed by an interest inventory, to ability in the same field

12 What use would you make of tests of vocational skill and knowledge in a program of guidance? What are "trade tests"?

13 List in parallel columns practicable uses and limitations of standardized achievement tests

14 Is it desirable to report academic aptitude (I Q) test results to teachers? To parents? To students themselves? If so, in what form? If not, why?

SELECTED REFERENCES

BINGHAM, WALTER V *Aptitudes and Aptitude Testing* New York Harper & Bros , 1937, 390 pp

CHISHOLM, LESLIE L *Guiding Youth in the Secondary School* New York American Book Company, 1945, 433 pp

DARLEY, JOHN G *Testing and Counseling in the High School Guidance Program* Chicago Science Research Associates, 1943, 222 pp

DAVIS, FRANK G , *et al* *Pupil Personnel Service* Scranton, Pa International Textbook Co , 1948, 638 pp

ERICKSON, CLIFFORD E , *et al* *Basic Text for Guidance Workers* New York Prentice-Hall, Inc , 1947, 566 pp

FROEHLICH, CLIFFORD P *Factors Related to Effectiveness of Counseling* Doctoral dissertation Washington, D C George Washington University, 1948 (typewritten), pp 7–41

HAVIGHURST, ROBERT J , and TABA, HILDA *Adolescent Character and Personality* New York John Wiley & Sons, 1949, 315 pp

LOS ANGELES COUNTY SCHOOLS, DIVISION OF RESEARCH AND GUIDANCE *Guidance Handbook for Secondary Schools* Los Angeles California Test Bureau, 1948, 243 pp

PATERSON, DONALD G , SCHNEIDLER, G G , and WILLIAMSON, E G *Student Guidance Techniques* New York McGraw-Hill Book Co , Inc , 1938, 316 pp

REED, ANNA Y *Guidance and Personnel Services in Education* Ithaca New York, Cornell University Press, 1944, 496 pp

ROTHNEY, JOHN W M , and ROENS, B A *Counseling the Individual Student* New York William Sloane Associates, 1949, 364 pp

SCOTT, IRA D *Manual of Advisement and Guidance* Washington, D C Government Printing Office, 1945, 233 pp

STRANG, RUTH M *Counseling Technics in College and Secondary School* (rev ed) New York Harper & Bros , 1949, 302 pp

——— *Role of the Teacher in Personnel Work* (rev ed) New York Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1946, 497 pp

THORPE, LOUIS P, and KATZ, BARNEY *Psychology of Abnormal Behavior* New York The Ronald Press Co, 1948, 877 pp

TRAXLER, ARTHUR E *Techniques of Guidance* New York Harper & Bros, 1945, 394 pp

WILLIAMSON, E G, and BORDIN, E S "Statistical Evaluation of Clinical Counseling," *Educational and Psychological Measurement*, I (April, 1941), 117-32

WITTMAN, MARY P, and HUFFMAN, A V "Comparative Study of Developmental, Adjustment, and Personality Characteristics of Psychotic, Psychoneurotic, Delinquent, and Normally Adjusted Teen Aged Youths," *Journal of Genetic Psychology*, LXVI (June, 1945), 167-82

Chapter 15

SPECIAL PROBLEMS IN GUIDANCE

Counseling the Exceptional Student

If guidance be considered essentially [illegible] educational function designed to enrich and [illegible] instructional phases of the program of the school, the problems of the student who deviates markedly from the median of the group will become a serious concern of the counselor With a curriculum and a teaching approach focused most directly on the needs, interests, and future possibilities of the "middle two thirds" of the student body, the exceptional student may require more than a modicum of intelligent assistance Certain of these cases may demand the personal attention of the guidance specialist because of their complexity or the nature of the difficulties involved Others can be handled largely through the activities of the classroom teacher

In this discussion three groups of exceptional students will be considered (1) those who are limited in their general intellectual abilities, (2) those who are distinctly superior to the average in the same abilities, and (3) those who possess special talents

The Youth of Limited Intelligence.—Although the ability of the subnormal group to understand abstract problems may fall well below the general median for so-called mentally normal youth, they may possess other skills, capacities, and interests which constitute definite evidences of superiority Therefore it is most important that the characteristics of each individual in this group be studied, that is, that the comparative strength and weakness of all measurable traits possessed by each individual be ascertained It must be recalled that the traditional intelli-

gence test is largely a measure of verbal facility and conceptual information

Such a measure of scholastic aptitude is influenced by the social and economic status of the student to a considerable degree, since the opportunity to become acquainted with the content of the test varies in different types of environment. Some students fortunately live in an environment enriched by an abundant supply of books, magazines, and newspapers, by live and interesting conversation on current happenings, and by strong parental interest in the educational progress of the child Others come from homes poor in intellectual stimulation and lacking in the means of cultural growth

A low level of bookish interest does not necessarily indicate the inability to solve real-life problems, especially when the problem situations are encountered in a social setting unencumbered by complex verbal trappings Shrewd and careful observation, or a test which will discriminate accurately, is needed to discern the difference between low verbal aptitude or interest and a genuine lack of ability to meet obstacles or difficulties successfully.

The boy or girl of somewhat less than average general intelligence has no resultant guarantee that he can become an expert mechanic or that she will surely succeed as a typist or a cosmetician Relatively low mental test scores suggest an educational pr[illegible] on other than academic problems, and a [illegible] h does not require collegiate training, intricate reasoning, abstract thinking, or dealing primarily with symbols

The range of intelligence itself for this group is considerable, extending from the dull-normal to the feeble-minded In many sections of the country attendance laws and efficient enforcement have brought large numbers of high-grade morons under the care of the secondary school Educational adjustments may need to vary from encouragement and additional teacher assistance for pupils who fall somewhat below the general average to modified programs and special curricula for those who cannot profit by the regular work, even though the standards of academic accomplishment may have been greatly reduced

The functions of the guidance specialist with regard to students with low scholastic aptitude would appear to include (1) assisting in the planning of curricular modifications in harmony with the needs of this group, (2) reminding teachers of the difficulties which these students face when the academic approach to learning is used, (3) stimulating teacher interest in the problems and possibilities of this group; (4) searching with extra care for evidences of ability and interest that may serve as bases for more effective guidance; and (5) counseling with regard to vocational choices and vocational training that will capitalize on the high points of the student's profile of capacities, skills, and interests

The vocational guidance of those with limited academic intelligence is frequently complicated by ambitions which soar beyond the bounds of probable success Parents, relatives, friends, and teachers are often responsible for these impossible goals Society, because of its false standards of social importance, its unbalanced economic rewards, and its lack of security for the humble worker must bear a large share of the blame for these difficulties The only fair and just attitude the teacher and counselor can take is that of helping the student see the difficulties and limitations attending an unwise choice, with as much emphasis on the positive approach as possible For example, an interest which led to the choice of electrical engineer might make possible future success in doing routine electrical wiring.

Many students of dull-normal or subnormal ability present certain problems of adjustment and mental hygiene Since they are frequently asked to do the impossible and fail, they often assume a devil may care attitude to hide their sense of failure. Discipline cases, which may represent compensations and defense mechanisms, are common among these young people unless an intelligent interest is taken in their welfare The task of guidance seems to be that of providing legitimate channels for activity and success Many of these young people possess social intelligence considerably above ability to profit by academic learning and the solution of verbalized problems Some will become leaders of consequence in their community. Others will constitute an important part of the citizenry of a democracy

To neglect any opportunity to stimulate, encourage, and enrich the lives of the students with relatively low academic intelligence is unfair and socially dangerous.

The Youth with Superior Intelligence.—Who is the bright student? Which individuals possess mental powers of exceptional penetration and understanding? The intelligence test is the device most commonly employed to obtain answers to these questions. This measure has demonstrated its value as a basis for selecting those capable of the highest scholastic success but not necessarily those who will reach the topmost rank in every important field of human endeavor. The intelligence test is heavily weighted with tasks that require abstract reasoning and the juggling of symbols, but it does not indicate social skills or emotional balance Despite this somewhat limited scope of mental test results, there is considerable evidence for believing that the high I Q students frequently possess valuable potentialities for leadership and achievement Every teacher and counselor in a position to observe numbers of these gifted young people will agree that many never fully realize their possibilities

This loss of precious talent constitutes a serious guidance problem. A lack of real challenge in the program of the school is no doubt a large factor in the situation The ability to make a fairly acceptable record without much effort tempts many to coast through high school and college Vocational choices are often limited by parental pride and the teacher's lack of realism toward staid and conventional occupational areas already seriously overcrowded Why should the school restrict the curriculum of the superior student to the traditional college type of subject matter? With a little searching, constructive and creative interests may frequently be found which may serve as an effective basis for motivating the school program and furnish a foundation for more intelligent vocational counseling as well Hobbies, avocational, and leisure-time activities frequently offer possible channels for initiating a wholehearted and intensive program of study and problem solving.

The counselor may well assist the classroom teacher in planning opportunities for the bright student to gain enriched expe-

riences These may come on occasion from extramural contacts with industry, business houses, theaters, radio stations, professional men, social agencies, and the like In preparing tasks and assignments for the gifted, it is well to stress higher difficulty levels rather than enrichment through a mere increase in the amount of work required.

Counseling is frequently needed to help the bright boy and girl participate actively in the social life of the school It is easy and pleasant for them to drift through school, engrossed in the make-believe world of books and dreams of great plans and daring accomplishments without developing skills for dealing with people and situations in the immediate present The less intelligent but more socially minded student assumes the position of leadership which the gifted youth might occupy if he tried Stimulation and guidance may serve to salvage this potential leadership ability for more mature years when all the talents available will not be too many.

The Youth with Special Talents —Measures now available for such special talents as are required to become an accomplished musician, artist, public speaker, writer, cartoonist, or actor are at best only indicative The validity of these tests is not too well established However, tests like the Seashore Measure of Musical Talents and the Kwalwasser-Dykema Music Test, the Meier Art Judgment Test, and the Lewerenz Test in the Fundamental Abilities of Visual Art have some value in selecting those who appear to possess the possibility of developing ability of a higher order in these fields [1] An even more important function of these tests seems to be their use in demonstrating a low probability of success for those lacking real talent

The gifts or capacities mentioned do not seem to be correlated to a very high degree with general intelligence On the other hand, these correlations are practically all positive For

[1] Criticisms and references to research studies will be found in *The 1940 Mental Measurements Yearbook*, edited by Oscar K Burros (Highland Park, N J The Mental Measurements Yearbook, 1941), pp 143–57, and in *The Third Mental Measurements Yearbook*, edited by Oscar K Buros (New Brunswick, N J Rutgers University Press, 1949), pp 257–64

A general discussion of aptitudes in the fine arts is to be found in Walter V Bingham, *Aptitudes and Aptitude Testing* (New York Harper & Bros, 1937), pp 200–205, 350–53

success in these special fields it is quite probable that superior intelligence is required in addition to exceptional special talent. Proof of such a statement would be hard to give, but biographical studies of great artists, musicians, and writers seem to indicate the presence of a high order of mental ability [2]

Certain difficulties are frequently encountered in counseling students who possess or believe they possess unusual gifts Wishful thinking is often stimulated by the glamour and social prestige of the activity Parents and friends intensify the problem by talking of great things to be accomplished and thus setting impossible vocational goals for the child After ten or more years of enthusiastic discussion of the position and rewards of a concert pianist, a sixteen-year-old youth is not likely to be in condition for making an intelligent and unbiased vocational choice False counsel is occasionally given by well-meaning teachers who fail to consider that even the most talented person in a given high school student body may not measure up to the standards of success set by the larger world for the field of endeavor in which he has some degree of aptitude

In general, the wise counselor will probably suggest that special gifts be exercised on an avocational level until such time as maturity and a superlative order of skill indicate the likelihood of success on a full-time professional basis Teaching in art, music, writing, dramatics, and similar fields, while requiring considerable ability, seldom faces the fierce competition of public performance and offers an attractive outlet for the ambitious youth of superior intelligence and special aptitude.

Counseling the Handicapped Student

Few human beings possess perfect bodies Physical defects in greater or less degree are the rule and not the exception. In a certain proportion of cases these defects are so serious that they make vocational success difficult or impossible Society often discriminates unfairly against the person with a severe physical disability, with the result that powerful emotional

[2] Catherine M Cox, *Early Mental Traits of Three Hundred Geniuses*, Genetic Studies of Genius, Vol II (Stanford, Calif Stanford University Press, 1926), p 60

stresses and mental conflicts, with their accompanying withdrawals and unhappiness, develop In this area lies an important field for much thoughtful counseling Frequently the obvious response of an easy sympathy and casual good wishes is distinctly not the treatment required

One serious feature of this problem is the fact that a considerable group of students needing special assistance or guidance because of physical handicaps is not recognized The smaller number of unmistakable cases is usually well provided for by means of a definite educational program in the larger cities, although vocational counseling and placement may require further development A much larger number of children and youth who represent a borderline degree of handicap often escape discovery These are the students whose physical condition may frequently be improved through diagnosis and care, and whose mental health is likely to be neglected

Locating the Handicapped —Estimates of the number of handicapped children in the United States vary greatly, partly because of the arbitrary character of the borderline between the normal and the defective, and partly because of the lack of systematic measurement Table 16 presents a recent attempt to determine the approximate size of the seriously handicapped group

TABLE 16

ESTIMATED NUMBER OF CHILDREN AND YOUTH UNDER 21 YEARS OF AGE WITH SERIOUS PHYSICAL HANDICAPS *

1	Major allergic disorders	4,000,000
2	Asthma	1,250,000
3	Visual defects	4,000,000
	a) Partially seeing	50,000
	b) Totally blind	15,000
4	Hearing defects	2,000,000
	a) Deaf	17,000
5	Orthopedic and spastic conditions	500,000
6	Rheumatic fever and cardiac difficulties	500,000
7	Convulsive disorders (epilepsy)	150,000
8	Diabetes	35,000

* *Wartime Health and Education*, Hearings before a Subcommittee of the Committee on Education and Labor, U S Senate, 78th Congress, 2d Sess , Washington, D C U S Government Printing Office, 1944, p 1857 Quoted in *School Life*, XXVIII (November, 1945), p 11

The usual informal classroom measures for vision and hearing are far from satisfactory in locating the pupils who need attention The routine physical examination does not serve this purpose very much better A research study at Temple University disclosed sixty-three cases of hearing loss of more than 9 per cent by means of audiometer measurements [3] Only five of these children had been found by the regular medical check, and fourteen had been reported by classroom teachers

Even the much improved group audiometer test does not possess perfect reliability Thus a systematic plan of retesting is required [4] The group device must be supplemented by the individual testing instrument for all serious and borderline cases. A thorough medical check by an otologist is a very essential step in the complete diagnosis

The eye chart as a measure of vision is a valuable index for certain types of difficulty, but it does not show the amount of muscular strain undergone while reading the lines of letters The chart does not indicate astigmatism clearly, as it is frequently administered carelessly There is also the possibility that the lines on the chart have been memorized [5] More accurate instruments operated by experts are needed.

Other types of physical defects, such as cardiac disorders, orthopedic difficulties, nutritional weaknesses, pretubercular symptoms, and nervous instability, should be checked by more systematic, careful, and thorough medical examinations than are administered in most schools today Speech defects should be observed and reported as early as possible in the life of the child by alert and informed classroom teachers.

The Blind and the Visually Handicapped.—Estimates concerning the proportion of school children who need to be placed in classes for partially sighted students vary with different authorities, but a common figure is one in 500, while about one

---

[3] John L Waldman, Francis A Wade and Carl W Aretz, *Hearing and the School Child* (Philadelphia Temple University, 1930), p 64

[4] The self-correlation coefficient for the group type of audiometer test was reported by the Temple University study as 60 *Ibid*, p 59

[5] Henry E Garrett and Matthew R Schneck, *Psychological Tests, Methods, and Results* (New York Harper & Bros, 1933), p 26.

person in 2,000 is blind[6] The ophthalmology section of the American Medical Association has recommended that a visual condition as bad as or worse than an acuity of 20/70 in the better eye after proper glasses have been supplied indicates the need of special educational adjustments[7]

Counselors are frequently given the responsibility of assisting in working out an adequate program of study for the visually handicapped, this will be especially true for those borderline cases which can be taught in the regular classes with special attention and help from the teacher The possibility of visual handicap interference in the taking of most tests and examinations must be kept in mind by those in charge of measurement The student may be falsely judged as possessing subnormal ability if the factor of vision is neglected when the test results are interpreted

Obviously, one of the chief problems for guidance is that related to vocational training and job placement. Fortunately, in some sections of the United States counselors are available who specialize in the training and placement of the handicapped This service usually begins for the trainee at the age of sixteen years Much close cooperation between the guidance worker in the public schools and these state and federal agencies is desirable In many school systems, however, all the vocational planning for the sight-conservation cases must be done by the local school authorities unaided The blind child or youth is usually educated in state schools.

The employment situation for the blind is far from satisfactory A survey in the State of California showed that 95 per cent of the blind were unemployed[8] The remaining 5 per cent averaged twenty dollars per month in wages Sixty per cent reported that they had received no occupational training For the whole group of persons possessing serious visual defects, employment statistics in California are somewhat more favor-

---

[6] C. M Louttit, *Clinical Psychology* (2d ed) (New York: Harper & Bros, 1947), p 571

[7] *Ibid*, p 576

[8] H D Hicker, *Census and Economic Survey of the Blind in California* (State of California, Department of Education, Bulletin No 7, April 1, 1935), pp 13–15

able Of the total group of employed disabled workers, about 8 5 per cent possessed defective vision.[9]

A study of theoretical job possibilities resulted in the following estimates the proportion of possible jobs open to those with partial vision was 71 per cent, for those totally blind, the percentage was only 0 3 [10] In the vocational guidance of the visually handicapped, a correlation will have to be made between the extent and character of the defect and the vocational opportunities in the community

The Deaf and the Hard of Hearing.—Hearing difficulties are frequently overlooked "Our environment has changed so greatly in the past century that a real keenness of hearing is no longer necessary, and for that reason the faculty can be reduced greatly without there being an appreciation of the fact." [11] "The superficial observer easily misses deafness, and indeed three quarters of the cases of deafness in the curable stage may be said to be unnoticed It is remarkable how deaf children can conceal their defect and only be accounted stupid or dull." [12]

The educational program of the hard-of-hearing pupil usually requires important adjustments If the hearing loss is not too great, the classroom teacher can clarify instruction and assignments and encourage the pupil, while he benefits from association with the normal group Three levels of more or less serious deficiency are recognized in the literature.

1. Those pupils whose hearing loss ranges from 10 to 20 per cent will require "front seat attention" and some special tutoring by the classroom teacher
2. For those with a hearing loss between 25 and 40 per cent, the educational program must be supplemented by systematic lip-reading instruction, in addition to coaching and

[9] H D Hicker, *Census and Industrial Survey of the Physically Handicapped in California* (State of California, Department of Education, Bulletin No 9, May 1, 1935), p 22

[10] *Ibid*, p 43

[11] Kenneth O Blackfair (chairman), Committee on Growth and Development, White House Conference on Child Health and Protection, "Growth and Development of the Child," *Anatomy and Physiology* (New York Appleton-Century-Crofts Inc, 1933), Part II, p 260

[12] James Kerr, *Fundamentals of School Health* (New York The Macmillan Co, 1927), p 579

special class activities in voice, speech, and language skills

3 Those who fall as low as 45 or 50 per cent in hearing efficiency need to be placed in special classes or special schools [13]

The importance of helping the hard-of-hearing pupil to think earlier and more intensively on the problems of vocational choice and vocational training should be emphasized A longer period of training and more careful thought will be needed to compensate for deficiencies The counsel he receives should be given with unusual skill, that is, it should be planned with an intelligent understanding of the nature of his difficulties, as well as with a knowledge of the demands and conditions of the occupational world The California survey of the occupational status of the physically handicapped reported the following theoretical job possibilities for the hard of hearing, 70 per cent, for the deaf, 22 per cent [14] This means that 70 per cent of various kinds of jobs were at least theoretically open to persons with a definite hearing deficiency

Among the problems encountered in the placement of the handicapped worker the most difficult is that related to safety and compensation insurance The presence of dangerous machinery, moving cranes, locomotives, and similar hazards must be considered in placing the deaf and the hard of hearing It is usually necessary to avoid occupations requiring that the employee meet the public or answer the telephone

Considerable success has been achieved in certain communities in convincing employers that these handicapped employees possess superior qualities for many types of work The hard-of-hearing person is likely to do all in his power to retain his present position, as he knows it will be difficult to obtain another He is relatively free from the many distractions which cause the average worker to waste his time and lower his efficiency He usually demonstrates sincerity, earnestness, and

---

[13] Marshal Hester, "Hard-of-Hearing Child," *California Journal of Elementary Education*, IX (August, 1940), p 38

[14] H D Hicker, *Census and Industrial Survey of the Physically Handicapped in California, op cit*, p 46

loyalty to his employer In a nation-wide survey conducted by the United States Office of Education, employers rated 85 per cent of the hard of hearing as successful in their work[15] However, this excellent showing is somewhat marred by the report that more than 70 per cent of these workers had little or no chance for promotion On the whole it seems fair to inform the hard-of-hearing student that he faces a challenging but not necessarily a discouraging future

Pupils with Speech Difficulties.—Estimates of the proportion of school children possessing some type of speech defect vary from 1 to 5 per cent. The latter figure is equivalent to 1,200,000 pupils with speech difficulties in the schools of the United States, and was suggested by the Committee on Defective Speech of the White House Conference[16]

A considerable amount of excellent remedial work is being done in most large cities and in numerous smaller school systems, but many thousands of children and youth receive little or no expert help in overcoming their difficulties The staggering waste in human efficiency and happiness must be obvious. Defective speech is a severe handicap to educational progress, social effectiveness, economic and vocational status, and to the mental health of the individual A systematic search for pupils who need special attention to their speech problems is an important responsibility of the guidance program

Numerous physical and psychological factors appear to influence the problem of correct speech However, recent emphasis has been placed on emotional maladjustment[17] and nervous instability[18] This stress on emotional balance indicates the possible contributions of the classroom teacher and the guidance specialist Much can be done to break the vicious circle which often begins with faulty mental hygiene involving a sense of

---

[15] Elise H Martens, *The Deaf and The Hard-of-Hearing in the Occupational World* (Washington, D C United States Department of the Interior, Office of Education, Bulletin No 13, 1936), p 80

[16] C M Louttit, *Clinical Psychology, op cit*, p 457

[17] Lee Edward Travis, "Diagnosis in Speech," *Thirty-fourth Yearbook of the National Society for the Study of Education* (Bloomington, Ill Public School Publishing Co, 1935), p 407

[18] Norma Scheidemann, *Psychology of Exceptional Children* (Boston Houghton Mifflin Co, 1931), p 83

insecurity, embarrassment, fear, feeling of inferiority, and similar difficulties which lead to disturbances of the speech mechanisms Inadequate speech results quite naturally in further embarrassment, ridicule, loss of social status, and intensification of the original nervous or emotional weakness. According to Louttit, treatment of speech disorders "involves the discovery, recognition, and removal of any factors in the person's social environment that tend to produce emotional conflicts or other unhygienic mental conditions "[19]

Other Types of Handicap.—There are many varieties of physical and nervous abnormalities and defects A number of these might be grouped under the classification of orthopedic difficulties These may range from faulty posture and flat feet to permanent skeletal and muscular deformity Alert school systems have instituted special schools, special classes, special bus transportation, home teachers, and corrective gymnastics in an effort to provide for the different types of need

Children suffering from cerebral palsy have recently become a focal point of interest and educational planning on the part of public school administrators Cerebral palsy has been defined as an impairment of motor function because of injury to certain portions of the brain[20] Conservative estimates indicate that there may be 175,000 such children and youth under the age of twenty-one years in the United States Experienced workers believe that two thirds of these young people are capable of profiting by an educational program administered by the public schools either in regular classes or in some type of special educational facility The guidance and mental hygiene of these children and youth is not a simple matter A deeply rooted sense of inferiority, social maladjustment, and a badly spoiled disposition from parental indulgence and pampering may readily accompany physical abnormality.

Among the handicapped may be listed the so-called nervous child who usually does not suffer from a true nervous disease

[19] Louttit, *op cit*, p 476

[20] Carol M Jensen and Romaine P Mackie, "Twenty Questions on the Cerebral Palsied Child in California," *Department of Education Bulletin*, XVII, No 3 (June, 1948), pp 1–3

but from faulty mental hygiene[21] For that reason his case is of direct interest to the counselor The two most common examples of real nervous disorder are chorea and epilepsy These, of course, require expert medical diagnosis and treatment

The modern school is called upon to give instruction and counsel to the undernourished, the malnourished, the chronically ill, the cases of cardiac weakness, the pretubercular children with glandular dysfunction, the syphilitic, and those who appear peculiar because of unusual body structure or deformity

In addition to the previously mentioned difficulties must be catalogued the great variety of social maladjustments which may easily grow into serious sources of permanent handicap. The extremely shy child, the unwelcome child, the youth from an unpopular racial group, and the underprivileged student whose home background offers little foundation for a full and adequate life need guidance if they are to escape an ultimate classification with occupational misfits

Vocational Success of Handicapped Workers.—Evidence is rapidly accumulating which indicates that the physically handicapped youth can look forward to a useful and reasonably happy occupational career The experiences of employers with the handicapped worker in war industries during World War II was generally very satisfactory. A nation-wide survey of the job success of impaired workers was conducted by the Bureau of Labor Statistics in 1947 for the Veterans Administration Objective measures of job performance for 11,000 handicapped and 18,000 matched workers without handicaps were compared. The findings may be summarized briefly as follows

1. Attendance records were essentially similar for the two groups
2. The impaired worker group did not suffer as many disabling work injuries as did the other group
3. The impaired worker was not a safety hazard to his fellows
4. Few changes in machines or work equipment were required

[21] Don W Gudakunst, "Diagnosis in Health Education," *Thirty-fourth Yearbook of the National Society for the Study of Education* (Bloomington, Ill Public School Publishing Co, 1935), p 357

5 Where recorded measures of work performances were available, the handicapped group exceeded the nonhandicapped workers in actual job productivity [22]

The study also revealed that few specialized techniques in placement were required to assist the handicapped worker in locating satisfactory employment The major need seemed to be that the general character of the impairment and the nature of the work to be done had to be fully recognized by the employer, the potential employee, and the placement officer

Mental Hygiene for the Handicapped —No new principles of mental hygiene are required in dealing with the problems of the handicapped child, but all the regular concepts and procedures need an extra degree of thoughtful and intelligent application It is important, however, that this unusual concern be kept well concealed in the background of all treatment and counsel

Every child and every adult needs to succeed, at least part of the time In mental hygiene, as in life, "nothing succeeds like success" We must plan to make success possible for every student Obviously here is an essential place to help the handicapped youth who naturally will encounter more barriers and difficulties than does one who is more fortunate in his physical and mental equipment It is the duty of the school to see that his tasks and responsibilities are possible for him, but not to remove all difficulty from his path

Every human being needs to feel that he "belongs" as an integral part of his group It is *not* enough to be tolerated or accepted because of pity The individual must be an active, participating member Youth is frequently cruel without recognizing the pain and bitterness caused by ridicule and neglect A teacher's tact may be valuable in giving the handicapped child a fair chance to become part of his group All who contact the handicapped student can contribute to this important sense of security.

---

[22] "The Performance of Physically Impaired Workers in Manufacturing Industries," *Bulletin No 923, Bureau of Labor Statistics,* Washington, D C U S Government Printing Office, 1948, pp 6–21

Recognition is desired by all. If the handicapped child or youth does not receive his share of recognition through legitimate and constructive channels, he will probably seek less acceptable means to reach his goal Compensation for lack of attention is sometimes sought by becoming the "worst kid in school" or through developing a disagreeable and negativistic attitude

Every person should learn to face the realities of life squarely without mawkish pity for himself. Undue sympathy from parents, friends, and teachers will certainly hinder this important development All children deserve a chance to grow and express themselves in a normal, healthful emotional climate Much care, planning, counsel, and assistance are needed by the handicapped child, but these must be kept in the background, not in the focus of his attention He requires normal social and mental stimulation and many opportunities for healthy self-expression

This would seem to be a cardinal principle in dealing with the handicapped be natural, be sincere, and above all be truthful Nothing of permanent value can rest on a false foundation Guidance with regard to the educational and vocational future of the impaired or disabled youth should stress the nature of the difficulties to be encountered and should set the standards of achievement reasonably high.

Every child needs to develop an "outgoing personality." Too much turning inward for satisfaction does not make for a healthy or strong personality The handicapped youth is especially susceptible to the temptation to withdraw from a world of difficulty and unequal struggle to an inner sanctuary Alert teachers and counselors can assist him to achieve a healthy "outgoing" way of life by devising opportunities for normal associations with other young people and by emphasizing his successes

Counseling the Out-of-School Youth

The Problem of Transition from Adolescence to Adult Status.—The successful transition from life in a school to life in an adult society has usually been taken for granted The sense of being free from the routine and the restraints of the classroom, plus the economic power that came from a recently

acquired job, made the passing of the student and the birth of the worker a relatively facile transformation. Many of the more subtle psychological adjustments required by the transition were overlooked, but probably most of these occurred quite naturally in a less complex social order

The lean years of depression, however, greatly reduced the opportunity for employment and with it the likelihood of a successful transition from awkward, dependent adolescence to self-sufficient, self-directing membership in an adult community Youth has been expected to shift easily and satisfactorily from the carefully planned and supervised program of the school into a confused, chaotic occupational world This rapidly changing economic pattern, with its disheartening lack of place for the inexperienced newcomer, has puzzled both teachers and guidance workers and has baffled economists and sociologists

A definite trend toward increased competition for jobs between youth and other groups of workers has been clearly evident for a number of years [23] A period of temporary demand for the youthful worker was provided by the highly intensified production of World War II This demand, and the generous pay scale that accompanied it, are rapidly disappearing, and for an indefinite time unemployment for persons under the age of twenty-five years may well become a serious problem. Wise teachers and counselors will not conceal the realities of this situation from their counselees

For many youths, the years after leaving school become a prolonged period of idleness and futility Difficulties which emanate from the economic basis of unemployment soon spread to other areas of living A sense of inferiority and insecurity, together with attitudes of resentfulness, cynicism, and bitter discouragement, has developed These introduce serious problems of mental health.

Research on the Problems of Youth—Systematic research has furnished important information concerning the general character of the youth problem Perhaps the best known of

[23] Howard Y McClusky, "Post-War Counseling for 'Tween Age' Youth," *Occupations*, XXIV (October, 1945), pp 9–10

these investigations was conducted in Maryland under the sponsorship of the American Youth Commission A very readable account was published under the title, *Youth Tell Their Story*.[24] Three major findings were reported

1 For many thousands of young people the most pressing problem had to do with getting a job Economic independence, marriage, status in the community, and future ambitions all depended upon this essential foundation

2 A genuine, not a theoretical, equality of opportunity for an education is needed in many sections of America

3 Millions of young Americans lack the chance to participate in wholesome recreation that is not controlled by money-greedy commercial interests Many communities have not yet responded to this need [25]

The general educational status of the youth of America is summarized in the statement of the American Youth Commission that one half of the young people who left school did not finish the ninth grade [26] Many dropped out long before that grade level It is estimated that one million children of elementary school age are not enrolled in any school. Three million adults cannot read or write Approximately 46 per cent of adults over twenty-five years of age in the United States had not gone beyond the elementary school, according to estimates made by the United States Bureau of the Census in 1947 [27] More than 10 per cent of the same population had received less than a fifth grade education

A survey of 43,000 youths under twenty-five years of age in Connecticut revealed that 73 per cent had not been trained for any skilled occupation [28] This lack of vocational preparation constitutes a highly significant problem requiring the careful consideration of guidance workers

---

[24] Howard M Bell, *Youth Tell Their Story* (Washington, D C American Council on Education, 1938), 274 pp

[25] *Ibid*, pp 254-55

[26] Floyd W Reeves, *Youth—Their Jobs, Their Health, Their Schooling* (Washington, D C American Youth Commission of the American Council on Education, 1939), p 4

[27] *Report of the President's Commission on Higher Education*, Vol II (Washington, D C U S Government Printing Office, December, 1947), p 2

[28] Helen Wood, *Youth in Search of Jobs* (Hartford Connecticut State Employment Service, 1935), mimeographed document

Rural youths face an even greater educational disadvantage than do young people living in villages, towns, and cities A Wisconsin study concerning the educational progress of some 9,000 youth indicated that "70 farm young men per 100 did not enter high school, 70 village young men did . twice as many farm youths per 100 as village youths leave high school before graduation." [29]

Further complications for even those rural youths who do finish high school is indicated by an additional quotation from the Wisconsin study "It is agreed by many that a farm boy of today who completes a high school with its vocational course in agriculture is no better prepared to meet the problems of farming and rural living than was his father in his day. The reason given is that the problems are more complex both technically and socially"

A sampling of 5,000 young people of about twenty years of age, interviewed in Pennsylvania, indicated that practically one half were working on the level of unskilled labor [30] In Houston, Texas, 42 per cent of 3,000 out-of-school youths declared that they were compelled by pressure to accept jobs they would not have chosen [31] Since many of these young people have evidently found it impossible to enter the occupational area of their choice, vocational counseling is clearly needed, not merely prior to graduation or dropping out or even until a job has been obtained, but for a number of years after leaving school

The Public School and Guidance for Youth.—Many believe that the out-of-school youth under twenty-five years of age present one of the most pressing problems confronting the guidance program of the public school Other social and governmental agencies are offering some assistance, but the school has by no means responded fully to the challenge of the situation Much valuable counsel is probably wasted on the student whose atten-

[29] J A James and J. H Kolb, *Wisconsin Rural Youth, Education and Opportunity* (Madison Agricultural Experiment Station, University of Wisconsin, Bulletin No 437, 1936), pp 6–7

[30] Harlan Updegraff, *Inventory of Youth in Pennsylvania* (Washington, D C American Youth Commission), mimeographed document, p 10

[31] *Report of a Survey of Youth Not in School,* Research Bulletin No 8605 (Houston, Texas Houston Public Schools), p 18

tion is focused on the next football game or on a date for Saturday night that would be far more effective if made available when he is facing the perplexing difficulties of the transition from adolescence to adult status This statement is not meant to belittle the importance of early guidance, but it does suggest the importance of offering help and counsel when these are so badly needed and when they will frequently be more readily accepted

The direct responsibility of the public schools for planning and supporting an adequate and efficient guidance service for all youth in its community should not be shifted to other agencies. An educational program can never approach its full effectiveness unless it has been carefully designed to continue through the transition years into the vital period called "adult life" Kitson points out the important fact that the schools possess more information concerning each former student than any other agency, and for that reason they should follow through by offering guidance until each former student is settled in an adequate job [32] Former United States Commissioner of Education, J W Studebaker, presents a similar point of view "If it is not the function of organized education to guide our youth safely into the harbor of constructive service, education has no real function Education certainly is not carrying full responsibility when it deals only with the minority of young people who occupy full-time places in the classrooms" [33] Homer P. Rainey, formerly Director of the American Youth Commission, agrees heartily with this philosophy "We invest large sums in fitting youth for life, and then when the process is judged to be tolerably complete, we release them to shift for themselves Under present conditions the result appears to render many of them shiftless." [34]

A guidance service for the out-of-school youth in a community should do the following things:

---

[32] Harry D Kitson, *Youth-Vocational Guidance for Those Out of School* (Washington, D C United States Department of the Interior, Office of Education, Bulletin No 18, 1936)

[33] "Youth Education Today," *Sixteenth Yearbook of the American Association of School Administrators* (Washington, D C American Association of School Administrators, 1938), p 208

[34] Homer P. Rainey, *How Fare American Youth?* (New York · Appleton-Century-Crofts, Inc , 1938), p 39

1. Provide an opportunity for every youth to receive counsel and encouragement in dealing with any kind of difficulty or personal, social, or vocational problem which may confront him. In most communities such guidance occurs only when the occasional high school graduate drops in for a chat with his favorite teacher The availability of a counselor who is trained and technically informed, as well as sympathetic and friendly, should supply a need of long standing for the out-of-school youth
2. Make available a testing clinic for all who wish to receive the benefit of modern measuring devices skilfully interpreted It may well be argued that aptitude testing at this age level will have the advantages of better motivation and greater maturity. Measurement during student days would, of course, have made earlier advisement more adequate (See Chapters 11 and 14)
3. Conduct regular and continuous follow-up studies of graduates and those dropping out of school, unless other provision has been made (See Chapter 17)
4. Provide a central placement bureau to work with federal, state, and local employment agencies. (See Chapter 17)
5. Assist in bringing schools and local employers into closer understanding and cooperation Numerous opportunities will arise for suggesting adjustments in the school program that will fit the needs of youth and of the community more exactly.
6. Sponsor vocational surveys in the surrounding area Much valuable information can be collected in these studies of job standards, occupational trends, and of supply and demand as they influence local employment opportunities
7. Cooperate with educational and social-work leaders in conducting a youth survey if one has not been made Such a project was strongly recommended by the American Youth Commission, which published a valuable guide for planning a study and interpreting the results [35] Such a community survey should establish a basis for close cooperation among

[35] M M Chambers and Howard M Bell, *How to Make a Community Youth Survey* (Washington, D C American Council on Education, 1939), pp 1–45

all the agencies dealing with youth problems, make possible more and better recreation, and offer the necessary information for more intelligent job planning.

8. Help coordinate the activities of the numerous organizations and agencies whose objectives have to do with youth guidance
9. Provide an information center where youths may learn of local resources which may be brought to bear on the solution of their problems

The question arises whether the director of this service should also be the guidance specialist for the local school population In many instances this arrangement will no doubt be convenient and satisfactory, but it may result in neglect of the out-of-school group. The youth counselor will require somewhat different qualifications from those best suited to the regular school program He will need definite occupational experience, training in personnel work, a specific knowledge of vocational trends and requirements, and a firsthand acquaintance with the adjustment problems of the young worker. He should possess the skills and personal qualities necessary for coordinating school and business as well as for the successful placement of potential employees It will not be easy to find the unique combination of a confidence-inspiring personality, an understanding of the school and its program, an adequate vocational experience, and sufficient technical training in psychology and measurement

The Part Played by Youth Organizations.—It would be absurd to suppose that the school, with all its possibilities and responsibilities for youth guidance, can cope with these problems alone Fortunately many organizations and agencies are working in the same field "Youth Education Today" lists twenty-one youth membership organizations with more than 100,000 members each [36]

Some 400 high school principals were asked to name the youth organizations to which the largest number of students in their schools belonged, and also to indicate which exercised the

[36] *Op cit*, p 261

most constructive influence in attaining the objectives of the school The ranking of the ten highest organizations was almost exactly the same for the two bases The following list indicates the rank in order of size of membership rolls

Boy Scouts of America
Girl Scouts
Church Organizations
Y M C A (including Hi Y)
Four-H Clubs
Y W C A (Girl Reserves)
Masonic Youth Groups
Camp Fire Girls
Junior Red Cross
Future Farmers of America [37]

More details regarding the character, purpose, headquarters, program, etc , of these organizations are given in appendix F of the *Yearbook* reporting the study [38]

In spite of these organizations, with their hundreds of thousands of members, the Maryland study revealed that three out of every four out-of-school youths belonged to no organized groups of any description Many who had been active in the extracurricular program of the school dropped out of social life almost completely when they left school [39] Solution of the youth problem must of necessity involve a plan for bringing these young people into active participation in wholesome group life. A united community of cooperating organizations and agencies can assist in making progress in this direction.

A Proposed Program of Action.—Recommendations for an immediate program of action to aid youth were adopted by the American Youth Commission on October 9, 1939 [40] A few of the high lights of this program are here summarized

1 EMPLOYMENT "The Commission believes that all young people should be required and enabled to attend full-time schools up to the

[37] *Ibid* , p 274
[38] *Ibid* , pp 348–58
[39] Howard M Bell, *Youth Tell Their Story, op. cit* , p 138.
[40] *Program of Action for American Youth* (Washington, D. C.: American Youth Commission of the American Council on Education, 1939), pp 3–18

age of sixteen, but that it would be undesirable to compel the attendance above that age of young people who would prefer to go to work Above the age of sixteen many young people who would benefit from the training of a job would be wasting their time in school "[41]

"Public work for young people should be planned with special regard to its educational quality It should be superintended by persons who are competent to train young people in good work habits as well as in specific skills. It should be carried on in a spirit that will give the young worker a sense of being valued by and valuable to his country Finally, it should provide an opportunity to try various kinds of work so that the young person may find his own aptitudes and may be given some guidance in preparing for private employment in a field where he can be most useful and successful "[42]

2 HEALTH. The school should provide an adequate health program including physical examinations at regular intervals Similar facilities are needed for out-of-school youth [43]

The public recreational program requires considerable enlargement.

Adequate medical care for everyone is one of the greatest of all present health needs The cost of such medical attention must be brought within the budget of many millions of citizens

"Every illness prevented, and every young man or woman set on the road to healthy, useful life, are gains far beyond their cost in dollars "[44]

3 EDUCATION. If they are to attend school, the program of aid to needy children under sixteen must, of course, be continued "If we are determined that every American youth shall have an opportunity to obtain the education necessary for self-support and good citizenship, we must reduce the economic barriers that now cut off many young people from a fair chance "

"The school program would be on a much sounder basis if limited amounts of worth-while employment for pay were a part of the standard curriculum for all pupils in the upper secondary school grades This would extend the advantages to all, and eliminate grounds for charging either favoritism or adverse discrimination in the case of a minority of pupils "[45]

---

[41] *Ibid*, p 8
[42] *Ibid*, p 9
[43] *Ibid*, p 12
[44] *Ibid*, p 13
[45] "Youth and the Future," *Report of the American Youth Commission* (Washington, D C American Council on Education, 1942), p 123

Counseling Adults

A comparatively new but important field for guidance has been developing rapidly in connection with adult education For a number of years educators and social workers have seen the need for counseling service for adults, but the difficulties and problems of the recent depression intensified their efforts in this direction. Workers least suited to their occupational assignments have been among the first to lose their jobs Unemployment has resulted not only in vocational maladjustment, but frequently in problems affecting personal morale and mental health The sense of futility and insecurity to which these feelings have often led has indicated an increasing need for adult counseling service

The Need For an Adult Guidance Program.—Should public education be concerned with a guidance program for adults? Many citizens will no doubt answer, "No, the school has a full burden of responsibility in preparing its pupils to meet the difficulties and problems of life in an adequate manner without planning to service its educational product indefinitely." Others, however, will point to the essential continuity of life and experience and to the broader meanings of education That vast armies of adults have not considered their schooling completed during adolescent years is evidenced by an estimated total of twenty million American adults who engaged in some form of educational training in 1935. A general poll taken in 1947 revealed that more than two out of every five adults in the voting population were definitely interested in undertaking some kind of study [46] If this interest in additional education is to be more than a casual return to the school for a few brief hours, a systematic and intelligent program of guidance is indicated

Vocational Rehabilitation of Adults.—Thousands of adults have found the jobs for which they prepared and in which they have acquired years of experience eliminated by technological

[46] *Report of the President's Commission on Higher Education*, Vol II (Washington, D C U S Government Printing Office, December, 1947), p 61

changes or by general unemployment Many others have discovered that they are badly misplaced in terms of their interest, aptitudes, and life goals Their need for re-education, readjustment, and counseling is evident.

Guidance by the Staff of the Evening High School.—Evening high schools, continuation schools, and extended day classes provide the most extensive channels for adult guidance Unfortunately, the counseling done in many of these schools is haphazard and incidental Seldom is any attempt made to correlate the day school records of a given student with his work in the evening division Enrollment in classes is often a result of a hasty or careless choice on the part of the student

"The undertaking of any program of studies without individual diagnosis and counseling is largely the cause of the very high per cent of dropouts and turnover in all evening schools Rather than figure the additional cost of such service, school administrators should figure the costs of failure to provide an adequate counseling staff " [47]

More thought is being given to the importance of a well-organized counseling program in the evening high school Many schools have employed counselors to supplement the guidance offered by teachers, registrar, and principal The contributions to guidance of the various members of the staff of an evening high school were discussed at a conference of workers in adult education held in Southern California [48] A summarized statement of the responsibilities of each staff member follows

1 The principal is the leader in planning the curriculum and the total program He should study the needs of his community through careful surveys and with the cooperation of many agencies He must see that adequate bulletins, announcements, and course descriptions reach those who may be interested and who will need the work Much of the effectiveness of guidance will depend upon the manner in which the procedure of enroll-

---

[47] "Youth Education Today," *op cit*, p 219

[48] Tipton L Wood, *Summary Report on Educational Guidance in Adult Education* (Los Angeles Division of Adult Education and Continuation Education, State Department of Education, 1939), mimeographed document

ment is organized The process must not be lengthy nor difficult, and access to reliable counsel should be provided Close contact with every phase of the program is essential to the effectiveness of the guidance and leadership as provided by the evening school principal

2. Most of the burden of counseling adults has fallen on the shoulders of the instructor, and no doubt much of the best guidance work can be done by him Unfortunately, competition for students to save dwindling class enrollments does not always result in the most objective consideration of the students' best interests The teacher can help greatly by the clarity of his course descriptions The relationship of each course to avocational, scholastic, and vocational goals should be explained in considerable detail in order to meet a wide variety of student objectives Obviously it will be essential for the teacher to become well acquainted with each class group in order to plan for effective instruction and group guidance. Individual student-teacher contacts should be facilitated as much as possible.

3. The counselor, a comparative newcomer in the field of adult education, can do much to supplement the work of the principal and the teacher The counselor may assist the principal in discovering the problems and needs of his student body, in planning the curriculum, in preparing a catalog of courses, and in registering students The faculty of the evening school may receive help from the counselor in studying the character and needs of students and in acquiring skills in interviewing Counseling contacts with instructors whose experiences and information are appropriate to the problems of the individual student may be arranged But the most important contribution of the counselor lies in advising students regarding the various occupational fields, without giving too much emphasis to any one area If the counselor is free to devote his entire time and attention to the program of guidance, he can render a much-needed service in adult education

"Every talent, every resource, and every person on the school staff makes some contribution to his well-being and adjustment The teacher may learn to know him best, but all—from the prin-

cipal to his fellow students—are counselors, to a greater or less degree, and work together in this cooperative enterprise "[40]

Vocational guidance and occupational adjustment have been the central purposes of several demonstration centers for adult counseling. One such center was established by the American Association for Adult Education with a grant in aid from the Carnegie Corporation The experiment was continued for more than a year and served some 15,000 clients. Several valuable outcomes resulted from this exploratory project · (1) thousands of clients were counseled in a short period of time, (2) a large staff of counselors was trained in service, (3) measuring devices were administered by relatively untrained laymen with considerable success, (4) occupational information was collected and classified and used successfully in counseling, (5) the adjustment service established an effective basis of cooperation with other social and educational agencies.

The Regents' Inquiry[50] in the State of New York has recommended the threefold plan for adult guidance that is set out below.

1 A center maintaining an information service should be established apart from any educational institution so that it can direct adults to whatever agency seems best suited to their needs This means a complete and up-to-date file of courses, objectives, class schedules, testing and counseling services, etc
2. Educational guidance should be provided by each training center. Detailed information concerning each course and its possible values in relation to a variety of personal goals must be available
3 Counseling agencies equipped to make a thoroughgoing technical analysis of the capacities, interests, and skills of each client should be developed A rigorous and careful clinical approach should be employed by highly trained specialists in these counseling and placement bureaus

---

[40] Paul E Klein and Ruth E Moffitt, *Counseling Techniques in Adult Education* (New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1946), p 174

[50] F W Reeves, T Fausler and C O Houle, "Adult Education," *Report of the Regents' Inquiry* (New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1938), p. 121.

As an aftermath of World War II, a number of important pioneering programs of counseling and guidance for adults were undertaken Many communities, under the leadership of the Occupational Information and Guidance Service of the Vocational Division of the United States Office of Education, organized adult counseling centers Local school systems, in cooperation with social welfare agencies, employment offices, service clubs, and civic groups, developed plans for coordinating information centers, counseling facilities, and placement services for returning veterans and other adults in the community.[51]

The Veterans Administration, through its Guidance Centers, has demonstrated to hundreds of thousands of adults the value of systematic testing and counseling by professionally trained and experienced workers. This service for veterans has been the first truly large-scale guidance program for adults in America It may well become the entering wedge and foundation for permanent, nation-wide counseling for all adults

Here and there a few industrial and business concerns have provided professional counseling services for their employees [52] At present this area of adult guidance is in the experimental stage, not so much because there is doubt regarding the value to the worker, but because there exists some question regarding the nature of the returns to the employer

Summary

The curriculum of the secondary school has evidently been designed for the large group of so-called "normal" individuals who occupy the central portion of the curve of distribution for intelligence Textbooks, courses of study, examinations, norms of achievement, and the like are usually prepared with an average level in mind Those who deviate to any considerable degree from such a well-marked path of learning progress are in need of extra counseling time and assistance

The youth with less than average scholastic aptitude may

[51] William S Sadler, "Counseling Persons in Industry," *Phi Delta Kappan*, XXX (December, 1948), pp 133–42

[52] F J Roethlisberger and William J Dickson, *Management and the Worker* (Cambridge, Mass Harvard University Press, 1946), pp 189–379

find that the nonacademic phases of the curriculum possess greater immediate interest and still larger vocational significance for him Care must be exercised, however, not to assume that poor achievement in such subjects as algebra and foreign language guarantees future success as a skilled mechanic. Neither should students' lack of abstract intelligence be considered justification for a narrow, highly specialized trade curriculum on the high school level

The bright student frequently learns to loaf because the curriculum presents but little challenge to his interest This may be caused in part by the fact that teachers and counselors usually focus attention on college preparatory activities and goals Appeal can be made in many instances to constructive and creative interests which will supplement and may even replace the academic emphasis of the older curriculum Of special importance to gifted youth is guidance in the direction of increased participation in the social life of the school and toward the realization of potentialities for leadership

Special talents in the "glamour fields" of art, music, writing, dramatics, and public speaking may lead to unwise sacrifices and frustrated lives unless thoughtful guidance is given As far as possible, these special abilities should be assayed in the light of the high standards and relentless demands of such highly competitive occupations In most instances it would no doubt be wise to suggest participation on an avocational level with the possibility of demonstrating the desirability of vocational status at a later time

Disabilities and deficiencies usually demand that their possessor compensate in some constructive way for their presence. An extra degree of skill, interest, and vocational fitness is often required by the employer of handicapped workers. The secondary school guidance program can assist such individuals materially in the selection of a vocation and in the careful educational planning that must accompany such a choice The school can frequently cooperate with other social agencies directly concerned in the training and placing of disabled youth and adults

In counseling the handicapped, emphasis should be placed upon the importance of mental health As far as possible, par-

ticipation in the group activities of normal young people should be provided Misplaced sympathy will do more harm than good, as the handicapped student may quickly learn to escape unpleasant tasks and duties by calling attention to his infirmity He will need to realize that, unfair though it may be, his employer is likely to demand more of him than of a normal person.

The responsibilities of the guidance specialist, the classroom teacher, and the administrative staff include (1) locating all cases in which there is physical disability serious enough to interfere with scholastic, vocational, and social success; (2) planning appropriate adjustments in curricula and methods of instruction, and (3) assisting vocational planning, training, and placement

Ability to make the transition from school to adult life has always been taken for granted Because of the increased complexity of the present social and economic order, such a transition is probably more difficult to make than at any time in the history of the human race Important research studies have indicated that the areas into which the majority of youth problems fall are (1) economic—obtaining suitable employment, (2) educational—securing equality of educational opportunity, and (3) recreational—the enjoyment of wholesome, noncommercialized social and recreational activities

A guidance service for out-of-school youth is urgently needed which would provide (1) counsel for every type of problem, personal, social, or vocational, (2) a testing clinic where modern measuring devices are employed by trained workers, (3) a central placement bureau cooperating with similar community agencies, (4) a means of coordinating the school vocational training program and the local standards of employment, (5) a systematic follow-up and study of all young people in the community, and (6) an information center which acts as a clearing house for local resources which may be focused upon the solution of youth problems

The American Youth Commission has recommended (1) That all young people be retained in school until a minimum age of sixteen years, (2) that public work for youth be planned with due regard to its exploratory and training value for each

individual, (3) that more frequent and thorough physical and health examinations be conducted by the school, (4) that the public recreational program be considerably enlarged; (5) that young people in general, and children under sixteen in particular, be assisted in obtaining both the type and amount of education commensurate with their abilities and needs

The field of adult education presents a new and vital area for counseling and guidance. Many adults find themselves engaged in an occupation for which they are poorly fitted or in one that is thoroughly distasteful to them Others have lost their vocational security because of technological changes or business reverses Such men and women require vocational readjustment or rehabilitation, and thus need intelligent, informed counsel Adult education will be only a casual, hit-or-miss community luxury unless it can establish the type of guidance service essential to the effectiveness of its total program

Questions and Problems

1 Some writers have suggested that the curriculum and program of the public school are not adapted to first-class minds Do you agree? What factors have affected this situation?

2. What specific help can a counselor give to the classroom teachers and to the administrative staff of a high school in developing a program possessing a greater challenge for the student of superior mentality?

3 From your observation and experience, would you say that students of less than average intelligence were more likely to be discipline cases than other students? Defend your reply

4 Construct a chart with the following columns (*a*) behavior characteristics, (*b*) needed curriculum adjustments, (*c*) possible vocational goals Designate the rows by terms describing levels of general intelligence These might be defined in terms of I Q, such as 60–69, 70–79, etc. Fill in the cells of this table with words or brief phrases appropriate to the columns and rows

5 Illustrate the wisdom of capitalizing on the high points in the profile of a person's abilities and capacities.

6. Outline the counsel you would give to a student who possessed some particular type of special talent, such as painting, cartooning, playing the violin, and the like

7 Describe a real or hypothetical case of a student with defective vision What facts and factors would you need to study in assisting him to make intelligent vocational plans? Outline a guidance plan which could be developed cooperatively with such a student.

8 Prepare a discussion similar to that required by Problem 7 for a case of serious hearing difficulty

9 Prepare a like discussion for a student with a serious speech defect

10 Does a program for the vocational rehabilitation of the physically disabled operate in your community? Investigate through your state department of education if you cannot locate any positive evidence What can the schools of your community do to cooperate with existing agencies for helping the physically handicapped youth or adult?

11 Has a youth survey ever been conducted in your community? What did it disclose? If none was made, suggest the general outline of a survey which would be feasible in your local situation

12 Considerable evidence seems to indicate that the more we do to help young people find jobs, the greater is the number of older men who lose theirs Do you find this to be true? What solution do you suggest for this problem?

13 What facilities for adult education are available in your community? What opportunities are offered for the guidance of adults? Make a thorough canvass of these facilities before regarding your list as being complete

14 Suggest a more complete program of adult education and guidance for your community

Selected References

Axline, Virginia M , and Rogers, Carl R "Teacher-Therapist Deals with a Handicapped Child," *Journal of Abnormal and Social Psychology,* XL (April, 1945), 119–42

Baker, Harry J *Introduction to Exceptional Children* New York The Macmillan Co , 1944, 496 pp

BECHT, HELEN M "Must a Handicap Be a Liability?" *Occupations*, XXVII (December, 1948), 176–80.

BELL, HOWARD M *Youth Tell Their Story* Washington, D C American Council on Education, 1938, 273 pp

BUROS, OSCAR K (ed) *Third Mental Measurements Yearbook* New Brunswick, New Jersey Rutgers University Press, 1949, 1047 pp

CALIVER, AMBROSE "Certain Factors in the Post-War Vocational Guidance of Negroes," *Occupations*, XXIV (March, 1946), 347–52

CHAMBERS, M M *Youth Serving Organizations National Nongovernmental Organizations* Washington, D C American Council on Education, 1941, 237 pp

DAVIDSON, HELEN D *Personality and Economic Background, A Study of Highly Intelligent Children* New York Columbia University Press, 1943, 189 pp

DIX, LESTER "School Counselor at Work on Occupational Discrimination," *Occupations*, XXIV (February, 1946), 261–68

ENGLE, THELBURN L "Over-age High School Pupils," *Clearing House*, XVIII (September, 1943), 11–13

FLETCHER, F M JR "Occupations in Counseling—Part I," *Educational Research Bulletin*, XXVIII (April, 1949), 93–100

HOLLINGWORTH, LETA S *Children Above 180 I Q* Yonkers, N Y World Book Co, 1942, 332 pp

JAGER, HARRY A, and ZERAN, FRANKLIN R "Community Adult Counseling Centers," *Occupations*, XXIII (February, 1945), 263–308

JOHNSON, E S "Employment Problems of Out-of-School Youth," *Bulletin of the National Association of Secondary School Principals*, XXXII (October, 1948), 45–51

KLEIN, PAUL E, and MOFFITT, RUTH E *Counseling Techniques in Adult Education* New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1946, 185 pp

LINDGREN, H C "Navy Counsels the War Disabled," *Occupations*, XXIII (December, 1944), 133–35

LOUTTIT, C M *Clinical Psychology* (2d ed) New York Harper & Bros., 1947, 661 pp

McCLUSKY, HOWARD Y "Post-War Counseling for 'Tween Age' Youth," *Occupations*, XXIV (October, 1945), 9–12

McGEHEE, WILLIAM, and DRAYTON, LEWIS W "Comparative Study of the Personalities, Interests, and Home Backgrounds of Gifted Children of Superior and Inferior Educational Achievement," *Journal of Genetic Psychology*, LIX (September, 1941), 207–18

——— "Comparison of Certain Personality Characteristics of Mentally Superior and of Mentally Retarded Children," *Journal of Educational Research*, XXXV (April, 1942), 600–10

MORGAN, DAVID H "Emotional Adjustment of Visually-Handicapped Adolescents," *Journal of Educational Psychology*, XXXV (February, 1944), 65–81

RAINEY, HOMER P, *et al* *How Fare American Youth?* New York Appleton-Century-Crofts, Inc, 1938, 186 pp.

ROBERTS, ANDREW "School-Leavers Show Lack of Vocational Guidance," *Occupations*, XXVI (December, 1947), 171–74

SADLER, WILLIAM S "Counseling Persons in Industry," *Phi Delta Kappan*, XXX (December, 1948), 133–42

SAMUEL, HELEN E "Vocational Rehabilitation—Legislative Review," *Occupations,* XXII (March, 1944), 370

SCOTT, IRA D *Manual of Advisement and Guidance* Washington, D. C Government Printing Office, 1945, 233 pp

STERN, THEKLA "Counseling the Blind," *Occupations,* XXIV (December, 1945), 144–49

STONE, CHARLES A, and SCHMIDT, BERNARDINE G "Post-School Adjustment of Mentally Handicapped Girls," *Educational Administration and Supervision,* XXIX (April, 1943), 231–41

——— "Post-School Adjustment of Mentally Handicapped Girls," *Educational Administration and Supervision,* XXIX (May, 1943), 284–94

——— "Post-School Adjustment of Mentally Handicapped Girls," *Educational Administration and Supervision,* XXIX (September, 1943), 321–44

STUEHRK, MARGUERITE "How One School Helps 'Tween Age' Youth," *Occupations,* XXIV (November, 1945), 87–90

TERMAN, LEWIS M "Vocational Successes of Intellectually Gifted Individuals," *Occupations,* XX (April, 1942), 493–98

THOMPSON, WILLIAM H "Follow-Up of 104 Children Excluded from Special Rooms Because of Low Intelligence Ratings," *American Journal of Mental Deficiency,* XLVI (October, 1941), 241–44

WALDMAN, J L, WADE, F A, and ARETZ, C W *Hearing and the School Child* Washington, D C Volta Bureau, 1931, 222 pp

WALLIN, J E WALLACE "Twentieth Century Milestones in the Public School Education of the Handicapped and Maladjusted," *Training School Bulletin,* XLIII (November, 1946), 129–40

WILLIAMS, ROGER K "Study of Personnel Problems in Eleven Accredited Negro Colleges," *Journal of Negro Education,* X (April, 1941), 169–71

WITTY, PAUL, and THEMAN, VIOLA. "Follow-up Study of the Educational Attainment of Gifted Negroes," *Journal of Educational Psychology,* XXXIV (January, 1943), 35–47.

PART IV

EVALUATION

Chapter 16

EVALUATION OF GUIDANCE

Evaluation in General

What Is Evaluation?—Evaluation has been defined by Good [1] as "the process of ascertaining or judging the value or amount of something by careful appraisal" Obviously, this is a very broad definition Restricted to education, evaluation becomes, according to Jones,[2] "the process by which we find how far the objectives of the school program are being realized" In the present volume the authors are naturally concerned chiefly with the evaluation of guidance programs We may define the evaluation of guidance, then, as the process of determining how effective the guidance program is in helping the student to develop life plans commensurate with his interests, needs, and abilities

Purposes of Evaluation.—No better statement of the major purposes of educational evaluation has appeared than the one given by Smith and Tyler.[3] If "educational institution" is changed to read "guidance program" whenever appearing in their statement, the purposes of guidance evaluation may be given in very condensed form as follows.

1 To make a periodic check on the effectiveness of the guidance program and thus to indicate the points at which improvements in the program are necessary.

2 To validate the hypothesis on which the guidance program operates

[1] Carter V Good, *Dictionary of Education* (New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1945), p 156

[2] Arthur J Jones, *Principles of Guidance* (3d ed) (New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1945), p 562

[3] Eugene R Smith and Ralph W Tyler, *Appraising and Recording Student Progress* (New York Harper & Bros., 1942), pp 7–10

3 To provide information basic to the effective guidance of individual students This implies evaluation sufficiently comprehensive to appraise all significant aspects of the student's accomplishments.

4 To provide a certain psychological security to the school staff, to the students, and to the parents

5. To provide a sound basis for public relations Many of the criticisms expressed by patrons and parents can be met and turned to constructive cooperation if concrete evidence is available regarding the accomplishments of the school.

Techniques of Evaluation.—The terms *evaluation* and *appraisal* are frequently used interchangeably. To a somewhat lesser extent, *evaluation* has been used practically synonymously with *test* and with *measurement* What has taken place is that evaluation has become confused with its techniques In any evaluation program, the need for valid and reliable measuring instruments will always be apparent That standardized tests and measurements do not constitute all the techniques of evaluation, however, has been shown by the personnel of the Division of Research and Guidance of the Los Angeles County Schools [4] Among the techniques of evaluation they have listed the following

1 Standardized tests of skill and knowledge.
2 The case study and interview
3 The anecdotal record
4 Autobiographies and student questionnaires.
5 Interest and adjustment inventories, and rating scales.
6. Sociometric techniques
7. Samples of students' work.

What to Evaluate.—According to Kefauver and Hand,[5] the various approaches to the evaluation of guidance tend to fall under two general headings The first "involves defining standards or listing characteristics deemed to be desirable in any program of guidance " This may take the form of securing the judgments of guidance specialists as to what should be included

---

[4] Los Angeles County Schools, Division of Research and Guidance, *Guidance Handbook for Secondary Schools* (Los Angeles, California Test Bureau, 1948), pp 207–8

[5] Kefauver and Hand, *Appraising Guidance in Secondary Schools* Copyright 1941 by the Macmillan Company and used with their permission

in a guidance program, and thus lead logically to the formulation of a check list Under the second general heading, these writers list studies involving the follow-up of students who have had a course in occupations, received counsel from a guidance specialist, or who have experienced some other benefit from the guidance service

The reader will have no difficulty in finding various check lists in the guidance literature Some sixty items comprising a check list of guidance services have recently been published in the *Guidance Handbook for Secondary Schools*[6] As a means of suggesting various phases of the guidance service in possible need of evaluating, the different subheads under which the items of the check list appear are listed below. These are:

1 The place of guidance in the modern secondary school.
2 Techniques for collecting and recording data.
3 Techniques for the administrative use of guidance data.
4 Group techniques for utilizing guidance data
5 Techniques for teacher and counselor use of guidance data.
6. Provision for modern guidance material
7 Techniques for promoting professional growth in guidance activities
8 Techniques for interpreting the guidance program.
9 Appraisal of the guidance program

A second type of evaluation of guidance activities, that which involves the follow-up of students, will receive attention later in this chapter.

Formulating Hypotheses —Another approach to the problem of what to evaluate has been furnished by Williamson and Bordin[7] Defining counseling essentially as "individualized efforts to help students discover vocational assets and disabilities and to plan an appropriate training program," these writers then state that counseling can be evaluated only if certain outcomes or criteria of effectiveness are assumed to result from the

[6] Los Angeles County Schools, Division of Research and Guidance, *Guidance Handbook for Secondary Schools* (Los Angeles California Test Bureau, 1948), pp 195–204

[7] E G Williamson and E S Bordin, "Evaluation of Vocational and Educational Counseling. A Critique of the Methodology of Experiments," *Educational and Psychological Measurement*, I (January, 1941), pp 5–24

counseling process Their hypothesis is that effective counseling will have the following results.

1 Acceptance of a tentative educational goal and the training means to that goal

2. This goal will utilize the student's aptitudes and interests, and will demand neither more nor less aptitude than he possesses

3. The student will then make reasonable progress toward this goal.

4 The progress that the student makes with his training will be satisfying to him

Following this statement, even more specific hypotheses are listed Their contention is that, in order for counseling to be effective, the following conditions must be met

1 The counselor must secure the student's cooperation in choosing a goal and the means to it

2. The student must generate some enthusiasm to use whatever assets he has

3. The student uses his aptitudes skilfully in securing school training

4 The counselor and the student are able to alleviate pressures and disabilities which interfere with the skilful use of aptitudes and the choice of an appropriate goal

5 The counselor will call on specialized personnel workers whenever these pressures and disabilities are so serious that he cannot cope with them himself

6 The appropriate type of training will be available to the student

Difficulties of Evaluation.—Much has already been written about the difficulties of evaluating guidance programs, and more will undoubtedly follow In their scholarly article, Williamson and Bordin [8] have shown unusually keen insight into the difficulties which beset research designed to reveal the several outcomes of counseling. They mention as possible criteria such outcomes as (1) academic achievement, (2) appropriate choices, (3) cooperation, (4) satisfaction, (5) success, (6) quality of case work, (7) predictive efficiency, and (8) composite criteria The reader is referred to their original research

[8] *Op cit*, pp 9–22

for the fuller treatment which these various items deserve It is desired here, however, to show how difficult it may be to evaluate properly the effect of counseling and guidance on just one of these items.

Let us, therefore, take academic achievement as determined by the grades students receive. Shall we compare the students' grades before and after counseling, or shall we compare the grades of counseled students with those of noncounseled students? How reliable and valid are grades as a measure of scholastic achievement, anyway? What about the dissimilarities in pattern of subjects taken by different students? What about the student who, quite properly, may have been advised to withdraw from school? In his case there will be no grades to evaluate, yet he may have received excellent counseling.

If we decide to compare counseled and noncounseled students, can we obtain a sufficient number of cases that have been matched for such things as age, sex, intelligence, course, previous grades, and the like? Assuming that we can, should they not also be matched with respect to more intangible qualities such as motivation or emotional stability? Finally, may not the use of standardized achievement tests provide a better measure of academic achievement than that obtained from assigned grades?

It is perhaps very clear to the reader by now why no thoroughly conclusive guidance evaluation study has yet been made In summarizing their study, Bordin and Williamson draw the following conclusions:

1. All available methods of evaluation have weaknesses
2 Composite criteria which avoid arithmetical combination of the part-criteria are the least open to question
3 Sufficient data are often impossible to secure; available case records are often inadequate and incomplete
4 The time interval between counseling and evaluation is extremely important
5 The methods of studying students in general may not be applied to the study of individual students with particular problems
6 An impediment to more exact evaluation is the inability to control conditions for an adequate test of counseling recommendations

Review of Evaluation Literature

It may be well at this time to review four evaluation studies in guidance in order to amplify and illustrate some of the points that have been developed thus far The reader should remember that evaluative guidance studies began to make their appearance a little more than a decade ago That evaluative studies may be made for a great variety of purposes—ranging from the achievement of a single counselor to a comparison of schools in the same school system, or between different school systems, or between different *types* of guidance services—will be obvious Also, that in making these evaluations a great variety of techniques may be employed

The studies to be reported differ both as to purposes and as to techniques and were chosen largely for that reason The possibility of using a check list of desirable characteristics, which list is based on the judgments of guidance specialists, has already been mentioned as one technique The first study to be reviewed employed such a list Its purpose was to discover to what extent guidance activities were being performed by *counselors* as contrasted with any such activities handled by other school officials.

The California Counselor-Activities Study

A complete report of this study, in which two of the present authors were actively engaged, will be found in a monograph of the California Society of Secondary Education [9] In presenting below the questionnaire to which 102 counselors responded, the authors have also included the frequency with which each item was checked (Incidentally, the questionnaire furnishes one of the most complete lists of counselor duties and guidance activities known to the writers) Purposely omitted from the questionnaire are columns for indicating amounts of time spent on each activity and for indicating whether or not the activity

---

[9] John W Harbeson (Chairman), *Report of the Committee on Guidance* (Association of California Secondary School Principals) (Berkeley, Calif California Society of Secondary Education, Monograph No 1, December, 1938)

was carried out by anyone else in the school The questionnaire, raw data, and item-by-item evaluation follow

I. Instructions for Counselors' Association Questionnaire

1. Counselor activities include those done by you as counselor, those done by a fellow counselor in your school, and those done under a counselor's direction by others such as clerks and student helpers or teachers helping with guidance activities, as contrasted with any guidance activities initiated and handled by principals, vice-principals, or registrars, unless you assist them

2 Each numbered item under "counselor activity" should be checked *either* in the "N" (Never) column *or* under *two* of the others, once under *frequency* and once under *time* That is, items performed by the counselor or his helpers, or by teachers under his direction, should be checked in one of three columns in each of the two sets; those not done by them should be checked under "Never" *Any unchecked item will change the percentage figures for the Hollerith machine,* which is to be used for tabulating Use the most obvious meaning for each item See related heading and subheading for fuller meaning

3. Under the column "Done in School," check all activities which are carried out in the school program by counselor, registrar, principal, or anyone else

4. Meaning of abbreviations used in columns:

N—Never performed by counselor or people directed by him.
S—Seldom performed—less than 10 times a semester.
O—Often performed—10 to 20 times a semester
F—Frequently performed—over 20 times a semester

II. Raw Data

GUIDANCE ACTIVITIES OF SECONDARY SCHOOL COUNSELORS

I Preparation of Students to Enter School

Contacting students in contributing schools	N	S	O	F
	Frequency			
1 Explain courses, offerings, opportunities	12	43	15	32
2 Prepare them for the change of situation	14	44	16	28
3 Contact parents who can be present	29	39	16	18

		- requency			
		N	S	O	F
4	Secure individual information from teachers and principal	16	35	33	27
5	Give necessary tests and compile data	29	30	12	29
6	Individual conference and programming	17	26	16	44
7	Grouping of students as needed	20	39	16	25
8	Guiding arrangements for receiving students	21	39	14	26
9	Providing significant data for teachers	14	33	19	36
	Advising students entering from other than contributing schools				
10	[illegible] ork taken	16	6	7	71
11	[illegible]	20	6	12	63
12	Interview for placement in curriculum	14	6	12	71
13	Selection of subjects for program	14	6	8	75
14	Evaluating transcripts when received	27	7	9	59
15	Suggestions and plans for further programming	12	9	13	68
16	Passing on necessary information to teachers	14	6	17	66
17	Acquainting them with plant and schedule	18	16	12	56
	Programming late entrants (old, trans, late)				
18	Check up on situation (credits, etc)	20	9	7	64
19	Testing as necessary	21	9	9	62
20	Adjusting a program to situation	11	9	11	72
21.	Forwarding necessary information to teachers	12	8	13	69
22	Acquainting them with plant and schedule	16	16	8	61
	II GUIDING SEMESTER PROGRAMMING OF THOSE IN SCHOOL				
23.	Individual guidance by counselor or adviser	1	6	9	88
24	Group guidance by teachers	14	25	19	45
25	Plans and instructions for guidance	5	26	30	43
26	Periodic check-up	9	21	27	47
27	Consideration and adjustment of failures	3	12	20	69
28	Check-up on unsatisfactories	2	16	23	62
29	Advising on changes of curriculum	6	25	20	52
30	Adjustments by changes of program	2	10	14	78
31	Consideration of progress of students	9	12	24	58
32	Discovery of un-met needs and recommendations	2	19	44	39
33	Direction of standardized tests and interpretation of results	15	16	18	51
	III ASSISTANCE WHEN STUDENTS WITHDRAW				
34	Check-up on situation (causes, plans, needed guidance)	27	31	13	31
35	Revising lists and removing cards from files	23	17	10	54
36	Telephoning data or copying and forwarding	26	21	8	47
37	Counseling of student regarding change of schools	25	30	21	33
	IV SECURING DATA AND MAINTAINING PERSONNEL FILES				
38.	Compiling data for all entering students	21	13	8	59
39	Compiling significant test data subsequently obtained	20	15	10	57
40.	Compiling significant information from all sources	17	15	12	57

Keeping information available for use	Frequency N	S	O	F
41 For interviews and guidance	9	3	14	78
42 For interpretation to teachers	9	4	19	71
43. For consideration in problem and discipline cases	8	13	15	67
44. For interviews and guidance with parents	4	10	23	66
45 For forwarding to other schools	16	10	13	59

V ORIENTATION AND GUIDANCE OF STUDENTS

	N	S	O	F
46 Group adjustment to school life	19	37	19	25
47 Activities and courses in preparation for life choices	19	26	20	36
48 Preparation for further educational choices	6	20	24	51
49 Preparation for vocational choices	7	25	21	48
Interpreting college requirements and opportunities				
50 Securing and maintaining catalogs, etc	28	20	17	37
51 Discussions and interviews	10	10	24	58
52 Directed visitations	48	33	11	8
53 Securing visits from representatives	40	40	14	7
54. Maintaining files of information on vocational opportunities	28	23	26	24
55. Securing speakers on vocations	42	36	15	8
56. Encouraging offerings of vocational instruction as electives	26	26	17	32
57 Interpretation of life problems	21	22	23	37

VI. GUIDANCE OF TEACHERS AND ADVISERS

	N	S	O	F
58 Interpretation of principles of guidance	20	32	27	21
59 Group meetings for plans and discussions	17	35	33	15
60 Aids for home room guidance	28	24	22	26
61 Individual conferences with teachers and officials on student cases	2	5	23	73
62 Forms and reports	15	18	23	48
63 Cooperation on and advice for adjusting failures	2	9	24	69
64 Interpreting curriculum and graduation requirements	6	14	18	65
65 Interpreting rulings and changes	14	23	22	43
66 Assisting and guiding in use of standard tests.	13	21	19	48
67. Study and recommendations for grouping of students	15	19	15	42

VII MAINTAINING CONTACTS WITH LOWER AND HIGHER SCHOOLS

	N	S	O	F
68 Maintaining helpful relations and understanding with contributing schools	11	35	22	36
69. Keeping in touch with requirements and conditions in higher institutions	6	27	29	42
70 Attending conferences and making visits	7	31	36	30
71. Securing and maintaining current catalogs, etc	23	29	17	34
72. Arranging for speakers and advisers to interview interested students	35	44	19	4
73 Developing necessary forms and bulletins	15	33	26	29

	Frequency			
VIII MAINTAINING CONTACTS WITH COMMUNITY	N	S	O	F
74 Relations with P T A, service clubs, coordination council, industries, business, employment	21	28	22	31
75 Contacts with parents for mutual understanding and guidance of students at school	2	11	24	67
76 Contacts with parents at home	35	40	14	13
77 Surveys and study of employment conditions	57	28	9	7
78 Assistance with employment service	57	27	8	10
IX GENERAL SERVICE TO SCHOOL				
79 Making master program or / 80 Assisting with master program (Check 79 or 80 *not* both)	26	28	8	40
81 Serving on committees within school	3	28	31	42
82 Taking part in department heads' meetings	30	32	18	20
83 Taking part in principal's staff meetings	16	31	23	34
84 Representing school on outside committees	29	38	22	14
85. Representing school and reporting conferences	27	40	27	8
86 Calling attention to new books and articles on guidance, etc	17	44	29	12
87 Writing articles or interpreting the school to the community	29	55	10	8
88 Handling of recommendations for trade school	39	35	17	11
89 Credit checks for certificates and diplomas	33	13	7	50
90 Distributing information and forwarding applications for summer school	30	30	13	29
91 Posting records on permanent record cards and cumulative records	38	10	2	51
92 Making and forwarding transcripts	54	6	2	38
93 Answering inquiries	11	11	12	68
94 Making and interpreting questionnaires for necessary data	17	42	22	21
95 Making class adjustments to equalize size	21	23	17	40
96 Research studies and reports	15	43	32	13
97 Encouraging teachers in guidance activities	10	19	34	29

Plan of the Investigation.—A number of compilations of the various activities in which counselors engage have been made These activities, which have been classified, reveal how many of the counselors reporting engage in various types of guidance activity The investigation here reported carries the procedure a step or two further by making a job analysis of guidance activities designed to ascertain (1) to what *extent* do counselors employ certain techniques? (2) to what extent *should* they be doing these things? and by the process of combining these two factors, (3) in what phases of guidance do they measure up to, and in what phases do they fall short of, the standards set?

All counselors in the area studied were furnished with the foregoing list of ninety-seven activities and asked to indicate the extent to which they performed them Markings were to be interpreted in the following terms.

Never	0	times per semester
Seldom	1–9	" " "
Often	10–19	" " "
Frequently	20 or more	" " "

The investigators analyzed the findings on the basis of whether or not the counselor *should* engage in certain activities, and if so, whether or not the counselors should perform them "seldom," "often," or "frequently," as defined by the limits set This involved the making of a key based on the composite judgments of the investigating committee The key is included under the item-by-item analysis of the replies of the 102 counselors responding. (See page 500) No doubt some may wish to disagree with this pooled judgment of the committee However, since the actual data are furnished, any reader can make his own interpretations of the results given

The markings "never," seldom," "often," and "frequently" were assigned a value on a quantitative scale as follows.

Marking	*Position on Scale*
Never	0
Seldom	1
Often	3
Frequently	4

In terms of this scale, the average deviation from the standard value set by the committee was worked out for each of the ninety-seven items for the 102 replies For example, on Item 1 the distribution of replies was as follows. "Never," 12, "Seldom," 43, "Often," 15, and "Frequently," 32 Since the key for this item, as determined by the committee, called for "often" (which had a scale value of 3), the deviation from this standard value for each marking was

Never	12 × 3 =	36
Seldom	43 × 2 =	86
Often	15 × 0 =	0
Frequently	32 × 1 =	32
	102	154 ÷ 102 = 1.51

A distribution was then made of the average deviation values for the ninety-seven items. The range from the highest to the lowest average deviation from the standard was divided into four equal spaces and labeled "Very Unsatisfactory," "Unsatisfactory," "Satisfactory," and "Very Satisfactory." The following table shows the range of average deviation values assigned to each descriptive term.

Average Deviation	*Description*
2.83–2.19	Very unsatisfactory
2.18–1.57	Unsatisfactory
1.56–0.94	Satisfactory
0.93–0.30	Very satisfactory

III. Item by Item Evaluation

Replies to the questionnaire were reclassified into five groups: (a) group activities with students, (b) counseling activities, (c) activities common to both group and individual guidance, (d) administrative and supervisory activities, and (e) activities of a clerical nature. This was done because the questionnaire could be more conveniently marked when classified in terms of counselors' activities as now organized. However, it was profitable to analyze these replies in terms of those which could advantageously be assigned to teaching personnel and those which could be assigned to specialists.

(A) Group Activities with Students	*Key*	*Deviation*	*Rating*
1. Explaining courses, offerings, and opportunities to students in contributing schools	Often	1.51	Satisfactory
2. Giving tests and compiling data for students in contributing schools	Seldom	1.37	Satisfactory
3. Acquainting new students with plant and schedule	Seldom	2.06	Unsatisfactory
4. Acquainting late entrants with plant and schedule	Seldom	2.11	Unsatisfactory

	Key	Deviation	Rating
5 Preparing plans and instructions for group guidance	Often	1 08	Satisfactory
6 Supervising group adjustment to school life	Frequently	2 02	Unsatisfactory
7 Promoting activities and courses in preparation for life choices	Often	1 42	Satisfactory
8 Preparing for further educational choices	Often	1 27	Satisfactory
9. Preparing for and making vocational choices	Often	1 17	Satisfactory
10 Directing visitation to future schools and to industrial establishments .	Often	2 14	Unsatisfactory

(B) Counseling Activities

	Key	Deviation	Rating
1 Contacting parents of prospective students when possible	Frequently	2 83	Very unsatisfactory
2 Holding individual conferences for programming new students	Frequently	1 59	Unsatisfactory
3 Providing significant data for teachers about new students	Seldom	1 56	Satisfactory
4 Considering previous work taken in programming new students	Frequently	0 87	Very satisfactory
5 Interviewing for placement in curriculum .	Frequently	0 84	Very satisfactory
6. Helping select subjects for program . .	Frequently	0 80	Very satisfactory
7 Providing significant data for teachers about old students	Often	1 18	Satisfactory
8 Checking up on situation for late entrants (credits, etc)	Often	1 39	Satisfactory
9 Making program adjustments for late entrants .	Frequently	0 80	Very satisfactory
10 Providing significant data for teachers about late entrants	Often	1 19	Satisfactory
11 Holding individual conferences as needed .	Frequently	0 30	Very satisfactory
12 Conducting a periodic check-up on all students	Frequently	1 23	Satisfactory
13 Considering failures and their adjustment	Frequently	0 67	Very satisfactory
14 Checking up on unsatisfactories	Frequently	0 77	Very satisfactory
15 Advising on changes of curriculum	Often	1 18	Satisfactory
16 Making adjustments through changes of program . .	Often	1 02	Satisfactory
17 Considering the progress of students . .	Frequently	0 93	Very satisfactory

	Key	Deviation	Rating
18 Checking on plans and causes showing need for guidance	Often	1 71	Unsatisfactory
19 Counseling students regarding changes of school	Seldom	1 63	Unsatisfactory
20 Holding individual conferences with teachers on pupil cases	Often	0 87	Very satisfactory
21 Cooperating with teachers on the adjustment of failures	Often	0 91	Very satisfactory
22 Contacting parents at school for mutual understanding and guidance of pupils	Often	0 93	Very satisfactory
23 Handling recommendations for trade schools	Seldom	1 04	Satisfactory
24 Checking credits for certificates and diplomas	Frequently	1 29	Satisfactory
25 Distributing information and forwarding applications for summer school	Seldom	1 40	Satisfactory
26 Answering inquiries about the offerings and opportunities of the school	Often	1 21	Satisfactory
(C) Activities Common to Both Group and Individual Guidance			
1 Preparing entering students for changes of situation	Often	1 55	Satisfactory
2. Testing for abilities (re-checks)	Often	1 32	Satisfactory
3 Testing of late entrants	Often	1 40	Satisfactory
4 Discovering un-met needs and making recommendations	Often	0 81	Very satisfactory
5. Directing the use of standardized tests and interpreting the results	Often	1 26	Satisfactory
6 Promoting discussions and interviews on problems heretofore recognized	Frequently	0 92	Very satisfactory
7. Interpreting life problems	Often	1 41	Satisfactory
(D) Administrative and Supervisory Activities			
1 With teachers, department chairmen, and principals			
a) Directing group guidance by teachers	Frequently	1 47	Satisfactory
b) Interpreting principles of guidance	Often	1 42	Satisfactory
c) Holding group meetings for plans and discussions	Often	1 33	Satisfactory
d) Preparing aids for home-room guidance	Often	1 55	Satisfactory
e) Explaining forms and reports	Seldom	2 01	Unsatisfactory

	Key	Deviation	Rating
f) Interpreting curriculum and graduation requirements	Seldom	2 32	Very unsatisfactory
g) Interpreting rulings and changes	Seldom	1 83	Unsatisfactory
h) Assisting and furnishing guidance in the use of standardized tests	Often	1 27	Satisfactory
i) Making recommendations for grouping of pupils	Seldom	1 68	Unsatisfactory
j) Taking part in department heads' meetings . .	Often	1 71	Unsatisfactory
k) Taking part in principals' staff meetings	Often	1 41	Satisfactory
l) Encouraging teachers in guidance activities	Often	0 95	Satisfactory
2 Patrons and community contacts			
a) Securing visits from representatives of other schools	Often	2 03	Unsatisfactory
b) Securing speakers on vocations .	Often	1 92	Unsatisfactory
c) Arranging for advisers from other schools and from industry to interview students .	Often	1 93	Unsatisfactory
d) Developing necessary forms and bulletins for students in contributing schools	Often	1 37	Satisfactory
e) Maintaining helpful relations with P T A , service clubs, coordinating councils, etc	Often	1 47	Satisfactory
f) Contacting parents in the home .	Seldom	1 00	Satisfactory
g) Making surveys and studies of employment conditions	Seldom	0 93	Very satisfactory
h) Assisting with employment service	Often	2 31	Very unsatisfactory
3 Pupil groupings, records, and testing			
a) Grouping students as needed	Often	1 60	Unsatisfactory
b) Guiding arrangements for receiving new students	Seldom	1 25	Satisfactory
c) Making suggestions and plans for further programming .	Often	1 20	Satisfactory
d) Organizing records for interviews and guidance	Frequently	0 58	Very satisfactory

	Key	Deviation	Rating
e) Organizing records for interpretation to teachers	Often	1 04	Satisfactory
f) Organizing records for consideration in problem and discipline cases	Frequently	0 76	Very satisfactory
g) Organizing records for interviews and guidance with parents	Often	0 96	Satisfactory
h) Making master program or assisting with master program	Frequently	1 39	Satisfactory
4 Articulation with lower and higher schools			
a) Maintaining helpful relations and understanding with contributing schools	Often	1 36	Satisfactory
b) Keeping in touch with requirements and conditions in higher schools	Often	1 12	Satisfactory
c) Attending conferences and making visits to other institutions	Often	1 11	Satisfactory
5 General school service			
a) Encouraging offerings of vocational instruction as electives	Often	1 59	Unsatisfactory
b) Serving on committees within the school	Often	1 05	Satisfactory
c) Representing school on outside committees	Often	1 74	Unsatisfactory
d) Representing school and reporting conferences	Often	1 66	Unsatisfactory
e) Calling attention to new books and articles on guidance	Often	1 48	Satisfactory
f) Writing articles or interpreting schools to the community	Often	2 01	Unsatisfactory
g) Making and interpreting questionnaires for necessary data	Seldom	1 22	Satisfactory
h) Conducting research studies and making reports	Often	1 41	Satisfactory
(E) *Activities of a Clerical Nature*			
1 Evaluating transcripts when received	Never	2 65	Very unsatisfactory

	Key	Deviation	Rating
2 Revising lists and removing cards from files	Never	2 58	Very unsatisfactory
3 Telephoning data or copying and forwarding	Never	2 28	Very unsatisfactory
4 Compiling data for all entering students	Never	2 68	Very unsatisfactory
5 Compiling significant test data subsequently obtained	Never	2 68	Very unsatisfactory
6 Compiling significant information from all other sources	Never	2 74	Very unsatisfactory
7 Preparing information for forwarding to other schools	Never	2 79	Very unsatisfactory
8 Securing and maintaining a file of catalogs of future schools	Never	2 15	Unsatisfactory
9 Maintaining files of information on vocational opportunities	Never	1 93	Unsatisfactory
10 Posting records on permanent record cards and cumulative records	Never	2 16	Unsatisfactory
11 Making and forwarding transcripts	Never	1 61	Unsatisfactory
12 Making class adjustments to equalize class size	Never	2 30	Very unsatisfactory

Summary of Findings.—1 GROUP GUIDANCE ACTIVITIES Since six of the ten items (see page 500) under the classification of group guidance activities are performed satisfactorily, it seems that a fair amount of this type of work is being done Neither an extremely large nor small amount of time is devoted to functions in this area. An analysis of the activities not performed satisfactorily reveals that they are concerned almost entirely with immediate adjustments to the new environment· new surroundings, new routines, and a new social life. A study of the other side of the picture shows that satisfactory work is being done in order to adjust the student to the more academic side of school life—including the curricular offerings, testing for adequate placement, and assisting students in making educational and vocational choices This may or may not mean that the school in question is doing a good piece of work in adjusting the entering student to the social life of the school, the counselor is doing very little of this type of guidance Whether or not the counselor should have a part in this phase of adjustment is probably not entirely a matter of local adminis-

trative opinion because too many writers in the field of guidance emphasize the importance of adjustments in health, social-civic, recreational, vocational areas, and a variety of others

2 Counseling Activities Of the 26 items (see page 501) in this classification, 22 are undertaken to a satisfactory or very satisfactory degree This is indeed gratifying when one considers that it is in face-to-face conferences between counselor and student that important problems are considered and much valuable guidance occurs Such situations, however, may be crucial It might be argued that the proper handling of some of the matters untouched in the group guidance activities could serve to prevent such problems from producing a crisis in the life of the student

The suggestion can be made that the parents of prospective students be contacted oftener When one realizes that some schools insist on a conference with one or both parents of each entering student, and endeavor to promote better student adjustment by this procedure, it can be seen that most schools are doing little or nothing with this technique On the whole, however, individual counseling activities appear to be very satisfactory Likewise, those activities which are common to both group and individual guidance procedures are engaged in to a satisfactory extent

3 Administrative and Supervisory Activities The items relating to cooperation with the rest of the school personnel are performed in satisfactory amount, the proportion being seven out of twelve In contrast to their attendance at the principals' staff meetings, the counselors do not seem to be taking part in those held by department heads No doubt much could be gained by such attendance that would contribute to the counselor's education and hence to his ability to serve his counselees

School patron and community contacts may be classified into three groups (a) those relating to representatives from higher schools and from industry, (b) those relating to parent-teacher groups, service clubs, and other community organizations, and (c) those relating to the problem of placement Counselors do

not appear to be assisting much in the first area It may be that someone else in the school is in charge of much contact work. However, counselors seem to be making satisfactory contacts with various community organizations Possibly it is easier to work through an organized body than to make individual contacts, as would be the case for the first group. In the matter of assisting with the placement service, the counselor is doing a very unsatisfactory amount of work. Perhaps the counselor should do little in actually making surveys and studies of employment conditions One agency for a school system, such as the placement bureau, can do this work and make its findings available to the whole counseling staff It would seem that the counselor should be concerned with vocational adjustment at some point However, according to this report he does not seem to be. Perhaps the counselor himself is not at fault here. Placement service may not have been fully developed in all the school systems studied, or cooperation between the guidance staff and the placement personnel may not be adequately emphasized.

Pupil grouping, records, and testing seem to be handled in a satisfactory amount This bears out the previous finding that activities concerning curricular adjustment, or "educational" guidance, as some call it, are being cared for relatively well Articulation with lower and higher schools is likewise satisfactory in so far as the problem was studied

Counselors appear to be serving on school committees, keeping the faculty informed concerning the latest guidance literature, making and interpreting questionnaires, and conducting researches to a very satisfactory extent They are, however, falling a bit short in their out-of-school contacts. This bears out the previous finding that the contacts of counselors with industry and placement services is meager.

4 Activities of a Clerical Nature. Counselors engage in a variety of strictly clerical activities It seems logical to say that this is not as it should be However, since only twelve of the ninety-seven activities listed are in this category, it cannot be said that the major number of counselors' activities is clerical in nature The study does not reveal the proportionate

amount of time devoted to this type of work as compared to all other functions It might be well for each counselor to ask himself just how much of his work could be turned over to a clerk.

5 General Observations. A distribution of all the items in the investigation, rated according to the scale described in Item I of this section, appears as follows·

Descriptive Term	*Frequency*		
Very satisfactory	14 items		
Satisfactory	44 "		58 items
Unsatisfactory	25 "		
Very unsatisfactory	14 "		39 items
		Total	97 items

The tabulation indicates that fifty-eight activities are engaged in to a satisfactory degree, and thirty-nine in an unsatisfactory amount. In quantitative terms this shows a reasonably satisfactory status for guidance, but it also indicates considerable room for improvement

In conclusion, the reader should again be reminded that this study did not attempt to report how *competently* these activities are being performed, it does show rather completely, however, how the guidance specialist distributes his time.

The Kefauver and Hand Study

In Part II of their book dealing with guidance evaluation, Kefauver and Hand [10] present a follow-up study of junior high school students over a three-year period Entering seventh grade students were used in the study, these students being measured at the beginning of the semester and again at the end of the last semester of the ninth grade

Two junior high schools in Oakland, California, and two in Pasadena, California, were used. In the study these places are referred to simply as "City X" and "City Y" and are not identified One junior high school in each city was selected as the

[10] Grayson N Kefauver and Harold C Hand, *Appraising Guidance in Secondary Schools* (New York The Macmillan Co , 1941), pp 167–240

"experimental" school and the other school served as a "control" group

The teachers and counselors of the experimental schools were thoroughly familiar with the guidance concepts and aims of the study. No special work was done with the control schools other than to administer the same tests and inventories to the students. This does not mean, however, that the study was concerned with outcomes in schools that had a well-developed guidance service, as contrasted with schools without any guidance service Actually, all four schools offered a guidance service that was probably well above average. The comparisons of this study are between different *forms* of guidance service and different *amounts* of guidance emphasis The authors report that the differences were largely in the amount of time devoted to guidance activities by students, time assigned to the staff for guidance work, and the amount of guidance material and number of tests employed All amounts were greater in the experimental schools

One of the first steps undertaken was a study and formulation of guidance objectives. When the mean ratings by teachers of the importance of general guidance objectives were obtained, the data favored the experimental schools in both cities Mean ratings of the importance of student planning (as a guidance objective) were obtained from the teachers in the four schools; and these also favored the experimental schools. Finally, the teachers in both experimental schools had higher mean ratings on the guidance objective, i e., the importance of helping students secure information.

The above guidance objectives were accepted, and the staffs of the cooperating schools set out to achieve them. To measure the results these authors used virtually the same materials that were developed or employed in their earlier study [11] which involved nineteen schools in ten cities For the most part these were the Kefauver-Hand Guidance Tests and Inventories [12] The nature of the guidance content of these include (1) educational guidance information, (2) health guidance information,

---

[11] *Op cit*, reported in Part I, pp 3–164

[12] Published by World Book Company, Yonkers, N Y

(3) recreational guidance information, (4) social-civic guidance information, (5) vocational guidance information, and (6) information concerning false (or pseudo) guidance In addition to these, the Stanford Achievement Test and the Symonds-Block Student Questionnaire were administered

Space does not permit a consideration of each of these devices at this time Some, like the Stanford Achievement Test, are so well known as not to require description However, the types of information represented by one of these, the Kefauver-Hand Educational Guidance Test, may be described somewhat as follows (1) purpose of secondary school instruction, (2) identity and nature of the school's offerings, curricular and extracurricular, (3) school regulations, (4) criteria for reasoned choice of subjects and student activities, (5) criteria for reasoned choice of college, university, or other advanced institution, and (6) admission requirements of higher institutions of learning.

Results of the Study —We may now consider the results derived from giving these various tests and instruments Seventh-to-ninth grade gains in all schools were computed, virtually comprising a three-year follow-up study The authors have pointed out that any difference between gains may be presumed to be attributable to new features or changed emphases introduced into the guidance program of the experimental schools, furthermore, that any differences must be regarded as added effects, be they positive or negative, of the added or changed guidance service introduced in the experiment

Both experimental schools made higher actual and percentage-of-possible gains than the control schools on "Educational Guidance" The same was found to be true for "Health Guidance" On "Recreational Guidance" there was an actual decrease in mean scores from seventh to ninth grade in both control schools While both experimental schools here made gains, they were not noteworthy On "Social-Civic Guidance" both the experimental and the control school in City Y showed decreases In City X the experimental school had both a higher actual and percentage-of-possible gain than the control school.

Both experimental schools made higher actual and percentage-of-possible gains than the control schools on "Vocational Guidance" The same was true for the "Student Judgment Guidance Test," the title of which was camouflaged in order that it might better measure the student's susceptibility to false, or pseudo, guidance

On the Symonds-Block Student Questionnaire, which was designed to measure emotional adjustment, gains and losses were small in all cases In City X the experimental school showed a slight decrease in mean score, while the control school registered a slight increase. In City Y a higher actual and percentage-of-possible gain was shown by the control school On the Stanford Achievement Test, although the differences were not great, somewhat higher actual and percentage-of-possible gains were secured by both experimental schools This shows at least that the scheduling of more time for guidance work in the experimental schools did not have a detrimental effect on academic achievement [13]

In every case reported above, with the exception of the Symonds-Block Student Questionnaire (where there were decreases), differences in mean scores were attributable to gains resulting from new features and changed emphases introduced into the guidance program of the experimental schools Kefauver and Hand conclude that "on the whole, the added features and the modified emphases tentatively introduced into the experimental schools presumably made a fairly noteworthy contribution in improving the efficacy of the regular guidance programs in the two cities"

The Group Guidance Evaluation Study

A comprehensive evaluation of group guidance work at the junior high school level has been made by Dr Georgia Sachs Adams [14] Adams comments that while group guidance activities may be organized under a variety of plans, these plans may

[13] *Op cit*, p 215

[14] Georgia May Sachs, *Evaluation of Group Guidance Work in Secondary Schools* (Los Angeles The University of Southern California Press, 1945), 120 pp

usually be classified under one of two major types These are (1) the home room plan and (2) the guidance-teacher plan There is, however, a growing trend toward the development of a third type in which group guidance is an integral part of the general education or "core" course [15]

The study to be reported evaluated the results of group guidance in two junior high schools in Pasadena, California, one organized under the guidance-teacher plan and the other under the home room plan. Adams [16] has contrasted the two plans as follows:

1 Under the guidance-teacher plan a few teachers, selected because of special interest and training, serve as guidance workers In the home room plan all or almost all the teachers serve as guidance workers

2 Under the guidance-teacher plan the guidance teacher usually has a load of one hundred or more students The amount will depend on the amount of nonteaching time allowed In the home room plan, each home room teacher usually works with from twenty-five to forty students

3. Under the guidance-teacher plan the group guidance time allotment is usually a full class period In the home room plan the home room period is usually a short period of from fifteen to twenty-five minutes

4. Under the guidance-teacher plan the degree of organization of content varies Definite areas of instruction are often assigned to each grade level, sometimes the content is highly organized In the home room plan the content is highly flexible Often very little cooperative planning is done by the home room teachers

5. Under the guidance-teacher plan individual guidance is a definite part of the guidance teacher's responsibility. A free period or two daily may be assigned for this work In the home room plan individual guidance is only incidentally given by the home room teacher The counselor or director of guidance usually has full responsibility for individual guidance work.

In the study being reviewed here, the junior high school having the guidance-teacher plan is identified simply as "School A"

[15] This is the plan followed at John Muir College where the freshman (eleventh grade) guidance program is part of a required two-hour daily combination class in United States History and English

[16] *Op cit*, p 2

The junior high school having the home room plan is referred to as "School B" Again Adams[17] has brought out major differences in the plans by means of the contrast below

1 In School A four teachers, selected because of special interest and training, served as the guidance workers. In School B almost all teachers had home room groups

2 In School A the average load of each guidance teacher was approximately 300 students In School B the average home room teacher had 33 students

3. In School A the time allotted to group guidance was a full class period of 50 minutes The group-guidance classes met three times a week in the 7-1, 8-1, 9-1, and 10-1 semesters, and twice a week in the other semesters[18] The average weekly time for group guidance was, therefore, 125 minutes. In School B the home room period required 20 minutes daily The total weekly time assigned was, of course, 100 minutes

4 In School A, group and individual guidance for a given group of students was handled by the same person An additional free period per day was "allowed" the guidance-teacher for individual conferences In School B, responsibility for group and individual guidance was divided Except for conferences in connection with programming, responsibility for individual guidance was assigned to the "sponsor" (In both schools the entire student body was divided by grade levels into three approximately equal parts, the counselor and the two assistant principals in each school sponsoring one of the resulting groups)

5. In School A each guidance teacher moved from grade to grade with his students throughout the four years of junior high school The personnel of class groups varied each semester, however, according to changes in the choice of a club or of school subjects In School B each home room teacher kept his students throughout the four years. Moreover, each home room group retained its identity throughout this four-year period The home room was also a unit in the student body organization and in the social program of the school

6 In School A group guidance classes elected officers who had varying amounts of responsibility There was, however, no direct provision for having students participate in the selection of content or in the planning of group guidance activities. In School B home

[17] *Op cit*, p. 8

[18] The five junior high schools in Pasadena comprise grades 7–10, inclusive. There are, therefore, eight half-grades designated as 7–1, 7–2, 8–1, 8–2, etc

room teachers were required to work with "executive boards," composed of students elected from their home room groups, in planning and executing the home room program

7 In School A, boys and girls were in the same group guidance classes In School B, boys and girls were segregated, except in the seventh grade At this grade level the home room teacher was also the "core" teacher.

Comparative data were assembled concerning content and methods used in the two programs Little difference between the schools was found with respect to the proportion of time devoted to personality development, citizenship, and home and family relationships However, guidance classes at School A devoted a larger proportion of time than did School B to the following areas: study skills, recognition of false guidance, educational guidance information, educational and vocational life planning, and self-appraisal On the other hand, home room groups at School B devoted a larger proportion of time than did School A to these areas etiquette, occupational information, orientation, problems of growing up, recreational and leisure-time activities, health, and safety

Comparative data were also secured concerning the qualifications of the guidance teachers in one school and the home room teachers in the other Very little difference between these teaching groups was found with respect to the mean number of units taken in psychology, tests and measurements, and mental hygiene The average guidance teacher in School A did have, however, 6 0 units in guidance work as compared with 1.7 units for the average home room teacher in School B

Comparisons of the two schools with respect to certain non-experimental factors were also made These factors fell under three major headings (1) the curriculum, (2) the extracurricular program, and (3) the staff It will suffice to say that "with the exception of a somewhat lower average teacher load and a more favorable pupil reaction to the ninth grade vocational guidance unit in School B, all differences found between the schools uniformly favored School A (guidance-teacher plan)[19] Any differences favoring School B could scarcely be

[19] Adams, *op cit*, p 16

attributed to the factors mentioned above In view of the findings of this study, it will be well to keep this fact in mind.

Results of the Study.—Space forbids a detailed report of the findings which this study deserves. Findings concerning information basic to personal and social adjustment, life planning and its effectiveness, pupil-teacher relationships, and pupil and teacher reactions concerning the interest and value of the programs will, however, be shown With respect to social adjustment and life planning, the important findings were as follows:

1. Although School A spent the larger percentage of time on instruction in study skills, almost all gains and final scores on the information test utilized favored the home room groups
2. Results on an orientation information test definitely favored the home room groups of School B
3. The evidence concerning etiquette and social usage favored the home room groups whether initial scores, final scores, or gains were taken as the basis for comparison
4. When results of a test on knowledge of mental hygiene principles and the ability to apply them were summarized, all differences proved to be in favor of the home room groups
5. There were no appreciable differences between the two schools with respect to consistency of pupil self-ratings.
6. Accuracy of pupil ratings was checked by correlations with test results Only in the case of arithmetic was there a significant difference, this difference favored the home room groups
7. No consistent differences were found between the two schools with respect to initial scores on a test of educational guidance information Final scores and gains slightly favored the home room groups
8. On the occupational information test, mean initial scores favored School A at the lower grade levels, and School B at the higher grade levels Mean gains and final scores, however, favored the home room groups.

In passing, it should be stated that not all the differences mentioned above, nor all the differences in outcome remaining to be reviewed, were statistically significant

Comparisons between the two schools with respect to effectiveness of life planning yielded seven important findings These were as follows.

1. A higher percentage of students in School A than in School B had made a definite vocational choice
2. When students were asked to write in the names of subjects they had chosen for the following year, all four resulting differences with respect to the mean number of subjects chosen favored the home room group
3. There was no consistent evidence in favor of either school so far as judging the suitability of the student's vocational choice was concerned
4. A correlational study to check upon the suitability of the student's educational plans favored the home room groups, although the differences were small and not conclusive
5. A test of educational and vocational planning devised to measure certain aspects of quality of thinking was administered to 9-2 and 10-2 pairs and total groups of students All four differences favored the home room groups
6. Reasons given by students for their vocational and educational plans were classified according to their degree of acceptability by means of ratings by three competent guidance workers. No consistent differences were found between the two schools
7. Comparisons made with respect to reasons for attending college, likewise obtained at the 9-2 and 10-2 grade levels, favored the guidance-teacher groups in the case of boys studied The data for girls, however, revealed no reliable differences between School A and School B.

Several types of evidence concerning pupil-teacher relationships were obtained The data may be summarized in the following seven most important findings.

1. No significant differences were found between the guidance and the home room teachers with respect to the adequacy

of their information concerning the levels of their pupils' school achievement or general intelligence

2. The average home room teacher, however, had more adequate information than did the guidance teacher concerning pupils' health and home situations
3. When the two schools were compared with respect to the significance of additional comments concerning pupils by guidance and home room teachers, the differences at three of the four grade levels studied favored School B
4. When pupils were asked to indicate the teacher they felt they knew best, all differences favored the home room teachers
5. Replies by pupils concerning teachers who had given them personal, individual help were analyzed Results for School B were found to be superior to School A at all grade levels
6. Guidance teachers were listed much more frequently than home room teachers in response to the question, "In which courses did the teacher do almost all the talking?"
7. Comparisons with respect to opportunities for boys and girls to express their own opinions in the guidance or the home room period likewise favored home room groups.

The last part of this group guidance evaluation study is concerned with pupil-teacher reactions Twelve conclusions in this area are warranted They are as follows.

1. Pupil reactions favored School A with respect to the amount learned about training opportunities at a local junior college
2. Pupil reactions favored the home room groups with respect to learnings in the following areas orientation information, etiquette and social usage, social adjustment, personality development, citizenship, wise use of free time, and budgeting of time
3. Pupil reactions were inconclusive in the following areas. study skills, self-appraisal, educational guidance information, occupational information, and help in educational and vocational planning
4. At seven of the eight grade levels, the mean interest ratings

for School A were negative, indicating lack of pupil interest in the work of the group guidance class In School B, however, mean interest ratings for the home room were all positive

5 Comparisons with respect to percentages of pupils listing the group guidance course as one in which they had learned "a great deal that is now or is likely to be of great value" favored the home room groups at all grade levels except one At the 9-1 grade level the percentages were identical

6 On the other hand, the School A guidance class was mentioned by pupils much more frequently than was the home room period as one in which they felt there was no point in what they were doing

7. The mean rating of 2 3 by home room teachers indicated a higher regard for group guidance work than the mean rating of 2 0 by the guidance teachers of School A This, however, was more favorable than the rating of 1.7 given by the "subject" teachers of the same school

8 All four of the guidance teachers at School A, and approximately one half of the subject teachers, felt that too much time had been assigned to the group guidance program.

9. Strong points of the group guidance program most frequently mentioned by the teachers in School A were (1) opportunity for the guidance teacher to know individual pupils, (2) advantage of remaining with the groups over a long period of time, and (3) the fact that routine matters were handled in the guidance period, thus minimizing interruptions of other classes

10. Most frequently mentioned strong points of the home room program by the teachers in School B were (1) opportunity for really knowing pupils, (2) development of good morale in the home room group, and (3) the advantage of the teachers' remaining four years with the group

11 Five weak points of the group guidance program were mentioned by at least four teachers in School A These were. (1) lack of clarification of responsibility and authority of the guidance teacher, (2) the large number of pupils assigned, (3) the fact that no credit was given for the

work, (4) indefiniteness of aims and methods, and (5) the separation of group guidance from instruction

12 Likewise certain weak points of the home room program were mentioned by at least four of the School B home room teachers These included (1) indefiniteness of aims and methods, (2) the practice of assigning home rooms to almost all teachers, (3) the difficulty of getting all pupils to take an active part in the home room, and (4) the lessening of interest in the home room program in the upper years of the junior high school

The University of Texas Study

An evaluation study which is not pretentious may still furnish indications as to whether or not a guidance program may be succeeding All guidance workers should be willing to undertake simple research designed to give at least a partial answer to the question, "Are we on the right track?" Such a study, and one that is commendable for its moderate tone, has been made by Blackwell [20]

Blackwell made an evaluation of the immediate effectiveness of the program carried on by the Testing and Guidance Bureau of the University of Texas Effectiveness was determined simply by "increase in the number of grade points earned by students who have come for guidance" [21]

At this bureau two interviews are held During the first, the student is led to express his felt needs The counselor usually recommends that the subject take various tests of interest, aptitude, achievement, and personality Following the psychometrics, certain special aptitudes are examined. These may fall in such areas as mechanical comprehension, spatial visualization, manipulative dexterity, artistic judgment, clerical aptitude, musical talent, and educational aptitude In the second interview it becomes the counselor's responsibility to interpret to the subject the results of whatever measures were applied

---

[20] Ernestine B Blackwell, "Evaluation of the Immediate Effectiveness of the Testing and Guidance Bureau of the University of Texas," *Journal of Educational Research*, IX (December, 1946), pp 302–308

[21] *Op cit*, pp. 302–303

In the study being reviewed, a comparison was made between the "guidance group" and a control group. Experimental-group criteria included the following. (1) The initial interviews of these students must have been held between the dates of September 1, 1944, and June 1, 1945 (2) Their scholastic aptitude must have been in the middle or highest one third (26 subjects in the highest one third, 14 in the middle one third, total of 40 cases) (3) Only sophomore and junior students were selected for study Similarly, on a random sampling for the control group, (1) 26 subjects ranked in the highest one third on the American Council on Education Psychological Test, 14 in the middle one third (2) The experience factor of semesters in the University of Texas was about the same (3) The same length of time intervened between the two semesters in which the grades were made

The mean number of grade points earned by the guidance group in the semester preceding guidance was 2 1, as compared to a mean of 2 6 for the semester following guidance The difference was significant at the 5 per cent level The mean gain in grade points of the guidance group in the semester following counseling over the semester preceding counseling was +0 39. The control group suffered a loss of 0 16

(1) The difference in grade points earned by the guidance group in the semester preceding guidance and in the semester following guidance could not have occurred by chance more often than five times out of one hundred. (2) The grade points earned by the guidance group were reliably greater than the grade points earned by the control group, and the difference is significant at the 1 per cent level.

Blackwell does not infer that the differences found were due to the guidance received and such a guidance outcome as increased motivation, although this may have been the case It is also reasonable to assume that two different types of personality were involved, those coming to the bureau for guidance probably having the greater intellectual curiosity. Realizing that many variables could not be controlled, Blackwell concluded cautiously that "only on the basis of the random sampling of forty subjects, there is a reliable difference in grade points

earned by the group receiving guidance as compared to the control group receiving no guidance, and that within the group receiving guidance, a significant gain in grade points has been made after guidance "[22]

Summary

Restricted to guidance, evaluation is nothing more than the process of determining how effective the school program is in caring for the interests, abilities, and needs of students The purposes of evaluation vary all the way from periodic checking to evaluation sufficiently comprehensive to appraise all significant aspects of the student's accomplishments

Confusion exists in the minds of some between "evaluation" and "tests and measurements" Standardized tests of skill and knowledge do not by any means constitute all the techniques of evaluation. To these should be added the case study and interview, the anecdotal record, autobiographies and student questionnaires, interest and adjustment inventories, rating scales, sociometric techniques, and the like Even samples of student's work have been proposed as a valuable evaluation technique

Loose terminology, however, does not have any great retarding effect on necessary evaluation research The inherent difficulties of evaluation are another matter To begin with, it is agreed that all common methods of evaluation have weaknesses Available data are often inadequate and incomplete It is sometimes impossible to obtain a sufficient amount of data, at other times it may not be possible to control conditions for an adequate test of the recommendations These are some of the reasons why no thoroughly conclusive guidance evaluation study has yet been made

The reader should remember that evaluative studies are made for a great variety of purposes and that they may employ a great variety of techniques Any guidance evaluation study is likely to reveal much valuable information. The first such study reported in this chapter had for its purpose the discovery of the

---

[22] *Op cit*, p 308

extent to which guidance activities were performed by *counselors,* as contrasted with any such activities handled by other school officials The technique employed was a check list In the second case the purpose was a follow-up study of junior high school students over a three-year period For this investigation it was necessary to develop a series of guidance tests and inventories The third study involved a comprehensive evaluation of two group guidance plans at the junior high school level. Again it was necessary to develop, especially for the investigation, certain guidance information tests, pupil judgment tests, tests on educational and vocational planning, personal data blanks, rating scales, and the like

The counselor activities study showed that counselors were performing fifty-eight activities to a satisfactory degree, and that thirty-nine were being somewhat neglected This might signify a reasonably satisfactory status for guidance, but it might also indicate considerable room for improvement. In the Kefauver and Hand study, or at least the part of it that dealt with experimental and control schools in two cities, the results of the follow-up investigation were not very conclusive. Would-be investigators should, therefore, be forewarned that the benefits resulting from an evaluation study may *not* be in direct proportion to the amount of time and effort which is put into it

While the results of Georgia Sachs Adams' study were also not entirely conclusive, the superiority of the home room plan over the guidance-teacher plan appears to have been well demonstrated. When research reveals a lack of pupil interest in a group guidance course at seven out of the eight grade levels, when pupils frequently name this course as one in which they see no point in what they are doing, and when all the guidance teachers and one half of the subject teachers feel that too much time has been assigned to the group guidance program in a school, changes are in order That the school system in question actually did make sweeping administrative changes following the publishing of this research is a tribute to those investigators who direct and interpret evaluative research for the purpose of improving their guidance practices

Questions and Problems

1. Why evaluate? Does evaluation have a really practical value?

2 How do factories judge their products? Is it necessary for them to do so?

3 What is the relationship of evaluation to a continuous revision of techniques and programs?

4 Is it so difficult to judge the outcomes of a guidance program? Why?

5. How successful would you say attempts have thus far been?

6 What sources should be consulted in attempting to establish criteria for deciding the worth of a guidance program?

7. In judging a guidance program, what criteria can be evolved from a knowledge of the community and what it needs?

8 Suggest a list of important criteria for judging a guidance program

9 Describe several published studies in which an attempt has been made to show how valuable the guidance program has been.

10 What have been the characteristic weaknesses of evaluation research?

11. If you had unlimited resources, what research would you plan in order to judge the outcome of a guidance program? Why?

12 Within the limits of reasonableness and practicality, what could you do?

Selected References

Aiken, Durward W "Counseling," in *Current Trends in Higher Education* Washington, D. C National Education Association, 1949, pp 19–25.

Arnold, Dwight L "Time Spent By Counselors and Deans on Various Activities," *Occupations,* XXVII (March, 1949), 391–93.

Barber, S E *Evaluating School Guidance* Buffalo, N Y Foster & Stewart Publishing Co, 1946, 102 pp

Bennett, Margaret E. "Evaluation of an Orientation or Group Guidance Program in a Four-Year Junior College," *Abstracts of Dissertations,* Stanford University, California (1937), 121–28

Blackwell, Ernestine B "Evaluation of the Immediate Effectiveness of the Testing and Guidance Bureau of the University of Texas," *Journal of Educational Research,* IX (December, 1946), 302–308

COLLYER, G A "Evaluating Junior College Guidance Programs," *California Journal of Secondary Education,* XIV (October, 1939), 353–57

DUNLAP, J W "Evaluation of Data in a Personnel Program," *Journal of the American Association of Collegiate Registrars,* XVII (July, 1942), 493–503

EDMISTON, V "Evaluation Study in Relation to a Faculty," *Educational Administration and Supervision,* XXX (May, 1944), 278–88

ERDT, M H "Evaluation is the Goal," *Education,* LXVI (February, 1946), 292–95.

EURICH, ALVIN C "Changed Conception of Evaluation," *California Journal of Secondary Education,* XIV (October, 1939), 331–33

FATTU, NICHOLAS "Evaluation Program in Individual Orientation," *Studies in Higher Education,* (Biennial Report of the Committee on Educational Research) Minneapolis, Minn University of Minnesota, 1941, pp 108–130

FROELICH, CLIFFORD P *Evaluating Guidance Procedures* Washington, D C U S Office of Education (Misc No 3310), January, 1949, 26 pp

HOPPOCK, ROBERT "How to Check Up on Your Guidance Program," *School Management,* XV (March, 1946), 380

JONES, W J, and RATHS, LOUIS *Ohio Teaching Record Anecdotal Observation Form* Columbus, Ohio Bureau of Educational Research, Ohio State University, 1940, 12 pp

KEFAUVER, GRAYSON N, and HAND, HAROLD C. *Appraising Guidance in Secondary Schools* New York The Macmillan Co, 1941, 260 pp

KRUG, EDWARD A "Cooperative Approach to Evaluation," *California Journal of Secondary Education,* XIV (October, 1939), 346–52

LORGE, IRVING "Evaluation The New Stress on Measurement," *Teachers College Record,* XLII (May, 1941), 667–79

LORIMER, MARGARET "Appraisal of Vocational Guidance," *Journal of Higher Education,* XV (May, 1944), 260–67.

LOS ANGELES COUNTY SCHOOLS, Division of Research and Guidance *Guidance Handbook for Secondary Schools* Los Angeles California Test Bureau, 1948, 243 pp

NESBITT, ALLEGRA "Is Your Guidance Program Adequate?" *School Activities,* XVI (March, 1945), 259–60

OHLSEN, M. M "Guidance Concept of Evaluation," *Bulletin of the National Association of Secondary School Principals,* XXXII (April, 1948), 143–50

PATERSON, D G, and CLARK, K E "Students' Judgments of Counseling," *Journal of Higher Education,* XIV (March, 1943), 140–42

RATHBUN, JESSE E "San Francisco's Annual Evaluation of Counseling and Guidance," *Clearing House,* XX (October, 1945), 95–97

REMMERS, H H, and GAGE, N L *Educational Measurement and Evaluation* New York Harper & Bros., 1943, 580 pp

SACHS, GEORGIA M *Evaluation of Group Guidance Work in Secondary Schools* Los Angeles University of Southern California Press, 1945, 120 pp

SIMS, V M "Educational Measurements and Evaluation," *Journal of Educational Research,* XXXVIII (September, 1944), 18–24

SMALLENBURG, HARRY "Evaluating Pupil Progress," *Educational Leadership,* II (April, 1945), 290–93

SMITH, EUGENE R, and TYLER, RALPH W *Appraising and Recording Student Progress* New York Harper & Bros, 1942, 550 pp

STONE, C H "Evaluation Program in Vocational Orientation," *Studies in Higher Education,* (Biennial Report of the Committee on Educational Research) Minneapolis, Minn University of Minnesota, 1941, pp 131–45

STOTT, MARY B "Appraisal of Vocational Guidance," *Occupational Psychology,* XVII (January, 1943), 6–16

TIBBITS, F L "Vocational Guidance and the 1940 Census," *Occupations,* XXII (January, 1944), 252–57

TOVEN, J RICHARD "Appraising a Counseling Program at the College Level," *Occupations,* XXIII (May, 1945), 459–66

TRAVERS, ROBERT M W "Critical Review of Techniques for Evaluating Guidance," *Educational and Psychological Measurement,* IX (Summer, 1949), 211–26

TRIGGS, FRANCES O, and BIGELOW, ELLEN B "What Student Nurses Think About Counseling," *American Journal of Nursing,* XLII (July, 1943), 669–72

WILLIAMSON, E G, and BORDIN, E S "Evaluating Counseling by Means of a Control Group Experiment," *School and Society,* LII (November, 1940), 434–40

——— "Evaluation of Vocational and Educational Counseling A Critique of the Methodology of Experiments," *Educational and Psychological Measurement,* I (January, 1941), 5–24

WILSON, FRANCES M *Procedures in Evaluating a Guidance Program* New York Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1945, 210 pp

WRENN, C GILBERT "Evaluation of Student Personnel Work, A Critique of the Guidance Movement," *School and Society,* LII (November, 1940), 409–14

Chapter 17

PLACEMENT AND FOLLOW-UP

No longer can the schools consider their task finished when a student graduates, withdraws, or is dropped The broadened concept of guidance that has accompanied the diversification of job opportunities has led to the realization that job training alone is not enough Preparing for work is one thing, getting and holding a job, although related, is another problem Placement requires not only assistance in getting a job, but also suggestions to teachers regarding the kinds of preparation needed for most successful vocational adjustment Information gained from contacts with employers is also needed for the efficient administration of the vocational guidance program

VOCATIONAL PLACEMENT AND ARTICULATION

On first thought it may seem that the chief function of a placement service is that of placing graduates and former students in full-time jobs This function may represent its most objective measure of success, yet if this is its only criterion much of the task of getting employer and job seeker together is merely clerical in nature Occupational orientation leading to actual placement in a job is another placement function which should be continuous in its operation from the early grades to the student's last year in school

Some of the problems and questions which arise in a program for the vocational adjustment of school graduates and former students are these (1) Shall the schools maintain a placement service? Some may answer this question in the affirmative, yet certain authorities hold that placement is not a legitimate function of schools (2) If the schools have a placement officer, what is his rank in the administrative organization? This ques-

tion involves the administrative policy of centralization versus decentralization It also raises the question of locating placement offices at the Board of Education Building, in connection with state employment services, or in the various terminal units in the school system (3) Is it feasible to coordinate school services with local city, state, or private employment agencies?

These and numerous minor questions complicate efforts to institute a placement service It may be helpful, therefore, to consider the steps which have been taken to solve these problems in the city school system with which two of the authors are connected[1] A brief outline is presented

This plan required the cooperation of two social agencies, both of which were concerned with the problem of vocational adjustment of youth the public schools and the State Department of Employment A number of other cities have attempted to coordinate their Federal and State Employment Services with their public school guidance program.[2] However, these arrangements have usually been of a temporary and experimental nature and not permanent combinations of previously established community agencies. Pasadena has naturally profited by the experience and techniques developed in other places

The story of this community's employment and counseling service dates back to 1919 In that year the Pasadena Vocations Bureau was founded Since that time the board, director, and staff of this bureau have worked steadily to acquaint civic leaders with community employment problems and to enlist their interest and cooperation in their solution[3]

The bureau began as a vocational placement and counseling service for women and girls, but as time went on similar services for men and boys were added At first the work was supported by donations and voluntary memberships When the Community Chest and Council were organized in 1921, it became a "Chest" agency and was supported by that organization until 1938

---

[1] Pasadena, California.

[2] L A Emerson, "Federal Relations to Vocational Guidance," *Occupations*, XVI (June, 1938), pp 813–18

[3] W M Hausam and G V Moser, "Community Vocational Guidance for Adults," *Occupations*, XV (February, 1937), pp. 399–402

From the beginning the Vocations Bureau worked toward the establishment of professional standards for all community placement and counseling The city became accustomed to the idea of combined placement and counseling—a preparation which made the community receptive to such a service.

On the staff of the Vocations Bureau were two trained counselors to carry on the work of vocational adjustment A counselor of their own sex was available to women and girls as well as to men and boys. From time to time persons not seeking employment came to the center for other services offered by the bureau However, many who came for placement service only proved to have vocational and personal problems which needed to be solved before placement could be satisfactorily attempted. Through the Community Chest and Council (mentioned earlier in the chapter), the two counselors in the Vocations Bureau had available the services of twenty-two organizations to help these people solve their various problems

The State and Federal Department of Employment.—When the Wagner-Peyser Act was passed (1933) and the State of California accepted its provisions, Pasadena was ready to take advantage of a city-state-federal plan of cooperation which the United States Employment Service made possible Its officials realized that in actual practice the normal operation of such an employment service would include a certain amount of vocational guidance They also felt that the enlarged employment service would be a help to (1) applicants who need to wait long periods before employment opportunities occur in fields where they have had significant and recent experience, (2) young persons who have had no opportunity to obtain work experiences, and (3) those who have been dislodged from occupations in which there is no immediate demand for workers.[4]

The community service thus established under the Wagner-Peyser Act was a combination and enlargement of existing services. The three units merged were (1) the Vocations Bureau

---

[4] L E Miles, "No Experience, No Job—So What?" *American School Board Journal*, XCVII (July, 1938), pp 19–21.

(the work of which has just been described), (2) the Municipal Employment Office for Women, and (3) the Municipal Employment Office for Men. The community service thus established was known as the Pasadena Employment and Vocations Bureau On January 1, 1938, this bureau ceased to be merely a local employment service, and in accordance with a plan of long standing became affiliated with the California State Department of Employment of the United States Employment Service It is now known as the local office of the State Department of Employment

Among the several divisions of the Department of Employment, two are of special importance to the plan of coordination—the Employment Service and the Unemployment Compensation The first division is obviously concerned with placement service The state began paying unemployment benefits in 1938 through the local office Those who receive these benefits must register with the local office for placement, hence a supply of good workers is always available These applicants usually possess skills which have not deteriorated through disuse and consequently are employable Since it encourages the replacement of experienced adults by youth, this procedure assists in the placement of young people who are just out of school [5]

Thus far we have been concerned largely with community services offered free to out-of-school adults No mention has been made of the placement and counseling services which have been offered by the schools to their students and graduates Certain graduates have sought the assistance of the local office of the State Department of Employment, and some have been sent by the school authorities In all such instances the schools furnished the department with the complete school records of the applicants from the date of their entry to the time of application for service. However, no systematic cooperative program has been organized to effect the vocational adjustment of the youth of the community who are leaving school [6]

---

[5] H P Rainey, "Guidance and Placement for America's Youth," *Occupations*, XV (June, 1937), pp 838–44

[6] See Chapter 15 for a discussion of counseling services for out-of-school youth

Placement by Teachers.—For several years teachers in the Pasadena City Schools have shared in the responsibility of finding jobs for their graduates, especially those who are prepared in certain semiprofessional and craft areas. Success has attended these efforts This is evidenced by the fact that in some vocational fields 80 per cent of all graduates have been placed in remunerative positions within a few weeks after graduation In the case of airplane mechanics and beauty shop operators, the percentage of placements has mounted to as high as 90 per cent of the graduates The same results have been achieved in certain areas of business training, such as accounting, merchandising, and secretarial work.

However, until recently the schools have not been in a position to establish a full-fledged employment agency Moreover, many school officials have held that such a school agency would not be desirable They felt that it would involve too much useless duplication with agencies already existing in the community Such duplication might result in inconvenience to the employing public as well as in conflict between the various employment agencies Such a policy might also result in apparent rivalry between youths and adults for available jobs Most youths are too cognizant of present employment conditions to wish to secure jobs at the expense of older men and women The employment coordinators have adopted a policy designed to prevent such an outcome The functions of an employment service are obviously not performed if, in getting a youth a job, an older person is displaced

The Junior Placement Service—Individual appointments with the school's employment coordinator were arranged for students who withdrew from school before graduation if they desired it. Such a step was possible because all who left school during the semester were required to see their counselors before withdrawing Each semester a group meeting was called two or three months prior to graduation for all students who were not returning and who desired the assistance of the placement service During the early part of the semester an *elective* course was offered in employer-employee relationships which stressed

employment opportunities, job requirements, and the best way of applying for positions.

At the group meeting a one-act skit dramatizing good and bad employment interview techniques was usually presented The student was asked to fill out portions of a blank which became his file card in the employment office (See Figure 15) He was also given two rating blanks and asked to designate two instructors in his major courses who were best qualified to judge his work (See Figure 16) The employment coordinator addressed the group on some phase of the problem of getting a job At the close of the meeting a school secretary scheduled an individual appointment with the coordinator for each student.

Five employees (three full-time coordinators, a part-time psychologist, and a full-time clerk) developed the plan One coordinator specialized in the trades area and acted as supervisor of apprentices Another coordinator, employed by the State Department, worked from the same offices in the interests of the youth of the community who were not products of the Pasadena schools The Board of Education employed the coordinators, the psychologist, and the clerk, the State Department of Employment furnished the necessary office space and furniture The local employment office was restricted in its area to a population group of 200,000, but the school coordinators had the entire Southern California metropolitan area in which to operate.

During the student's entire school career the guidance service continued its work of helping him determine his own capabilities and become informed concerning job opportunities It also assisted him in making suitable vocational choices and in securing appropriate training for the type of employment contemplated

Accumulated data relating to these students and their school records were kept in school files A cross reference was provided between these files and those of the main employment service. Thus no matter where a name appeared, whether in or out of school, the person concerned had access to all job opportunities This information was extremely useful in finding

PRINT YOUR NAME AND ADDRESS

Last name | First name | Middle name

DO NOT WRITE IN THIS BLOCK

Educ | Age | Date

Local address

Telephone No

W M N F O | Ind Code | Div | Classification

Unemp | Occ code

Previously employed Yes No | Yrs U S Yrs city | Citizen

Where were you born? City | State or country | When were you born? Month Day Year | Parents nationality | Check religion Catholic Jewish Protestant | Kind of work wanted Permanent Temporary Check Full-time Part time

Height ft. in Weight lbs | Check health Good Below av'ge Excellent Poor | Check Are you Single Widowed Divorced Married Separated | Give number of dependents, if any Total Partial | Check Do you live at home? With other relatives? Or board? | Do you own an auto? Have a driver's license?

State father s name | What is father s usual occupa ion? | State mother s occupation, if any | How many brothers and sisters have you? Older Younger

Can you type? How many words a minute? | Do you know shorthand? How many words a minute? | What office machines can you operate?

What factory machines can you operate? | Can you read blueprints? Can you read micrometers? | State drafting experience, if any

Have you done practical nursing? | Have you taken care of children? | Have you served meals? | Have you done laundry work? Hand? Machine?

What size uniform do you wear? | Do you own a uniform? | Have you cooked? In full charge? Ass't? | Can you live at the place where you work?

Name brothers and sisters over 16 | Occupation | Name brothers and sisters over 16 | Occupation

1 | | 3 |

2 | | 4 |

Fig 15*a*—United States

EDUCATIONAL RECORD

Circle highest grade completed

Grammar or grade school
1 2 3 4 5 6 7 8

High school
1 2 3 4

College 1 2 3 4 — Grad study 1 2 3 4

Name of last grammar or high school attended | Date left | Age left | Reason for leaving

What course did you take? | Names of teachers who knew you best

Subjects liked best | Subjects liked least

List below ary vocational subjects (stenography woodshop etc) you have studied

Name of school	Subjects	Number of semesters

What languages, besides English do you
Speak?
Read?
Write?

Are you willing to leave the city?

State physical handicaps

Extra curricular activities (sports school paper etc) and special honors

Name of college | Course | Years completed | Degree | Date left | Reason

Name of evening school | Course or subjects | Months

Further school plans | Hobbies

Employment Service blank (*Front*)

EMPLOYMENT RECORD

				Renewal Dates
Employer—Last regular job	Position held and duties		Length of employment	
Address			Date left	
Kind of business	Under whom did you work?	Reason for leaving	Rate of pay	
Employer	Position held and duties		Length of employment	
Address			Date left	
Kind of business	Under whom did you work?	Reason for leaving	Rate of pay	
Employer	Position held and duties		Length of employment	
Address			Date left	
Kind of business	Under whom did you work?	Reason for leaving	Rate of pay	
What other kinds of working experience have you had?				

FIG 15b —United States

DO NOT WRITE BELOW THIS LINE

REFERRALS

Date notified	Referred	Employer	Position	Dur	Rate of pay	Result	Remarks

REMARKS

Junior Counselor

Form U S. E. S. 317

U S GOVERNMENT PRINTING OFFICE

Employment Service blank (*Back*)

Student's Name Date

Address Telephone

Date leaving school

Counselor

Instructors in Major Course who are best qualified to judge your work

1 First Choice 2 Second Choice

STUDENTS ARE NOT TO WRITE BELOW THIS LINE

QUALIFICATION RATINGS

To Faculty Members

For the confidential information of the Employment Bureau, we would appreciate your frank opinion of this student's qualifications under the headings given below Please indicate by underscoring your rating If information is inadequate, omit rating or indicate by question mark

A APPEARANCE

1 Dress Careless Extreme Good Taste Neat
2 General Appearance Unattractive Passable Pleasing Attractive

B ABILITY AND INDUSTRY

1 Initiative—
Needs Constant Supervision Routine Worker Fairly Progressive Resourceful

2 Quantity of Work—
Very low output Low output Average output High output
Consider amount of work accomplished and speed of doing it

3 Quality of Work—Many errors Careless Passable Very accurate
Consider accuracy and thoroughness

4 Ability to Learn Dull Slow Average Exceptional
Consider quickness to learn and retain new methods, ideas, directions, capacity to think

5 Dependability Unreliable Usually Reliable Reliable Always Dependable
Consider reliability, willingness, consistent industry

6 Cooperativeness—
Difficult to Handle Indifferent Considerate Works well with others
Consider ability to get along with people in various capacities, willingness, loyalty

C PERSONALITY—Repellent Displeasing Pleasant Exceptional

D CHARACTER & REPUTATION

E HOW LONG HAVE YOU KNOWN THIS STUDENT?

F FOR WHAT WORK DO YOU THINK APPLICANT BEST FITTED?

G GENERAL REMARKS OR SUGGESTIONS

Signed

Instructor or Counselor

Fig 16—Qualifications rating blank

suitable jobs for the student The State Department of Employment supervised the work of contacting employers and making placements

The Pasadena City Schools Placement Bureau

The Junior Employment and Counseling Service, sponsored jointly by the California State Department of Employment and the Pasadena Board of Education, met with considerable success and filled a real need until the war came along and changed everything Everyone is familiar with the ease with which jobs could be obtained during the war years, not only by youngsters but by those of rather advanced years and a host of others who in normal times would be considered "unemployable" There was little need for a separate agency to make placements for the graduates and dropouts from the local schools Indeed, employment opportunities were so good that school authorities had to devise new plans for keeping students of high school age *in* school[7] In 1942 the Junior Employment Service was discontinued and Pasadena was left without a school-sponsored placement bureau until the summer of 1947 when the Board of Education authorized the establishment of the Pasadena City Schools Placement Bureau[8] to meet the normal postwar needs of youth

Some Basic Principles—At the outset there was almost unanimous agreement on five basic principles: (1) that the placement service should be a general one, not limited to students having any one type of training or majors from any particular department or division of the school, and open to part-time students, full-time students, former students, and graduates, (2) that the placement service should have the full cooperation of all other school agencies, such as those dealing with guidance, records, and personnel, in order to make possible the better and more accurate screening of applicants, (3)

[7] The "Lockheed 4–4 Plan" which flourished in Southern California was such a plan The student alternately attended school for four weeks and worked four weeks in the aircraft industry

[8] The authors are greatly indebted to Mr Milton C Mohs, Supervisor of the Placement Service, for much of the material in this section

that the placement service should be autonomous in organization and action while at the same time seeking the good will and cooperation of the California State Employment Office and other public agencies, (4) that the placement service should be centralized at the Board of Education offices, but that, for the convenience of students, a branch office be maintained at each of the junior colleges, [9] and (5) that the placement office should serve as a clearing house for all job orders and all job applicants There was no thought that certain department and division heads as well as instructors would not maintain their contacts with business and industry, as they had always done, and thus keep abreast of changing demands and techniques It was considered most important, however, that any job orders they received, or referrals and placements that they should like to make, be cleared immediately with the supervisor of placement

The Cooperative School-Work Program.—The work of the placement office divides itself naturally into three parts The first of these is the cooperative school-work program In this program the student works part time on a job for which he receives pay as well as school credit Both the guidance department, of the junior college in question, and the placement office are concerned in this arrangement

The counselor schedules the student who has a part-time job for "Work Experience," the same as for any course in the institution Instead of "signing into" a class, the student reports at the beginning of the semester to the placement office Here he fills out the form shown in Figure 17, "Petition for Credit for Work Experience" This office acts as the coordinating agent between employer, student, and school Before the end of the semester the employer is asked to evaluate the quality of work that has been done by the student Figure 18 shows a form which is used for this purpose The regulations call for a minimum of ten hours per week in an approved work situation over a period of a semester Most students put in more time but cannot receive additional school credit for doing so. If the placement office receives assurance from the employer that the

[9] These are John Muir College and Pasadena City College, both in the city of Pasadena and about four miles apart

PASADENA CITY SCHOOLS
PASADENA CALIFORNIA
Petition for Credit for Work Experience

Name ______ LAST ______ FIRST ______ MIDDLE Date ______

Address ______ Telephone ______ Grade ______

School ______ Sex ______ Age ______ Birth date __ / __ / __

A Fill out with work coordinator—

I petition for school credit for what I am doing and learning on the job described below

1 Employer ______ Address ______

2 Number of hours of work per day (M-F) ______ (Sat) ______ (Sunday) ______

3 Duties ______

4 I expect to learn the following things ______

(Signed) ______ APPLICANT ______ WORK COORDINATOR

127—6—9/47

Name ______ LAST ______ FIRST ______ MIDDLE

B Fill out with counselor—

1 Subjects being taken

Hour	Subject	Units

2 Educational plan ______

3 Occupational plan ______

4 Total credits earned to date ______

5 Suggested department or subject for work experience credit ______

(Signed) ______ COUNSELOR

C Committee action

Approved ______

Denied ______

Referred to coordinator ______

Credit to be allowed ______

(Signed) ______ CHAIRMAN

FIG 17—Petition for credit for work experience

student's work was satisfactory, he is granted two units of school credit for each semester of work (sixteen units of credit being the normal semester program or load) Such outcomes from this program as occupational orientation, development of

PASADENA CITY SCHOOLS COOPERATIVE SCHOOL-WORK PROGRAM
PLACEMENT BUREAU

Report on Student Worker by Person Who Knows His Work Best Date ____

Name of Student ____ Job Held ____ School ____

Name of Employer ____ Address ____

Name of Person Filling Out This Form ____ Position ____

1 How long has this student been working for you? ____ mos

2 If he is no longer working for you, please check reason below.

____1 Work completed

____2 Student left voluntarily
Reason

____3 Student dismissed
Reason

3 Date when employment began

4 Date employment terminated
(Even if student is no longer working for you, please fill out remainder of form)

5 How much supervision does the student have on the job? (Check one)
Almost constant ____ (1) Occasional ____ (2) None ____ (3)

6 Would you consider this person for permanent employment or recommend him to another employer who valued your opinion?
Yes ____ (1) No ____ (2) Uncertain ____ (3)

7 Please write on reverse side of this form any comments concerning this student worker or concerning relationships between your company and the schools

8 Please rate this student worker carefully on the following points Compare him with other inexperienced workers you have had

For each item encircle the number (1 2 3, 4 or 5) which represents your best judgment

To what extent does this student-worker

	Unsatisfactory	Below average	Average	Above average	Superior
a *Report for work regularly?*	1	2	3	4	5
b Come to work on time?	1	2	3	4	5
c Show a good production record?	1	2	3	4	5
d Follow directions?	1	2	3	4	5
e Do his work accurately?	1	2	3	4	5
f Show interest in his work (do more than asked to do)	1	2	3	4	5
g Have a business-like attitude?	1	2	3	4	5
h Meet the public well?	1	2	3	4	5
i Get along with his fellow-workers?	1	2	3	4	5
j Take criticism?	1	2	3	4	5
k Meet requirements of job in regard to neatness and grooming?	1	2	3	4	5
l Work well without supervision?	1	2	3	4	5
9 How satisfactory, in general has students service been?	1	2	3	4	5

Would You Be Willing for This Form To Be Shown To The Student Worker and Used As A Basis for A Conference with Him? Yes ____ (1) *No* ____ (2) *If you wish, your reply will be kept confidential*

137 9--3 49

FIG 18—Report on student worker

proper work habits and skills, and learning the values of dependability and loyalty doubtless make the later transition from school to full-time employment much easier for the student

Part-Time Workers.—A second function of the employment office is the placing of part-time workers When the placement office is located within a school and when conditions of employment are normal, this function is likely to account for the greater portion of the placement bureau's time The demand for this kind of work, for example, particularly by the older students, considerably outweighs the number of jobs available Yet it is often the only means by which students are enabled to remain in school, and, at the same time, the service rendered to employers is considerable During the first year of operation, the Pasadena City Schools Placement Bureau secured positions for 1,664 junior college students in part-time jobs They worked at everything from gardening and baby sitting to accounting and commercial art

The Christmas work program represents a special phase of part-time work and one which can give considerable trouble unless handled intelligently Each year literally hundreds of students ask to be excused early before the Christmas vacation in order to work in downtown stores. Every sort of economic need that can be imagined is presented at this time with these requests In order not to disrupt the normal routine of classes prior to the Christmas holiday, these requests for early leaving must be controlled

One device for this purpose is a "promise of employment" form which the student obtains from the placement office and then takes to an employer for his signature The next step is to set up at this point special classes to train these students for their Christmas work duties The third step is to issue excuses on a given date only to those students who have met both requirements After this date no excuses are issued for any reason It has been found that this procedure cuts the mass of prospective workers down to a reasonable number, renders a service to both students and employers, and fosters good public relations

Placement of Graduates.—The third and perhaps most important function of the employment bureau is the placement of graduates. To this must be added the responsibility of placing in suitable positions students who drop out prior to graduation or former students, whether graduated or not, who are not well adjusted in their present positions. It is trite to remark that in these latter instances suitable placement will be much more difficult. Retraining or additional training on either a full-time or part-time basis will frequently be indicated. For this reason it is of utmost importance that the counseling staff be involved so that the student may be enrolled in proper courses as a condition of immediate or future placement.

It has been found that graduates of so-called terminal curricula are the easiest to place. These curricula lie largely in the fields of art, business, and industry. Representative positions that twelfth grade (high school) or fourteenth grade (junior college) graduation may adequately prepare the student to accept are the following: photography, interior decoration, stenography, bookkeeping, salesmanship, filing, machine calculation, drafting, building construction, machine shop, auto mechanics, industrial technology, journalism, forestry, nursing, and cosmetology.

Graduates of all such curricula are regularly interviewed by the placement supervisor during their last semester of formal schooling. From information obtained at this interview, together with that gathered from school records and the recommendations of instructors, personnel data are assembled and mailed to employers who are thought to be interested in the individual qualifications of these prospective employees. Two pages are stapled inside an attractive folder that may be carried in a coat pocket. The first page informs the employer that certain students are terminating their formal education in June (sometimes February) and may be considered for permanent employment. Details of contacting these students through the placement bureau, as well as certain other matters, are explained. The second page lists an individual student's name, age, height, weight, race, level at which he is being graduated, subjects taken in a major field, stated job preference, and a rating by

his major instructor. It is reported that the reception accorded these personnel folders has ranged from indifference to enthusiastic endorsement. One employer carries the folder about with him and shows it with pride to his friends as an illustration of "what the schools are doing."

Accepting the philosophy of Ward,[10] the aim of the placement service has always been not just the securing of a job but helping the individual to find *the job* for which he is best suited. Poor placement hurts both the employer and the student and reflects directly on the placement bureau. In order to check on the effectiveness of placements, the supervisor visits most of the employers during the summer. Very few cases of dissatisfaction resulting from placements have been discovered. Credit is certainly due to employers who display understanding and patience in dealing with beginning workers. At the same time the effectiveness of teachers "preparing the boy for the job" and working hand in hand with the counseling staff is being demonstrated.

Placement in General

There are still many unsettled questions in the realm of placement. One of these is whether the placement service shall be operated by a local, state, or federal employment office or by the schools, or by combined sponsorship. Germane and Germane[11] have pointed out that one of the former is (1) usually well financed and efficiently supervised, (2) well informed regarding occupational opportunities and trends, and (3) able to conduct the necessary testing services. On the other hand, these writers have shown that the school knows more about the abilities of youth than any other agency. Furthermore, the educational value accruing when the school makes effective attempts to discover vocational opportunities and to disseminate this knowledge to students is not to be taken lightly. Despite an experience extending back more than thirty years,

---

[10] Phebe Ward, *Terminal Education in the Junior College* (New York: Harper & Bros., 1947), p. 123.

[11] C. E. Germane and E. G. Germane, *Personnel Work in High School* (New York: Silver Burdett Co., 1941), pp. 369–70.

Pasadena is still unable to say that any of its plans was or is the one best plan Erickson [12] recommends the close coordination of school placement services with those of the United States Employment Service Whatever plan may be adopted, a spirit of cooperation among all agencies concerned with placement is vitally necessary It should be stated here that although the Pasadena City Schools Placement Bureau and the California State Department of Employment are now separate and autonomous, they do cooperate wholeheartedly in the placement of local youth

Along with some others, Erickson and Smith[13] feel that placement provides the connecting link between school and the next situation that the student is planning to enter. Thus, in addition to part-time education or training and placement on a job, both of which have already been discussed, placement may include college selection and entrance With this thesis the authors do not take issue It simply amounts to a much broadened concept of placement which, if accepted, will furnish a powerful argument for realistic counseling on the part of guidance workers having in their charge countless numbers of college-bound students enrolled in university preparatory courses

Nature and Scope —In summarizing the nature and scope of placement services, Chisholm [14] has made eleven excellent statements which are quoted below According to him the placement service should do the following things

1. Keep, or have ready access to, the individual's guidance record

2 Sometimes supervise, and at other times cooperate, in planning and carrying on visits to industry

3. Cooperate appropriately with legitimate community agencies concerned with the placement of former students

4 Maintain a relationship with parents that is conducive to the most efficient placement service.

---

[12] C E Erickson, *Basic Text for Guidance Workers* (New York Prentice-Hall, Inc, 1947), p 440

[13] C E Erickson and G E Smith, *Organization and Administration of Guidance Services* (New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1947), p 8

[14] L L Chisholm, *Guiding Youth in the Secondary School* (New York American Book Co, 1945), pp 288–89

5 Counsel students on problems pertaining to securing and making progress in their chosen vocation

6 Maintain close cooperation with business and industry interested in the employment of youth

7 Carry on the placement service of the school in such a way that it is equally available to all youth who do not continue their formal education beyond high school

8 Supervise those parts of follow-up studies of former students that pertain to the placement service

9 Counsel with officials who are responsible for the vocational guidance and training of youth concerning problems that are of mutual interest

10 Participate in decisions concerning the issuing of work certificates.

11 Participate in the public-relations or social-interpretations program of the school

Follow-up Procedures

A follow-up study of the student's occupational adjustment after actual placement or after leaving school is an important phase of the guidance program It will be discussed both from the standpoint of the value of such a service and in terms of techniques for its implementation.

Follow-up procedures have a very logical connection with the total program of guidance They represent an evaluation of the success of the entire educational program—not only of its guidance phase but of instructional offerings as well If one of the proofs of educational success is in the vocational adjustment of youth, the follow-up of former students becomes an important function

There are two essential aspects of follow-up procedures (1) a questionnaire to all former students whether graduates or dropouts and whether placed in jobs or not, and (2) a check among employers regarding their degree of satisfaction with products of the school system The first aspect is properly a function of the guidance staff, the second is the work of the vocational placement director The combining of information secured from both aspects of the follow-up procedure is a matter calling for the cooperation of guidance, placement, and instruc-

tional personnel Such cooperation is vital to the success of the program and to the redirection of future efforts

Merits of a Follow-up System.—Returns from follow-up studies should prove a source of valuable information in connection with curriculum revision. Too often graduation is comparable to the pioneer days when hardy men sailed for China, Alaska, or some other far-off port We frequently hear no more from the graduate unless, perchance, he returns years later "laden with silks or gold" Few meet with distinguished success and others are not heard from at all. The public points with pride to its successful members, but if it were in possession of a total picture of the adjustment of its school graduates, it might view with some alarm the policies and procedures of the school

Secondary schools are greatly in need of accurate information concerning the vocational avenues which students follow from graduation to whatever economic and social station in life they finally attain They should at least be in possession of data concerning the student's experiences during the five or six years following graduation If counselors were able to anticipate what experiences and opportunities lie ahead, such information would be helpful in dealing with students who are still in school

A knowledge of the activities of graduates for several years subsequent to leaving school might reveal the types of information and skills that are useful immediately upon graduation Areas in which training in unmarketable skills is being provided might be discovered. Important fields in which no training is offered might also be disclosed Students often choose careers without adequate knowledge of the skills and personal qualities involved in their choice The field of stenography, which so many girls apparently choose without much thought, could be cited In this vocation the number of applicants at the beginning of training far outnumbers the opportunities available [15] This information could be used to discourage students from making futile choices of this kind

[15] J E Trabue, "Is the Commercial Department Selling Its Product?" *Business Education World*, XVIII (June, 1938), pp 783–86

Who "buys" the product of the schools? Follow-up files should not only include a complete listing of former students, but they can also be made to yield an index of the employers who are consumers of this product A list of unadjusted or dissatisfied former students provides a source to which the placement office can refer in effecting needed adjustments as opportunities arise

As has been mentioned previously, comprehensive information concerning groups of former students is of real value in the guidance of youth who are facing or reconsidering vocational and curricular choices An example of this from the experience of two of the present authors is cited. In introducing terminal curricula in the technical training areas for young men, one of the guidance problems encountered was the reluctance of boys to select terminal junior-college curricula in preference to the four-year degree curriculum in engineering Two factors apparently contributed to this situation (1) Over a period of years the students had become familiar with the traditional professional curricula and the apparent social prestige connected with them (2) They had no knowledge of the vocational experiences of graduates from the semiprofessional and technical fields

Follow-up studies of graduates showed that for three out of every four *of the employment opportunities available* in this area, an adequate preparation could be obtained in two years Such data ultimately led to the introduction of terminal training for men in many areas other than technology Even with follow-up information a period of years has been required to overcome the tendency of students to discount terminal technical curricula

The benefits of a systematic follow-up plan can be summarized as follows:

1 For the graduate The follow-up questionnaire enables him to register with the employment service, and hence to be apprised of better opportunities than the job he now fills, or, if unemployed, to be placed at the earliest opportunity Knowing what value these follow-up studies have been to them while still in school, graduates are usually glad to give their impres-

sions of changes which might have been made in the school offerings or which might be effected in the case of future students

2 FOR THE COUNSELOR The follow-up serves as a check on the effectiveness of his guidance Even though clinical procedures, as outlined in Chapter 15, are not possible for all students, an approach to this method of guidance is made possible by returns from follow-ups By having actual statistical information concerning outcomes that follow certain guidance procedures, the counselor achieves a degree of confidence in his work and a feeling that he is proceeding on a professional basis

Firsthand data are gathered concerning employment and occupational information which supplement and bring up to date the readings and visitations which a counselor makes in this field If several graduates report a similar situation in the same area of work, some knowledge of trends in business practices can be gained As has been mentioned before, the use of such information in group approaches to guidance is equally valuable

3 FOR THE PLACEMENT OFFICE An up-to-date file of graduates and former students, both placed and unplaced, provides an opportunity to fill vacancies with the right man for the right job. At the same time the placement officer is in a position to adjust the unadjusted to vocational life and to see that merited promotions are made

4. FOR THE SCHOOL ADMINISTRATION OR CURRICULUM COORDINATOR Valuable information is gained for the revision of the curriculum Follow-up studies need not focus on the adequacy of the vocational training curricula alone, but may cut across every area of adjustment, whether vocational, avocational, emotional, physical, or social By considering the implementation of such a guidance procedure and the forms which might be used in such an undertaking, one may get a much better picture of how it operates.

A Systematic Follow-up Plan.—It should be profitable to study the following groups of former secondary school students

1 Graduates of the Junior College or the Senior High School
2 Graduates of the Junior High School
3. Students who have dropped out at various levels

The experience of various institutions employing successful follow-up plans indicates that a study of the after-school adjustment of students for a five-year period by means of a simple and easily marked questionnaire (see Figure 19) is feasible This is usually done at intervals of one, three, and five years after graduation (or last date of attendance). Figure 20 presents a time schedule indicating the years in which the follow-up study for each graduating class might well be made

By looking down any one of the columns it can readily be seen that when this plan is in force there will be no year in which more than three classes will require investigation If the institution is a three-year school and students are assigned to counselors on the basis of all those entering with a certain class or year, each counselor will have only one class to study in a given year—not an impossible task

If counselors are assigned on a vocational or curricular major basis, the amount of such work will be reduced proportionately in terms of students majoring in each field

Experience demonstrates that if proper techniques are used in the construction and mailing of questionnaires, the first returns will approximate 60 per cent; the second returns, following a card reminder, will increase the total to about 90 per cent, and if it seems justified, another reminder (by telephone if possible or by another card) will probably bring the total to 95 per cent. Beyond that point it is probably not worth while to expend effort on questionnaires Many counselors might be satisfied with the original 60 per cent return However, since the second group will frequently return some particularly useful information, it should not be neglected First responses are likely to come from the best adjusted and most enthusiastic alumni It may require considerable effort to secure replies from those who are less successful A discussion of the results of previous follow-up studies with students who are still in school is a helpful technique for assuring returns from questionnaires that may later

JUNIOR HIGH SCHOOL FOLLOW-UP REPORT

The junior high schools are eager to find out how their graduates are getting along They wish to know, therefore, in what ways you think that junior high school has been helpful to you and in what ways it could have been more helpful Your honest answers to these questions will help the schools to know how they can adjust or improve their programs so as to provide better opportunities for their students

1 Name — Male / Female — Encircle grade 11-1, 11-2, 12-1, 12-2

2. From what junior high school did you graduate?

3 Present counselor?

4 Present vocational aim?

5 In what grade did you choose this aim?

6 Have you changed your aim since junior high school? Yes No

7 In what field are you doing your major work?

8 Have you changed your choice of major field since junior high school? Yes No

9 In what subject have you been most successful at Junior College?
Subject Grade

Check any of the reasons listed below

a Interest in subject

b Natural ability for subject

c. Good study methods

d Good previous preparation

e Teacher personality

f Light program

g. Special effort

Other reasons

h

i

FIG 19a—Junior High

10 In what subject have you been least successful at Junior College?

Subject. Grade

Check any of the reasons listed below

a Lack of interest
b Lack of ability for the subject
c Poor study methods
d Lack of time for study
e Lack of place for study
(1) at home
(2) at school
f Failure to do outside preparation
g Textbook or references too difficult
h Assignments not clear
i Lack of proper foundation for subject
j Worries
(1) Health
(2) Home
(3) Personal

Other reasons
k
l

11 Do you feel that you have to spend an undue amount of time on home study? Yes No

On the average, how much time per day do you spend in study? hrs per day

12 Are you working for pay? Yes No

List jobs held *while in Junior College* (last job first)

Type of work	Dates employed		Hours per week	Earnings per week
	From	To		

13 How did you get your present job? (a) Through Office of Dean of Men or Women , (b) Through someone else at the school. , (c) Through relatives or friends , (d) Answering an advertisement ; (e) State Employment Service ; (f) Private employment agencies , (g) School Placement Bureau

14 Are you working for (a) spending money , (b) personal expenses (clothing, transportation, etc) , (c) contributing to family support , (d) Other reasons

School follow-up report

15 Are you doing any work for service points? Yes No

16 On the average, how much time do you spend per day on home responsibilities? ....hrs per day

17 Extracurricular activities.

Please check or fill in the information requested concerning your extracurricular activities in Junior College

Activities	When did you join? 11 1, 11-2, 12-1, etc	Check if you have been or are now an officer	Check if you have been or are now doing committee work	Check if you took part in a similar activity while in junior high school	Comments
a School clubs (write in names)					
b Sports—after school					
c Church organizations					
d Community organizations such as DeMolay, Y M.C A Civic Orchestra, etc (write in names)					
e Student Body activities (write in names)					
f Other activities (write in names)					

18 What has been your most enjoyable experience in Junior College?

19 What has been your most disagreeable experience in Junior College?

FIG 19*b*—Junior High School

20 What problems are you now facing for which you feel you are inadequately prepared?

a. Problems with your subjects

b Personal problems

c Social problems

d Financial problems

21. If you could replan your junior high school experiences, what would you do differently?

a Subjects

(1) What subjects would you omit?

(2) What subjects would you add?

b. Activities

(1) In what school activities would you participate in which you took no part?

(2) What activities in which you participated would you omit?

c Would you make any other changes?

22 In what ways could junior high school be more worth-while or more helpful?

Follow-up report (*Continued*)

be asked of them [16] The percentage of returns after the one-year follow-up will naturally diminish

The expense of such a project will vary with the local situation Expenses for the junior high school follow-up will be confined largely to the mimeographing or printing of questionnaire forms and to clerical help in tabulating returns. Because of their

Class	DATE OF FOLLOW-UP														
	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
1950	X		X		X										
1951		X		X		X									
1952			X		X		X								
1953				X		X		X							
1954					X		X		X						
1955						X		X		X					
1956							X		X		X				
1957								X		X		X			
1958									X		X		X		
1959										X		X		X	
1960											X		X		X

FIG 20 —Follow-up time schedule

pleasing appearance, more expensive printed forms are preferred Unless the holding power of the school system is poor, expenses for postage will be negligible in the junior high school follow-up Expense for postage at the senior high and junior college levels may be a large item unless there is some contractual affiliation between the local branch of the State and Federal Employment Service and the school placement supervisor

On the following pages, two forms which might be used for a follow-up plan are presented It is obvious that these should not be taken over bodily and applied directly in any school situation It might be advantageous, however, to use some such form with modifications in a follow-up investigation

---

[16] Helpful advice on this problem will be found in R D Allen's, *Organization and Supervision of Guidance* (New York Inor Publishing Co , 1934), 420 pp

Employer Reactions.—It should be clear that employer reactions to the school's product cannot be studied by means of questionnaires and blanks sent to former students For reasons that seem inherent in the successful administration of questionnaire investigations, this procedure is not feasible in dealing with employers A direct, personal, more informal approach by those in charge of placement and follow-up activities is much more desirable here It should be the duty of these individuals not only to keep in direct touch with job opportunities, but also to be aware of the extent to which the school's product is meeting job requirements. They should also be responsible for reporting new developments which may demand additional curricular changes and for obtaining employer's suggestions for the improvement of the school and its program

Office of the
Dean of Student Personnel

Dear . .

Even though you are no longer a student at John Muir College, and although I am not now responsible for giving you "advice," I am still interested in your progress

I want to find out two things (1) Can the school, through me, be of any further service to you? (2) Will you, remembering John Muir College and your years after graduation, tell us how we can make John Muir of greater service to future students?

We can't send a "call slip" from the office to have you come in and chat with us, but perhaps you can give us the information we want on the enclosed blanks You can be sure that any information you give will be *strictly confidential* and used for your own benefit or for statistical purposes to improve John Muir College

Will you kindly fill out this questionnaire and help make the returns 100%?

Cordially yours,

Counselor

Fig 21—Follow-up letter

ALUMNI FOLLOW-UP QUESTIONNAIRE

Last Name First Middle Date

Permanent Address Phone

Married? If female, are you employed outside your home?

I

Employment Information

Employed? Full, or part time? How long in present job? years, months

IF NOT EMPLOYED, SHALL WE HELP YOU LOCATE A POSITION?

If employed, what is the nature of your work?

Employer, or firm (Name and address)

What comments have your employers made regarding your J M C training?

Check below your approximate income

Dollars per month	*Dollars per month*	*Dollars per month*
0–20	81–100	161–180
21–40	101–120	181–200
41–60	121–140	Over 200
61–80	141–160	

Are you satisfied with your present position? , or shall we help you locate another position?

II

For Those Still in School Elsewhere

Name of School Location

Major subject at above school Major subject studied at J M C

If the above majors are different, why did you change?

Did you encounter any difficulties in transferring from J. M C to your present school?

Explain

ALUMNI FOLLOW-UP QUESTIONNAIRE (*Continued*)

III

Your Opinions about John Muir College

In the appropriate columns below list the courses you took that were of MOST value to you vocationally, socially, recreationally, or in relation to citizenship—considered according to the following

Vocationally —useful in getting a job, doing the work required on the job, increasing your salary, or status
Socially —mingling with others in club, church, or fraternity life
Recreationally—sports, theater, hobbies
Citizenship —intelligent voting, office holding, improvement clubs

VOCATION	SOCIAL	RECREATION	CITIZENSHIP

Courses which you were required to take at John Muir College
In terms of your later experience, which courses *required of all students* were of most value and which of least value to you? List below in the appropriate column

MOST VALUABLE	LEAST VALUABLE	Any comments to make on any of these courses?

School activities outside of class (i e, athletics, clubs, offices, etc)
What activities engaged in at J M. C have been of the most value to you?

Activities of most value	Will you explain how they have been of value to you?

Counseling services you received at J M C ? (Are you satisfied or how could we better the services?)

Major subject at J M C .

FIG 22—Alumni follow-up questionnaire

Progress on the Job.—From the information secured through follow-up investigations it should be possible to facilitate a student's vocational progress. Such pertinent information is certain to be of advantage to the school in making curricular adjustments and in keeping pace with changing industrial conditions, but it can also be of real value in individual cases In instances where a particular individual is not adjusting well because of remediable shortcomings, suitable counseling can be brought to bear upon his problems When an occupation does not offer the possibilities that a certain graduate is capable of realizing, a placement officer who understands the problem can suggest a transfer that will be an advancement Through these activities guidance becomes functional after graduation as well as before By means of a comprehensive guidance service the secondary school may thus adequately fulfill its mission of educating the nation's youth.

The Pasadena City College Follow-up Study

Mention has earlier been made of the fact that follow-up studies are sometimes expensive. If the follow-up study is an extensive one, considerable amounts of money may be necessary for such items as office expense, clerical and secretarial help, printing, forms, and postage

It is occasionally possible to make an extensive follow-up study in connection with some still larger investigation, sponsored or financed by an education board or society This good fortune befell Pasadena City College (then known as Pasadena Junior College) in 1939

In that year, the American Association of Junior Colleges arranged with the General Education Board of New York City for the financing of a special study on terminal education, which study was inaugurated in 1940 and carried on for the next five years

Nine separate and distinct investigations on various aspects of terminal education were made by junior colleges in as many cities All were subsidized by direct grants from the General Education Board, the institutions themselves making an addi-

tional subsidy Pasadena investigated Placement, Follow-up, and Continuation Training Dr Cecil C Stewart began this study, which was later taken over by Dr. J O McClintic when the former entered military service We are here concerned with a brief account of the follow-up section of that investigation More complete treatment has been given to the study by Ward [17]

Method of the Investigation.—An advisory committee was organized at the outset This committee was composed of representatives of the junior college administration, faculty, and students; guidance experts, members of the employment service, and many business and civic leaders in the community It was decided to follow-up the (14th grade) graduating class of June, 1949 This was to be done by personal interviews, individual and group conferences, job visitation, alumni meetings, and follow-up letters and inventories designed to reveal the progress of former students (including dropouts)

Special Projects Undertaken.—Sufficient data were gathered to complete at least five separate projects These projects, together with the number of contacts made, were as follows: a follow-up of the entire graduating class (628), a sampling of dropouts (897), a sampling of employers who had obtained these graduates through the local junior employment service (494), a sampling of former students in the armed forces (443), and graduates (391) who had majored in business or cosmetology during the years 1933–1938

In the number of usable responses to the forms employed in the study, the "Class of 1939" led with 50 4%, closely followed by "employers who were users of the junior employment service" with 48 2% The poorest response was made by the drop-out students (22 9%) Other responses were cosmetology and business graduates (33 0%), and former students in military service (42 7%)

Forms Used.—In such a study as this the kind of data one gets is determined in advance by the forms used. The coordina-

[17] Phebe Ward, *Terminal Education in the Junior College* (New York Harper & Bros, 1947), pp 259–74

tor suggested such forms as an "introduction to the study," instructions, questionnaires, tabulation forms, and postal-card reminders Specifically, these forms were known as (1) agricultural work application, (2) employer's student-worker report, (3) employer reaction blank, (4) follow-up inventory, (5) follow-up study for dropouts, (6) junior employment service evaluation inventory, (7) personal data card, (8) pregraduation inventory, (9) terminal graduate interview blank, and (10) work registration card

Results.—A mere listing of the findings of this study would fill many pages In fact, the findings may be grouped under several headings, such as (1) summary of data gathered from employer contacts, (2) improvements to the program suggested by graduates of business curricula, (3) usefulness in the military service of courses previously taken in junior college, (4) employment status of graduates of the Class of 1939, and (5) a study of reasons for dropping out of school

There are several items of general information, however, as well as many that have vocational and social-civic implications, that may be abstracted from the study In a limited treatment such as this these must suffice, accordingly, some of the more important findings are listed below

1. Graduates chose Pasadena City College chiefly because of location, economic reasons, courses offered, and reputation
2. Ninety per cent of the graduates were satisfied with their school experience Women were slightly better satisfied than men
3. Seventy per cent of the men and 77 per cent of the women had attended an educational institution of some kind since leaving Pasadena City College
4. In general, the graduates pursued in their subsequent schooling the same interest they had followed in junior college
5. The former students gravitated definitely toward the semi-professional and professional types of employment.
6. Slightly over half of the graduates were following the

vocations for which they had prepared at Pasadena City College Men graduates showed a greater tendency to do this than women

7. Sixty-four per cent of the graduates felt that they did not receive sufficient help in choosing and planning for their vocations while in junior college
8. Only about one third of the graduates felt that they were given sufficient training to enable them to make an intelligent home and family adjustment.
9. Graduates suggested the addition of the following types of courses to the curriculum (*a*) marriage relations, (*b*) home management, (*c*) hygiene, (*d*) homemaking for men, (*e*) etiquette, and (*f*) social adjustment.
10. Business education and English were considered the most useful subjects to graduates Language and mathematics were considered the least useful
11. About 50 per cent of the graduates felt that the junior college had given them sufficient training to enable them to make a satisfactory social and civic adjustment
12. Pasadena City College graduates were, in general, giving above average service to employers

Conclusion.—Even the short list of findings given above contains much over which administrators and teachers might well ponder Many of the findings are favorable, some are not. Data gathered from follow-up studies are available to all for use in improving the curriculum, co-curricular activities, the administrative set up, and the student personnel services

Placement and follow-up are, of course, closely related. Follow-up, especially, is an evaluation device There are other types of evaluation to be undertaken, certainly But there is probably no better single step that can be taken in evaluating the total contribution of a school, or school system, than a continuous program of placement and follow-up.

Summary

Successful placement of the counselee in an appropriate job is the capstone of a vocational guidance program. "Assisting

the individual to choose an occupation, prepare for it, enter upon, and make progress in it," are the steps in the complete vocational guidance service. Placement, although one of the last steps, is neither the most nor the least significant All aspects of guidance are important, and none can safely be developed at the expense of the others

Youths obtain jobs in a variety of ways through friends and relatives, through public and private employment agencies, and through teachers of vocational subjects and other members of the school staff. The most frequent placements are made through friends and relatives, but a large task for the employment bureaus and school personnel remains

There are many conflicting arguments regarding the advisability of schools' establishing their own employment services Secondary schools which consider it wise to develop some plan of cooperation with the local office of their state employment service will find it a going concern with a trained and efficient staff

The placement of a former student or graduate in his first position does not complete the school's responsibility It should keep in touch with its graduates in an effort to determine how well the education which they received is meeting their life needs Are students engaged in the occupations for which they prepared, or in some closely related fields? Did their education prepare them adequately for social living as well as for their vocations? Answers to these and similar questions will provide the schools with an excellent basis for that constant modification of the curriculum which aids in producing a functional educational program.

Questions and Problems

1. Assuming that a school system has a director of guidance, should the placement service be under his direction? Should it be under the director of vocational education?

2 What relationship should the senior high school counselor have to job placement?

3 Devise a follow-up questionnaire for your school Discuss its uses and estimated cost Do not construct such an elaborate form that it will probably not be filled out by the recipient

4 Outline a plan of action for the student's last year in school which will facilitate follow-up work in after years, i e., suggest procedures that will cause the student later to be more inclined to supply information asked for

5 Propose a number of ways which might prove feasible for keeping in touch with students after graduation

6 What guidance should be given pupils who are likely to leave school during the junior high school period? What can be done for over-age pupils of all types?

7. Is your school equipped to serve the student who plans to leave before graduation? What special responsibility does the guidance department have to these students?

Selected References

ALEXANDER, LILLIAN S. "Employment Counseling Program of the United States Employment Service," *Journal of Clinical Psychology,* II (April 1, 1946), 123–26.

ALLEN, RICHARD D *Organization and Supervision of Guidance* New York Inor Publishing Co, 1934, 420 pp

BURTT, HAROLD E *Principles of Employment Psychology* (rev ed) New York Harper & Bros, 1942, 568 pp

CHAMBERLIN, DEAN, *et al Did They Succeed in College?* New York Harper & Bros, 1942, 291 pp

CHISHOLM, LESLIE L *Guiding Youth in the Secondary School* New York· American Book Co, 1945, 433 pp

CRAMER, BUELL S "Following-Up High School Graduates," *Occupations,* XVIII (December, 1939), 182–86

DAME, J FRANK, BRINKMAN, ALBERT R, and WEAVER, WILBUR E *Prognosis, Guidance, and Placement in Business Education* Cincinnati South-Western Publishing Co, 1944, 216 pp

ECKERT, RUTH E, and MARSHALL, THOMAS O *When Youth Leave School* New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1938, 360 pp

EMERSON, L A "Federal Relations to Vocational Guidance," *Occupations,* XVI (June, 1938), 813–18

ERICKSON, C E, *et al Basic Test for Guidance Workers* New York· Prentice-Hall, Inc, 1947, 566 pp

ERICKSON, C E, and SMITH, G E *Organization and Administration of Guidance Services* New York McGraw-Hill Book Co, Inc, 1947, 276 pp

GERMANE, CHARLES E, and GERMANE, EDITH G *Personnel Work in High School* New York Silver Burdett Co, 1941, 599 pp

GOLDSTEIN, HYMAN. "On Again—Out Again," *Industrial Arts and Vocational Education,* XXVII (October, 1938), 318–22

HARDIN, A A "Alumni Survey," *School Activities,* XIII (December, 1941), 139–56.

HAUSAM, WINIFRED M, and MOSER, GEORGE V "Community Vocational Guidance for Adults," *Occupations,* XV (February, 1937), 399–402

HOPPOCK, ROBERT, and SHAFFER, ROBERT H "Job Satisfaction Researches and Opinions of 1940–1941," *Occupations,* XXI (February, 1943), 457–63

JUSTICE, S M "Implications of a Follow-Up Study of School-Leavers," *Occupations,* XIX (May, 1941), 563–66

KITSON, HARRY D "Meditations on Follow-Up," *Occupations,* XX (December, 1941), 203–204

LANDY, EDWARD "Principals Offered Follow-Up Program," *Occupations,* XIX (January, 1941), 266–72

LANDY, EDWARD, *et al* *Occupational Follow-up and Adjustment Service Plan* New York Occupational Adjustment Study of the National Association of Secondary School Principals, 1940, 96 pp

LEE, CHARLES E "Boys Looking for Jobs, Volunteer Counselors in Cincinnati High Schools," *Occupations,* XIV (November, 1935), 123–24

LEE, EDWIN A "Guidance—Training—Placement," *Occupations,* XVI (December, 1937), 225–26

McCUNE, E M "Follow-Up Study of Oklahoma Municipal Junior College Graduates into Later Educational Work and Occupational Careers," *Peabody Journal of Education,* XXI (January, 1944), 299–335

MILES, LILLIAN E "No Experience, No Job—So What?" *American School Board Journal,* XCVII (July, 1938), 19–21

MOORE, C G "Increasing the Returns from Questionnaires," *Journal of Educational Research,* XXXV (October, 1941), 138–41

MYERS, GEORGE E "Follow-Up the Stepchild of the Guidance Family," *Occupations,* XXVII (November, 1948), 100–104

NUTTALL, LEONARD J, JR "From School to Job," *Occupations,* XVI (November, 1937), 125–30

PALMER, JANE H *Junior Placement. A Survey of Junior-placement Offices in Public School Systems of the United States* Washington, D C: United States Department of Labor, 1940, 134 pp

RAINEY, HOMER P. "Guidance and Placement for America's Youth," *Occupations,* XV (June, 1937), 838–44.

RODES, HAROLD P *Our Graduates and What They Do A Follow-Up Study* New Haven, Conn Y M C A Junior College, 1947, 21 pp

SAMPSON, J N "Coordination of Guidance and Personnel Activities in the Community," *School Review,* LV (December, 1947), 594–98

TRABUE, JAMES E "Is the Commercial Department Selling Its Product?" *Business Education World,* XVIII (June, 1938), 783–86

WARD, PHEBE *Terminal Education in the Junior College* New York Harper & Bros, 1947, 282 pp

WEBSTER, E C "Follow-Up of Vocational Guidance," *Journal of Applied Psychology,* XXVI (June, 1942), 285–95

WRENN, C GILBERT "Critique of Methods Used in Follow-Up Studies of Students," *Harvard Educational Review,* X (May, 1940), 357–63

AUTHOR INDEX

SUBJECT INDEX